Lorenzo J. Blanco Nieto,
Nuria Climent Rodríguez,
María Teresa González Astudillo,
Antonio Moreno Verdejo,
Gloria Sánchez-Matamoros García,
Carlos de Castro Hernández
y Clara Jiménez Gestal
(Eds.)

Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática

eug EDITORIAL UNIVERSIDAD DE GRANADA

SEIEM SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Lorenzo J. Blanco Nieto, Nuria Climent Rodríguez,
María Teresa González Astudillo, Antonio Moreno Verdejo,
Gloria Sánchez-Matamoros García, Carlos de Castro Hernández
y Clara Jiménez Gestal (Eds.)

Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática

Granada
2022

Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática.
Campus Universitario de Cartuja
Colegio Máximo, s.n., 18071, Granada
Tlfs.: 958 24 39 30 - 958 24 62 20
www: editorial.ugr.es
ISBN(e) 978-84-338-7038-4
Edita: Editorial Universidad de Granada
Campus Universitario de Cartuja. Granada
Descriptores: investigación, educación matemática, desarrollo curricular, práctica en el aula.
Preimpresión: TADIGRA, S.L. Granada
Diseño de cubierta: José María Medina Alvea. Granada

Índice

La SEIEM ante los retos de la educación matemática en todos los niveles educativos

The SEIEM facing the challenges of mathematics education at all educational levels

Editores

Según consta en el Boletín nº 0 de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática www.seiem.es la constitución de la Sociedad tuvo lugar el 12 de marzo de 1996, en el salón de actos del Centro de Desarrollo Curricular del Ministerio de Educación y Ciencia, en una reunión en la que participaron 35 profesores de 20 universidades españolas.

El nacimiento de la sociedad no fue casual, siendo un eslabón más dentro de un movimiento renovador en torno a la educación matemática que se había iniciado en los años 70. Era una época con un deseo generalizado de reforma de la educación en España, cuya principal referencia eran los Movimientos de Renovación Pedagógica presentes en la casi totalidad de las regiones. Obviamente, la comunidad de educadores matemáticos no podía ser ajena a tal movimiento y así nacieron grupos especializados y sociedades de profesores que planteaban la organización de jornadas y cursos con el objetivo de divulgar experiencias innovadoras, difundir las corrientes sobre enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y coordinar esfuerzos individuales y colectivos. En esta época surgen algunas publicaciones de divulgación especializadas como las revistas Números, en 1981 y Épsilon, en 1984, entre otras. Fruto de esta colaboración se plantea, en 1988, la formación de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas www.fespm.es, a partir de algunas de las sociedades ya conformadas. Un número importantes de profesores incorporados a las Escuelas de Magisterio, que centrábamos nuestro trabajo en la formación de maestros en el área de las matemáticas, participábamos de esas inquietudes y actividades.

Había una preocupación por mejorar nuestra tarea profesional como profesores de matemáticas y como formadores de profesores y, también, bastante desconcierto y dudas sobre cómo enfocarla. A ello, había que añadirle la escasez de referencias específicas en ambas cuestiones. Ello, nos llevaba a diseñar y desarrollar trabajos de innovación o experimentación espontáneas relacionados con diferentes aspectos de la reforma educativa o sobre actividades concretas de intervención en el aula. Los problemas estudiados eran situaciones de enseñanza muy específicas, aunque útiles para los profesores que los experimentaban. Evidentemente, la realidad social que había en España con enormes deseos de cambios era, así mismo, una motivación más en nuestra actividad profesional.

Simultáneamente, en 1984 se crea, en la universidad, el Área de Conocimiento de "Didáctica de la Matemática", lo que nos permite integrarnos en los departamentos universitarios o crear departamentos específicos de nuestra área y, en algunos casos, conjuntamente con el área de Didáctica de las Ciencias Experimentales. Formar parte de los departamentos universitarios supuso, en muchos casos, disponer de medios personales y materiales, ayudas institucionales y otros recursos para iniciarnos en la investigación en este campo. En algunos de los proyectos desarrollados empezaban a participar profesores de primaria y secundaria, lo que nos llevó a adentrarnos en agendas de investigación de enseñanza y aprendizaje en diferentes niveles educativos, además de los específicos sobre formación, inicial y permanente, del profesorado.

La participación en eventos sobre educación matemática provocó una comunicación y colaboración para facilitar nuestro trabajo profesional y motivó la primera reunión de profesores del área de Didáctica de la Matemática que se celebró en Valencia en 1987. Se debatió específicamente acerca de la naturaleza y contendido del área de conocimiento, con referencia al ámbito profesional, docente e investigador, relacionado con la educación matemática y la formación del profesorado. Surgía en el ámbito universitario un profesorado con formación básica de matemáticas, específico y motivado, para abordar la investigación en la educación matemática, mostrando, de esta manera, un salto cualitativo importante en este ámbito de investigación.

El progreso en el trabajo y las nuevas condiciones en las que se desarrollaba nos llevó a constituir la SEIEM, en 1996. Era nuestro objetivo, desarrollar un espacio de comunicación crítica y debates desde diferentes marcos, teóricos y metodológicos de investigación y compartir los resultados de los proyectos desarrollados debate sobre investigación en Educación Matemática. Entendíamos la necesidad de conocer diferentes perspectivas, para abordar cuestiones específicas y generales, propias de la acción investigadora. Aunque la investigación era una prioridad, le dábamos mucha importancia al hecho de favorecer activamente la cooperación e intercambio entre investigación y práctica docente en todos los niveles educativos, lo que constituía otro de nuestros objetivos. Deseábamos contribuir a la mejora de la educación matemática presentando los resultados del trabajo investigador en todos los ámbitos que pudieran ayudarnos a su divulgación, a la toma de decisiones cuando correspondiera e influir en los organismos e instituciones relacionados con la educación, al objeto de lograr una enseñanza de las matemáticas más eficaz. Siempre fue nuestro deseo hacer llegar los resultados de nuestra investigación a los profesores de diferentes niveles para procurar una enseñanza y aprendizaje de las matemáticas más eficaz.

En 2022 conmemoramos el XXV aniversario del primer Simposio de la SEIEM que tuvo lugar en Zamora en 1997 y que ha mantenido una continuidad anual como se refleja en las sucesivas actas[1] que pueden consultarse libremente y bajarse de la página de la sociedad. En estos eventos se programaban dos o tres seminarios anuales, con ponentes invitados, lo que nos permitía debatir sobre la evolución y estado actual de la investigación de temas generales como marcos teóricos y metodología de investigación, sobre otros más específicos relacionados con contenidos matemáticos que formaban parte del currículo como el análisis matemático, la estadística o la geometría, entre otros, y, finalmente, sobre agendas trasversales de investigación relacionadas con la resolución de problemas, el uso de herramientas tecnológicas o la influencia del dominio afectivo en la enseñanza y aprendizaje, etc. También, las actas de los simposios contienen numerosas comunicaciones que reflejan la evolución y resultados de las investigaciones desarrolladas en estos años.

Para facilitar nuestra comunicación e interacción, desde el inicio se consideró conveniente formar grupos de estudio que reflejaran la preocupación y líneas de trabajo plasmadas en diferentes proyectos y agendas de investigación en las que participábamos. Los nombres de los diferentes grupos reflejan, en parte, estas preocupaciones: Aprendizaje de la Geometría APRENGEOM https://www.seiem.es/grp/aprengeom.shtml; Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor CDPP: https://www.seiem.es/grp/cdpp.shtml; Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria DEPC: https://www.seiem.es/grp/depc.shtml; Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica DMDC https://www.seiem.es/grp/dmdc.shtml; Entornos Tecnológicos en Educación Matemática ETEM https://www.seiem.es/grp/etem.shtml; Didáctica del Análisis Matemático GIDAM https://www.seiem.es/grp/gidam.shtml; Historia de las Matemáticas y de la Educación Matemática HMEM https://www.seiem.es/grp/hmem.shtml; Investigación en Educación Matemática Infantil IEMI https://www.seiem.es/grp/iemi.shtml; Pensamiento Numérico y Algebraico PNA https://www.seiem.es/grp/pna.shtml y Jóvenes Investigadores JIS https://www.seiem.es/grp/jis.shtml. Durante estos años, los diferentes grupos han celebrados reuniones específicas de debate e intercambio de información sobre los problemas de investigación abordados por sus miembros que han quedado plasmada en diferentes publicaciones también visibles en nuestra web.

Muchas de las investigaciones realizadas se relacionan, específicamente, con la formación de profesores de matemática en todos los niveles educativos, probablemente, como consecuencia de que ello es nuestra actividad docente más generalizada. Esta situación nos llevó, así mismo, a plantearnos, en diferentes ocasiones, la organización de jornadas específicas sobre el desarrollo curricular en la formación de profesores de infantil, primaria y secundaria y debatir sobre el contenido de los programas específicos de las asignaturas que impartíamos en la formación de maestro y de profe-

1. https://www.seiem.es/pub/actas/index.shtml

sores de secundaria. Los resultados de estos encuentros se plasmaron en diferentes publicaciones y propuestas concretas ante instituciones universitarias posibilitado una cierta evolución en los centros de formación inicial del profesorado. A este respecto, se desarrollaron seis jornadas específicas desde el año 1996 al 2002, cuyas actas están publicadas, así como otros encuentros posteriores y numerosas investigaciones cuyos resultados debieran reconsiderados en cualquier propuesta de reforma para la mejora de la profesión docente.

La celebración de este XXV aniversario ha coincidido con la propuesta y debate, en el seno de la comunidad educativa, sobre la modificación curricular y sobre la formación del profesorado en los niveles educativos previos a la universidad. Ello ha dado lugar a la publicación de diferentes decretos que establecen la ordenación y enseñanza en Educación Infantil, Primaria, Secundaria y Bachillerato y estamos a la espera de propuestas sobre la formación del profesorado. Por ello, la Junta Directiva de la SEIEM, en noviembre del 2020, propuso participar con un documento propio en este debate partiendo desde la investigación en Educación Matemática y teniendo en cuenta las aportaciones realizadas por los diferentes grupos de trabajo. Así, se propuso la elaboración de un libro que reflejara cuestiones generales sobre la E/A de las matemáticas y, al mismo tiempo, tuviera en cuenta los diferentes organizadores del currículo como los objetivos, contenidos, metodología y evaluación asumiendo la perspectiva adoptada en relación a las competencias generales y específicas. Pero siempre, considerando que los temas tratados debieran ser útiles al profesorado en su actividad profesional, tanto para generar actividades de aula como poder avanzar en su formación personal como profesores de matemáticas.

La buena disposición de los miembros de la SEIEM y la amplitud de perspectivas en las que trabajan nos permitió ser ambiciosos al incluir todos los niveles e itinerarios educativos, reflejando los organizadores del currículo. Paralelamente, hemos abordado cuestiones transversales como el uso de recursos didácticos, manipulativos y entornos virtuales, y la referencia a una multitud de factores que condicionan el proceso de E/A de una materia que se considera útil para la formación, participación e integración de las personas en la sociedad del siglo XXI, y cuya enseñanza puede y debiera ser agradable y motivadora, aunque exija reflexión y esfuerzo. Obviamente, asumimos que la educación matemática debe integrar aspectos cognitivos y afectivos, en íntima relación con los aspectos socio-culturales y valores propios de la sociedad actual.

La historia de la educación matemática y la implementación de diferentes propuestas curriculares muestran la importancia y necesidad de contar específicamente con el profesorado para que las recomendaciones establecidas se puedan trasladar a las aulas. A este respecto, recordamos que son ya muchos años desde que se sugiriera que la resolución de problemas es el contexto para el aprendizaje matemático o de señalar la importancia del entorno inmediato para contextualizar las tareas de aula, pero la investigación sigue mostrando que ambas recomendaciones no tienen repercusión clara en el desarrollo de la actividad de aula. De una manera similar, observamos la dificultad de introducir los entornos virtuales en la enseñanza señalando algunas investigaciones la falta de seguridad, cuando no de conocimiento y medios, de los profesores de diferentes niveles educativos para desarrollar los contenidos específicos del currículo.

Es decir, en cualquier propuesta de reforma o cambio hay que considerar las dificultades, profesionales e institucionales, que condicionan la implementación de las propuestas curriculares en la práctica docente. Establecer líneas de conexión entre el currículo, la investigación y la práctica docente es uno de nuestros objetivos aún, reconociendo que nuestra aportación es un paso pequeño, que sugiere otros muchos que deben propiciarse desde las instituciones educativas y de las asociaciones de profesores.

Asumimos que el contenido de cada una de las cuatro partes en las que se divide la publicación, e incluso de cada capítulo, podría ser objeto de un documento específico más amplio que este que presentamos. Por ello, esbozamos algunas orientaciones, teóricas y prácticas, con el objetivo de ayudar a los profesores en su trabajo profesional y servir de apoyo al desarrollo del nuevo currículo. El trabajo se ha realizado con la participación de 70 profesionales, docentes e investigadores en educación matemática, pertenecientes a 23 universidades. Se han aportado numerosas referencias que permiten profundizar en cada uno de los temas esbozados y animamos a su consideración ya que su lectura ayudará a comprender mejor la complejidad del mundo de la educación matemática.

Iniciamos el documento con una breve mirada histórica para mostrar reflexiones y aportaciones que nos ayudan a profundizar sobre los problemas de la educación matemática y de la implementación del currículo, que serán objeto de fundamentación y análisis para ayudar a la práctica docente. Es importante reflexionar sobre los descriptores curriculares de la educación matemática y mantener viva las preguntas sobre qué matemáticas enseñar y por qué hay que enseñar matemática en el siglo XXI. Como profesionales reflexivos debemos considerar los objetivos generales de la educación y que nuestro trabajo se dirige a la formación de personas que van a vivir en una sociedad concreta en la que deben integrarse y participar creativamente y luchar para que sea más solidaria, igualitaria y justa. A este respecto, con el objetivo de orientar a los profesores en este nuevo rumbo curricular, reflexionamos sobre la pertinencia y fundamentación de sentidos matemáticos escolares en los documentos curriculares publicados, y sobre las consecuencias que tendrán en futuros procesos de enseñanza y aprendizaje. Se realiza una descripción general de cada uno de los sentidos matemáticos escolares en los que se divide: sentido numérico, espacial, de la medida, estocástico y algebraico, señalándose las principales componentes que lo organizan. Termina la primera parte con un capítulo relativo a la evaluación que es un aspecto fundamental que sigue reflejando prácticas muy tradicionales, por lo que se aportan elementos para su desarrollo.

Somos conscientes de la intensidad y complejidad de la dedicación de los profesores en los diferentes niveles de enseñanza, y del trabajo cada vez más intenso y exigido que requeriría una reconsideración del papel de los profesores en los centros de enseñanza. El análisis del currículo y su concreción en el aula no es sencillo y debe desarrollarse desde los profesionales de la educación, pero al mismo tiempo requiere un mayor esfuerzo de las instituciones educativas y mostrarse más explícitamente en los documentos curriculares oficiales. Aunque, no era nuestro objetivo concretar todo el currículo de matemática en los diferentes niveles educativos, en la segunda parte hemos querido mostrar algunas orientaciones docentes que se requieren en la sociedad actual, justificando y proponiendo actividades de aulas en todos los niveles educativos: infantil, primaria, secundaria obligatoria, bachillerato, universidad, formación profesional, educación de adultos y aprendizaje matemático de alumnado con necesidades especiales.

Es necesario reconsiderar la enseñanza de las matemáticas en infantil y primaria, reconocer el papel de las matemáticas intuitivas e informales y potenciar actividades que generen aprendizajes de una manera más natural, espontánea y significativa, como paso para acceder a una matemática más formal. Igualmente, hemos pretendido facilitar a los profesores de primaria, secundaria y bachillerato la implementación de las orientaciones más novedosas que se sugieren en los nuevos decretos curriculares.

La transición de la secundaria a la universidad presenta dos referencias importantes que son motivos de reflexión y preocupación, tanto por la realización de las pruebas de acceso similares a lo largo de los años peso a los cambios de modelos, como por la formación matemática con la que los estudiantes acceden a los diferentes grados. Ello, nos lleva a reflexionar acerca del sentido y contenido de las matemáticas en diferentes grados universitarios y se proponen algunas tareas exploratorias que puedan ser consideradas en las aulas universitarias.

Pero también, la enseñanza de las matemáticas está presente en la educación de personas adultas y en la formación profesional y sobre ello es necesario incidir y mostramos, en ambos casos, reflexiones y propuestas concretas. A este respecto, sugerimos contextualizar las situaciones de aprendizaje e integrarlas en la vida cotidiana de las personas adultas y partir de situaciones de aplicación concreta de contenidos matemáticos en diferentes profesiones.

La educación matemática presenta numerosos elementos transversales, algunos de los cuales, son considerados en la tercera parte. Asumimos el aula de matemáticas como un contexto social de comunicación que debe propiciarse a partir de tareas matemáticas específicas, con prácticas centradas en el alumno y sus procesos de aprendizaje y una matemática inclusiva que valore los aportes y características de todos los alumnos. Asumimos la importancia de avanzar hacia una enseñanza de las matemáticas que de sentido a la educación y sea enriquecedora a nivel personal, social y académico. En esta parte se realizan propuestas para trabajar las conexiones con otras disciplinas, se consideran los desafíos de la sociedad actual, como los Objetivos de Desarrollo Sostenible o la perspectiva de género y las experiencias de matemáticas fuera del aula. Para ello, es fundamental el uso de materiales y recursos manipulativos y entornos tecnológicos, que ayuden a los aprendices. Somos consciente de la dificultad, didáctica y de disponibilidad, del uso de materiales y recursos, así, como de la necesidad de conocer con claridad la secuencia de aprendizaje que se genera en cada caso. Este uso, además, debe realizarse en el aula y fuera de ella ya que es fundamental la complementariedad de las actividades regladas y no regladas desarrolladas en el entorno inmediato. Termina la tercera parte con una referencia a la resolución de problemas y modelización, consideradas desde diferentes perspectivas e incidiendo en su papel como contexto necesario para desarrollar el aprendizaje y para dar sentido matemático de los diferentes saberes que se indican en el currículo.

La última parte presenta una estructura diferenciada y, en ella, abordamos la formación inicial del profesorado de infantil, primaria y secundaria, el acceso a la profesión docente y mostramos situaciones de aprendizaje en relación a su desarrollo profesional. Obviamente, considerando los pasos anteriores como un proceso continuo de aprendizaje y formación, que permita al sujeto ir adaptándose a las necesidades que la sociedad va originando. Se pretende dar respuesta a la demanda de la formación de profesores a través del modelo de competencias profesionales docentes, a partir de la identificación del conocimiento específico de los profesores de matemáticas orientado a la práctica profesional, y de las prácticas profesionales específicas que configuran la actividad de enseñar matemática y que se especifican en el texto. Las propuestas de desarrollo profesional inciden en la idea de la reflexión sobre la propia práctica y en el necesario uso de referencias teóricas procedentes de la Didáctica de la Matemática para organizar la reflexión.

Parte 1

El Currículum de Matemáticas

The Mathematics Currículum

Introducción

Se dice en numerosas ocasiones que quien no conoce su historia está condenado a repetirla. No sé si es necesariamente así, pero el estudio de la historia de la educación matemática nos muestra algunas constantes en su desarrollo, tanto en relación con las preguntas básicas que subyacen en la actividad profesional del profesor de matemáticas, como a las dificultades que estos encuentran en su práctica docente cotidiana, algunas de las cuales se mantiene demasiado tiempo.

De esta manera, hay preguntas que siempre estarán en la base de cualquier propuesta curricular en referencia a qué matemáticas enseñar y cómo enseñarlas, que, también, son objeto de reflexión al hablar de la evaluación al preguntarnos qué y cómo evaluar. Obviamente, estas y otras preguntas han encontrado diferentes respuestas en cada época condicionadas por cuestiones sociales, económicas y culturales. Pero, también, vienen sugeridas por los objetivos marcados para la educación en general y por la concepción asumida sobre la naturaleza de la propia matemática. Consecuentemente, tampoco ha sido fácil dar una respuesta clara sobre qué significa lograr una enseñanza eficaz o mejorar la educación matemática.

El desarrollo de la sociedad provoca que la educación, también la educación matemática, tenga que ir adaptándose a las necesidades, personales y sociales, en cada época, con repuestas diferenciadas en cada momento y realidad social, pero con un objetivo permanente de luchar por una sociedad más justa que permita el desarrollo de todas las personas.

De ahí el contenido de esta primera parte que se inicia con una mirada a las reflexiones y aportaciones sobre la enseñanza de las matemáticas desde la mitad del siglo pasado tratando de sintetizar aquellas ideas que han permitido la evolución de la educación y que subyacen en diferentes propuestas curriculares realizadas. Ello nos ha permitido señalar algunas pautas necesarias para la enseñanza y aprendizaje que fundamentaría algunas de las propuestas actuales y que se reflejan en los dos primeros capítulos.

También, el segundo capítulo se marca como objetivo fundamentar una nueva propuesta curricular en la enseñanza obligatoria reflexionando, además, sobre algunas dificultades que obstaculizarían su puesta en marcha. Así, se refiere al papel, real y pretendido, de la matemática en la escuela y a una nueva visión sobre ella. Trata de responder a una pregunta recurrente de ¿para qué enseñamos matemáticas?, teniendo en cuenta la importancia de los docentes, los materiales curriculares y los recursos en el desarrollo del currículo, en cualquier situación escolar.

El tercer capítulo considera la nueva propuesta curricular centrándose en la fundamentación y significado de los sentidos matemáticos y sobre la pertinencia de su inclusión en el currículo. En la idea de orientar la actividad en el aula de los profesores de todos los niveles educativos (infantil, primaria, secundaria, bachillerato, universidad, formación profesional y educación de adultos) se describen cada uno de los sentidos considerado en los decretos: sentido numérico, espacial, de la medida, estocástico y algebraico. Por ello, es importante la lectura de este capítulo para entender los capítulos que aparecen en la parte segunda.

Finalizamos esta parte con un capítulo dedicado a la evaluación que es uno de los organizadores del currículo que menos ha evolucionado en la práctica real del aula, según los resultados de diferentes investigaciones. Asumiendo la idea general de ser una aportación útil al profesorado se muestran nueve situaciones reales, en diferentes niveles educativos, que serían punto de partida para reflexionar sobre el sentido de la evaluación, aportando algunos instrumentos y tareas concretas y una guía de evaluación. Todo ello, entendiendo que la evaluación es una parte más del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Blanco Nieto, Lorenzo J. (Coord.).
Universidad de Extremadura

Reflexiones curriculares desde la historia de la educación matemática, en la segunda mitad del siglo XX

Curricular reflections from the history of mathematics education, in the second half of the 20th century

Blanco Nieto, L. J.
Universidad de Extremadura

Resumen

Mejorar los resultados en la enseñanza de las Matemáticas ha sido una de las preocupaciones de la comunidad educativa desde hace muchos años. Una breve mirada al pasado reciente nos muestra reflexiones y aportaciones interesantes que nos ayudan a profundizar sobre los problemas de la educación matemática, a comprender mejor dónde estamos y qué es lo que debería considerarse en el futuro.

Palabras Clave: Currículo, Historia de la educaciónmatemática.

Abstract

Improving the results in the teaching of Mathematics has been one of the concerns of the educational community for many years. A brief look at the recent past shows us interesting reflections and contributions that help us delve into the problems of mathematics education, to better understand where we are and what should be considered in the future.

Keywords: Curriculum, History of mathematics education.

Introducción

> A comienzos de los años cincuenta, e incluso antes, todo el mundo estaba de acuerdo en que la enseñanza de las matemáticas era insastifactoria. El nivel de los estudiantes en matemáticas era más bajo que en las otras asignaturas. La aversión e incluso el terror estudiantil a las matemáticas estaba muy extendido. Los adultos no recordaban casi nada de las matemáticas que habían aprendido y no sabían efectuar operaciones sencillas con fracciones. De hecho, no vacilaban en decir que no habían sacado nada limpio de sus cursos de matemáticas.
>
> (Kline, 1978, p. 21)

La cita inicial muestra que los problemas de la enseñanza y aprendizaje (E/A) de las Matemáticas no son nuevos, ni consecuencia de leyes modernas de educación. De manera similar, en la década de los 80', el prólogo a la edición española del Informe Cockroft indicaba: "El alto número de suspensos en Matemáticas y la conciencia de que los alumnos no aprenden en la medida esperada, está extendiendo entre los profesores, los alumnos y los padres la idea de que "algo va mal", manifestada unas veces como sensación de fracaso, otras como desconcierto, a menudo como frustración" (Cockroft, 1985, p. XII).

Estudios recientes inciden en los pobres resultados escolares y en el desarraigo de la población estudiantil y adulta respecto de los contenidos matemáticos. Son múltiples los aspectos a estudiar en relación con su E/A, muchos de ellos contenidos en diferentes capítulos de este libro, que pueden abordarse desde diferentes perspectivas que, lejos de contraponerse, se complementan, estableciéndose una panorámica más precisa que nos ayuda a comprender mejor el complejo mundo de la educación matemática.

Revisar la historia de la educación matemática nos permite profundizar sobre algunos de sus problemas. Estas referencias no son reliquias históricas sino fuentes depositarias de ideas y debates interesantes, que nos ayudan a reflexionar sobre la actividad docente, dando sentido a la educación matemática en el siglo XXI y al trabajo profesional del profesor de matemáticas. El periodo considerado fue testigo de cambios profundos en la enseñanza de las matemáticas para encontrar modelos adecuados para su aprendizaje.

La educación matemática a partir de los cincuenta

En los 50 se desarrollaron, en EE.UU., diferentes proyectos con objeto de elaborar un nuevo plan de matemáticas, en un movimiento que llamaron "*revolution in mathematics*" (National Council of Teacher of Mathematics, 1980). Algunos autores (Kline, 1978; Putnam et al., 1990; Castelnuovo, 1999) señalaron el lanzamiento por los rusos del Sputnik, en 1957, como el acontecimiento decisivo que generalizó reacciones de cambio en aspectos importantes en la investigación y desarrollo de la enseñanza de las Matemáticas.

> Este acontecimiento convenció al gobierno y al país de que los EE.UU. estaban detrás de los rusos desde el punto de vista de las matemáticas y la ciencia, y tuvo el efecto de aflojar la bolsa de los organismos gubernamentales y de las fundaciones. Puede que fuese una coincidencia, pero en ese momento otros muchos grupos decidieron participar en la consideración de un nuevo plan.
>
> (Kline, 1978, p. 23)

Al margen del contexto concreto y anecdótico, las décadas de los 50 y 60, fueron un período de reflexión y cambio importante en las concepciones y métodos desarrollados en la educación matemática. Se consideraba que la enseñanza de las matemáticas tenía que ir más allá de la enseñanza del cálculo aritmético y la aplicación de fórmulas y desarrollo de procedimientos algorítmicos. Se justificaba el fracaso de las matemáticas porque el plan de enseñanza era anticuado y no acorde a las necesidades del momento.

Muchas de estas ideas se plasmaron en publicaciones específicas y en las recomendaciones de la Conferencia Internacional de Instrucción Pública, convocada en Ginebra, en 1956. por la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura y por la Oficina Internacional de Educación, y de las que se hacen eco Puig Adam (1960) y Hernández (1978) en su recopilación de 24 artículos y documentos de la época.

La preocupación por la educación matemática se consideraba desde una doble dimensión. En primer lugar, en relación con los contenidos de la propia matemática en los diferentes niveles educativos: *¿qué matemáticas enseñar*? En segundo lugar, se consideraban las aportaciones de psicólogos, pedagogos y docentes: *¿cómo enseñarlas?* Las aportaciones de Jean Piaget (Piaget, 1965) y otros, recogidos en Hernández (1978), eran adecuadas e importantes, y debieran haber provocado la colaboración entre especialistas en educación matemática y especialistas en educación, lo que no se produjo en la intensidad adecuada (Malaty, 1988). Aún hoy, algunos sectores influyentes en la educación matemática, recelan de las aportaciones de la psicología, pedagogía y otras áreas, incluso de las más específicas consideradas en el área de conocimiento de Didáctica de la Matemática, presente en todas las universidades españolas.

Cambios en los contenidos matemáticos y en las matemáticas escolares

> “Si todo el programa que propongo se tuviera que condensar en un sólo eslogan yo diría: ¡abajo euclides! ¡abajo el triángulo!”.

Con estas palabras J. Dieudonné terminó su intervención en el seminario de matemáticas celebrado en Royaumont (Francia), en 1959. Formaba parte del grupo de matemáticos franceses agrupados con el nombre de Nicolas Bourbaki

(Bourbaki, 1972), que influyeron notablemente en el desarrollo de la matemática desde la primera mitad del siglo XX hasta los años 70. Su objetivo era revisar los fundamentos y resultados básicos de la matemática, sistematizar y ordenar los contenidos matemáticos que se habían desarrollado enormemente en décadas anteriores, y "suministrar a los lectores herramientas matemáticas tan robustas y tan universales como sea posible" (Bombal, 2011, p. 80). Su influencia en la enseñanza de las matemáticas en los niveles universitarios fue clara e inmediata, influyendo en la introducción de nociones de la teoría de las estructuras y de los conjuntos en la enseñanza escolar (Castelnuovo, 1999).

Aparecieron importantes publicaciones mostrando la diversidad y utilidad de las matemáticas, a partir del estudios sobre su naturaleza, uso, historia, fundamentos y filosofía, en relación con el arte, música y aplicaciones a los problemas sociales y económicos, y otros muchos campos del conocimiento. Parte de estas contribuciones fueron recogidas en la antología de 132 textos realizada por Newman (1963). Incluso Poincaré (1963) invoca la sensibilidad con motivo de demostraciones matemáticas haciendo alusión "al sentimiento de la belleza matemática, de la armonía de los números, de las formas, de la elegancia geométrica. Un sentimiento estético que todos los verdaderos matemáticos conocen" (p. 48).

Importante fue el trabajo *La matemática: su contenido, método y significado* (Aleksandrov et al., 1973) que fue considerada una obra maestra para la enseñanza de la matemática, en el nivel elemental y en el nivel avanzado. Los autores examinaban el desarrollo histórico de la disciplina desde sus orígenes, logrando una muy buena organización de la matemática y marcando algunas ideas sobre el probable desarrollo futuro. Asumían una matemática "en continuo desarrollo; los principios de la matemática no se han congelado de una vez para siempre, sino que tienen su propia vida y pueden incluso ser objeto de discusiones científicas" (Aleksandrov et al., 1973, p. 20). Era evidente que se considera la actividad matemática y su enseñanza como una actividad compleja, dinámica y cambiante.

R. Thom (1978) realiza un "balance sucinto de las transformaciones hechas en los programas" (p. 116), señalando dos objetivos fundamentales: la renovación pedagógica y la modernización de los programas. En 1961, Stone (1978) había señalado la necesidad de modificar el núcleo de contenido matemático a enseñar y aspectos de su enseñanza, como consecuencia de la importancia que la matemática iba tomando en la sociedad. Ello debería provocar una nueva organización de la enseñanza en un programa bien concebido, que tuviera en cuenta las aportaciones de la psicología moderna al estudio del desarrollo intelectual, la formación de conceptos y la teoría del aprendizaje. Hoy día asumiríamos esta idea para señalar la importancia de las aportaciones de la didáctica de la matemática que consideran, además de los contenidos específicos, aspectos emocionales y socioculturales, la neurociencia en relación al desarrollo del pensamiento matemático, la aparición de las tecnologías y la consideración del pensamiento computacional, y otras aportaciones que marcan el desarrollo personal e intelectual en este siglo.

El problema, como en la actualidad, era delimitar un marco curricular que considerara las necesidades de la nueva sociedad, y el aprovechamiento e integración en la enseñanza de las Matemáticas de las aportaciones de otras ciencias. Para ello, habría que resolver "el problema principal que domina todos los demás sobre el contenido de los estudios: saber cuáles son las Matemáticas que deben enseñarse hoy día" (Markusievitch, 1978, p. 196).

En España, Puig Adam (1960) realizaba cuatro preguntas: i. sobre los objetivos, ¿qué nos proponemos con la enseñanza de la Matemática?; ii. sobre el método, ¿por dónde vamos?; iii. sobre el modo, ¿cómo vamos? y iv. sobre el contenido ¿qué cogeremos en el camino? Señalaba que la manera de jerarquizar y contestar estas preguntas marcaría la propuesta sobre la enseñanza de las matemáticas. Estas referencias funcionaron como organizadores del currículo, trasladables a cualquier época ya que la sociedad está en constante evolución con nuevas necesidades e incorporando constantemente herramientas intelectuales y materiales.

El cambio fundamental en el currículum fue la introducción de las llamadas matemáticas modernas o los conjuntos, en palabras de la época. Se pensaba que servirían de conexión entre las diferentes partes de las matemáticas, al asumir que el uso de los conjuntos, del lenguaje matemático y los conceptos del álgebra abstracta podían dar más coherencia y unidad al plan de enseñanza secundaria.

En palabras de Guzmán (1992) el movimiento hacia la 'matemática moderna' provocó una honda transformación de la enseñanza. Recuerda que se subrayaron las estructuras abstractas, lo que condujo al énfasis en la fundamentación a través de la teoría de conjuntos y al cultivo del álgebra, profundizándose en el rigor lógico, en la comprensión y contraponiendo ésta a aspectos operativos y manipulativos. Según Bombal (2011) esta nueva estructura del conocimiento matemático fue introduciéndose en los programas educativos de diferentes países, desde mediados de los 50. En España aparece la Colección de Textos Piloto de Bachillerato, editado por la Comisión Nacional para el Mejoramiento de Enseñanza de la Matemática en 1964, que inicia la introducción a las operaciones básicas con subconjuntos y la geometría intuitiva a partir de las transformaciones geométricas. Se produjo un cambio acerca de lo que se debía enseñar en matemáticas desde los primeros niveles educativos, que no produjo el resultado esperado. Se quiso imponer un nuevo currículo sin contar con el profesorado.

Los cambios constituyeron una revolución en la enseñanza de las Matemáticas provocando una gran polémica sobre la oportunidad de su consideración en la enseñanza primaria y secundaria, y un enorme fracaso asumido por los implicados en el sistema educativo. Su implantación en el nivel de primaria provocó una corriente contraria (*back to basics movement*) en el que se trató de definir lo fundamental de las Matemáticas con objeto de recuperar aspectos más tradicionales como los referentes, por ejemplo, al cálculo aritmético. De cualquier manera, no fue la opinión de los especialistas lo que potenció el movimiento de volver a lo básico y tradicional, más bien fueron la opinión pública y los medios de comunicación. Los padres no aceptaron que el nuevo currículo no les fuera familiar puesto que ponía el énfasis en otra matemática desconocida, lo que les imposibilitaba ayudar a sus hijos puesto que era un currículo diferente del que habían estudiado y que, obviamente, desconocían (Thom, 1978, Malaty, 1988).

El sugerente título del libro de Kline (1978) *¿Por qué Juanito no sabe sumar?* expresaba el sentimiento de fracaso de la enseñanza de las matemáticas modernas. En su crítica señalaba el "uso de un vocabulario pedantesco e innecesariamente abundante, empleo injustificado y más frecuente de lo necesario de ciertos símbolos, pobreza de ejercicios …" (p. 38). El error fue admitido por todos y las llamadas matemáticas modernas fueron desapareciendo de los primeros niveles de escolaridad, volviéndose a un currículo más tradicional.

Pasado un tiempo, Malaty (1988) analizó lo que significó este movimiento señalando algunas cuestiones, que recojo por su interés. Señalaba que los especialistas trabajaron con entusiasmo y muy deprisa, se evidenció poca cooperación entre expertos en educación matemáticas y en educación y se dedicó poco tiempo e intensidad a la evaluación de los programas. El uso de los libros de textos se extendió antes de haber sido adecuadamente examinados, y las conexiones entre los diferentes capítulos mostraba que el currículo no había sido suficientemente estructurado. También, hacía referencia a la importancia de la formación permanente del profesorado, en todos los niveles.

Crítica a la enseñanza tradicional de las matemáticas

> No llegaban a comprender la significación real de los conceptos matemáticos
>
> (Dienes, 1970, p. 5).

En general, "se tenía la impresión que los alumnos aprendían en clase a manejar las operaciones aritméticas básicas y los algoritmos más frecuentes y poco más" (Schoenfeld, 1985, p. 26), lo que provocaba que profesores e investigadores consideran la necesidad de un cambio en los programas de las matemáticas escolares. Entendían, además, que algunos de los contenidos, principalmente algorítmicos, habían perdido importancia en el desarrollo matemático. Esta reflexión sigue siendo muy pertinente actualmente ya que las necesidades de la sociedad del siglo XXI y el desarrollo de tecnologías educativas, entre otras variables, tienen que llevar aparejado una renovación en los programas, provocando la pérdida de importancia o desaparición de algunos de contenidos y la revalorización de otros.

Cambiar aspectos metodológicos en las aulas se consideraba esencial para poder llevar a cabo una renovación en la enseñanza. Es decir, la renovación de contenidos, aunque necesaria, no es suficiente si no va acompañada de una nueva práctica pedagógica. "Demasiados ensayos educativos incurren en la triste paradoja de pretender enseñar las matemáticas modernas con métodos arcaicos, es decir, esencialmente verbales y basados sólamente en la transmisión más que en la reinvención o redescubrimiento" (Piaget, 1978, p. 185). Esta paradoja fue recordada 25 años después por Romberg (1991) al señalar que el movimiento de las matemáticas modernas realizó algunos cambios en los contenidos pero muy pocos en las tradicionales prácticas metodológicas en las aulas. Algo similar sucede con la consideración de la resolución de problemas como contexto para el aprendizaje matemático, que aparecía en los currículos de los 90', y que no se refleja en la práctica docente. Creo que, en la actualidad, esta consideración es especialmente importante. De alguna manera, la paradoja señalada por Piaget se observa en algunas prácticas actuales, incluso con el uso de las nuevas tecnologías, donde el estudiante observa y repite lo que el profesor muestra en la pantalla.

Los autores se manifestaban contundentes en su crítica al plan de enseñanza tradicional y a la práctica en el aula con argumentos que podrían ser motivo de investigaciones educativas actuales y que nos sirven para reconsiderar aspectos importantes en cualquier propuesta curricular. Recojo algunas aportaciones al respecto.

En primer lugar, recordaremos el interesante debate sobre el uso de *métodos inductivos y deductivos en el aula, donde había un predominio de las llamadas clases magistrales*. Se criticaba el excesivo énfasis en la demostración deductiva de los teoremas que provocaba que los estudiantes se aprendieran de memoria las demostraciones. Se desarrolla una interesante polémica, aún vigente, sobre la conveniencia de utilizar métodos expositivos y deductivos en la enseñanza de las Matemáticas en los niveles escolares y la ventaja de introducir una enseñanza más motivadora que permita la construcción del conocimiento, dándole significado a aprender y a aprehender. Decidir cuándo y cómo ir introduciendo métodos deductivos en la enseñanza sigue siendo un aspecto de reflexión importante, relacionado con el proceso de abstracción y los niveles de maduración de los aprendices. Recordemos la frase típica de los estudiantes "profe, con números que con letras no me entero". Actualmente, son muchos los profesores que en la práctica se acercan más al conductismo que al constructivismo o al aprendizaje significativo, probablemente, porque el proceso de construcción del conocimiento matemático es algo poco comprendido por el profesorado novel. Son más los que asumen, consciente o inconscientemente, los métodos que experimentaron como aprendices eludiendo otros métodos que consideran, en teoría, más adecuados pero que su implementación en el aula les causa dudas e inseguridad. Este aspecto muestra la importancia de la formación, inicial y permanente, del profesorado.

Eran frecuentes las referencias para modificar la enseñanza a base de lecciones magistrales, donde el papel del estudiante era fundamentalmente escuchar y copiar, para luego estudiar, en muchas ocasiones de memoria. La manera tradicional de impartir clases de matemáticas inducía a una actitud pasiva de los estudiantes y daba pleno sentido la expresión: 'dar matemáticas'. La dinámica del profesor impartiendo su docencia y el alumno estático en su asiento, se ha mantenido, aunque haya cambiado el aspecto formal de la comunicación, que ha evolucionado del discurso hablado, al uso de la tiza y la pizarra, las transparencias, el PowerPoint o la pizarra digital. En todos los casos, se evidencia un tipo de educación conductista cuya superación por otros modelos se pide desde hace muchos años.

Al mismo tiempo, criticaban la *enseñanza mecanicista y memorística con procedimientos desconectados entre sí*: "se les pide que imiten lo que el maestro y el libro hacen. Los alumnos se enfrentan a una variedad desconcertante de procedimientos que aprenden de memoria. Casi siempre el aprendizaje es completamente memorístico" (Kline, 1978, pp. 9-10). A este respecto, se señalaba el "contraste injustificado entre el aprendizaje mecánico y calculista del álgebra y el axiomático de la geometría" (Hernández, 1978, p. 38). También, en España se criticaba el aprendizaje memorístico, señalando que "interesa enseñar a discurrir, mejor que a adquirir gran maestría y rapidez en el desarrollo de un proceso, que puede memorizarse. Debemos evitar que el aprendizaje de "recetas de cocinas" para hacer problemas o aprender de memoria teoremas más o menos importantes" (Roanes, 1969, p. 14). R. Godement fue más radical en sus comentarios al señalar que

> el primer deber de los matemáticos sería proporcionar cosas que no les piden: hombres capaces de reflexionar por sí mismos, de despreciar argumentos falsos y frases ambiguas, a los ojos de los cuales la difusión de la verdad importe muchísimo más que, por ejemplo, la televisión planetaria en colores y en relieve: hombres libres y no tecnócratas-robot
>
> (Godement, 1974, p.21).

Puig Adam (1960) expresaba magníficamente su idea sobre los procesos deductivos y el uso de la memoria al señalar que

> las exposiciones lógicas impecables no satisfacen las apetencias analizadoras del niño, ni siquiera sirven para cultivar en él hábitos de síntesis, ya que tampoco se desarrolla precisamente esta capacidad dando la síntesis hecha. ¡Qué engañosa complacencia la de nuestros viejos profesores al oirnos repetir demostraciones estereotipadas! ¡Qué cándido espejismo al imaginar que así aprendíamos a discurrir! El resultado conseguido es la mayor parte de los casos eran tan sólo el cultivo obsesionante de la memoria para lograr una pura y simple imitación, bajo la falsa apariencia de un raciocinio de prestado (p. 103).

Conviene recordar que investigaciones de este siglo, señalan el uso de la memoria en el aprendizaje de las matemáticas en diferentes niveles educativos. Así, por ejemplo, Barrantes y Blanco (2006) señalan que los estudiantes consideran difícil la enseñanza de la geometría porque tienen que aprender fórmulas y demostraciones de memoria. Hidalgo et al., (2013) señalan que hasta los problemas típicos de los libros de texto se los aprenden de memoria. Es decir, sigue vigente el recurso de los estudiantes a memorizar las definiciones, demostraciones y las formas de resolver los problemas tipos, como la mejor manera para aprobar los exámenes y pasar de nivel.

Una de las consecuencias de este modelo y que se indicaba como defecto muy grave era la *falta de motivación*. Los aprendices estudiaban porque se les obligaba a ello y argumentaban que defender los contenidos matemáticos "diciendo que se utilizarán después en la vida. … Esta motivación es como ofrecer la luna" (Kline, 1978, p. 13). Ya reconocían que gran parte del fracaso en la enseñanza de las matemáticas se debía a la falta de motivación, junto a factores afectivos, por ello la motivación del estudiante debe buscarse desde un punto de vista más amplio, más allá del posible interés intrínseco de la matemática y sus aplicaciones (Guzmán, 1992). Es evidente que la motivación es un elemento que promueve o inhibe la conducta de los aprendices y que en su consideración se reflejan aspectos individuales y sociales.

L*os enunciados de los problemas* "son desesperadamente artificiales y no convencerán a nadie de que el álgebra es útil" (Kline, 1978, P. 16), destacando la repetición más que la variación (Romberg, 1991). Los enunciados de los problemas (vocabulario, contexto, formato, etc.) es importante porque "la forma en que se presenta el enunicado es uno de los factores del éxito o del fracaso del resolutor" (Mialaret, 1986, p. 67). Los enunciados, contextos y tipos de problemas siguen siendo en los materiales actuales muy tradicionales y alejados de las inquietudes y necesidades de la población escolar, la mayoría inciden en la repetición de situaciones explicadas para memorizar algoritmos y pocos donde se les planteen situaciones nuevas que tengan que investigar (Álvarez y Blanco, 2015).

La *falta de adaptación de los textos y materiales escolares a las reformas curriculares*, fue puesta de manifiesto en Dorfler y Mclone (1986), incidiendo en su importancia por cuanto determinan las matemáticas escolares por el uso y la dependencia que los profesores tienen de ellos para su actividad docente, y la falta de adaptación. Los libros de texto son mediadores entre el currículo y el aula y, en muchos casos, son el único nexo de unión entre estos (Álvarez y Blano, 2015). Anteriormente, Kline (1978) reprochó su la falta de calidad y de originalidad y la repetición de los mismos y la influencia del mercado y su distribución comercial en su contenido, estructura y difusión. Consecuentemente, la elaboración y revisión de los materiales escolares (en papel o digitales) y su adaptación a la nueva propuesta curricular debiera considerarse con rigor por las administraciones educativas. Sin esta revisión será difícil que el nuevo currículo se lleve a cabo con éxito.

Objetivos de la educación matemática

> No queremos ser solo matemáticos, queremos ser hombres
> (Markusievitch, 1978, p. 206).

En el periodo que nos ocupa hubo numerosos argumentos para justificar las Matemáticas como asignatura fundamental en el currículum escolar y "el convencimiento general de que todos los niños deben estudiar Matemáticas" (Cockroft, 1985, p. 1).

Se revisaron y establecieron los objetivos de su enseñanza asumiendo unas "Matemáticas para todos", entendiendo que aporta una herramienta conceptual necesaria para la participación activa e inteligente en la sociedad contemporánea (Krygowska, 1979). Se asumía que las matemáticas se construyen sobre conocimientos intuitivos y convenciones consensuadas, que no están fijadas para siempre, ya que son una actividad humana desarrollada a partir de experimentos, descubrimientos, conjeturas, y de múltiples problemas no resueltos.

Se consideraban las matemáticas "como un cuerpo utilitario de técnicas y habilidades, pensado y diseñado para satisfacer las necesidades sociales" (D'Ambrosio, 1979, p. 220), permitiendo profundizar en la interacción entre matemáticas y realidad en el doble sentido de resolver situaciones cotidianas con herramientas específicas y modelizar fenómenos sociales. Al mismo tiempo, se incidió en el desarrollo individual significando que la orientación "formativa debe tener prioridad frente a la utilitaria, ya que la mayoría de los alumnos elegirán profesiones desconectadas de la Matemática, pero todos, sin excepción, necesitarán muchas veces de su inteligencia" (Roanes, 1969, p. 14) pudiendo ser útiles para cualquier persona sinceramente interesada (Romberg, 1991).

Se consideraban tres ejes para definir los objetivos de la educación matemática: los aprendices y los procesos mentales que intervienen en el pensamiento matemático, el desarrollo de la propia matemática y, finalmente, suministrar un instrumento para aplicar en la realidad (Gattegno, 1965; Mialaret, 1986). Los objetivos se centraban en el desarrollo de la personalidad del individuo, en su relación con la sociedad y en la propia ciencia Matemática, y se expresaron en términos de conseguir conocimientos y habilidades, intra y extramatemáticas, y subrayando comportamientos sociales como la actitud crítica, la importancia de la comunicación y la participación en una obra colectiva. "Incluso al enseñar matemáticas se puede, por lo menos, tratar de dar a las personas el gusto de la libertad y de la crítica, y habituarlas a verse tratadas como seres humanos dotados de la facultad de comprender" (Godement, 1974, p. 21). Se sugirió un nuevo enfoque hacia la importancia del desarrollo del estudiante y de la actitud de este como eje del sistema educativo, ya que los objetivos señalaban directamente al proceder de los estudiantes.

Se quería superar una enseñanza generada de manera unidireccional del profesor al estudiante, en la idea de lograr un docente que ayude al estudiante a ser responsable de su aprendizaje, lo que implica que la educación matemática tiene que ir más allá de los aprendizajes de los contenidos. Asumiendo la individualidad del estudiante y la diversidad de las aulas, el aprendiz no puede considerarse un saco para llenar de conocimientos, sino que debe responsabilizarse y construir su propio aprendizaje, siendo ayudado por el profesor, en su papel del guía. Esto nos cuestiona, directamente, la cantidad y calidad de los conocimientos a considerar en el currículo.

Su formulación como habilidades básicas (de manipulación, de descubrimiento, de crítica y comunicación y coperación) estarían directamente relacionados con las competencias que se definen en el nuevo currículo. A modo de recordatorio, hacemos una síntesis de los objetivos, propuestos como habilidades, realizadas por la *Association des Professeurs de l'Enseignement Public,* (UNESCO, 1979) y por Mclone (1979), comentados en ambos casos en Dorfler y Mclone (1986) y reflejados en Romberg (1991).

Asumían la importancia de la formulación y resolución de problemas como el proceso básico en la E/A de las matemáticas y la construcción de modelos ante diferentes contextos, familiares y no familiares. A este respecto, señalaban, a modo de objetivos operativos, la importancia de usar herramientas matemáticas y de elegir estrategias adecuadas para analizar y resolver la situación a abordar, predecir resultados y generalizarlos, reconocer situaciones análogas y abstraer lo que tienen en común. Daban importancia a la reflexión durante todo este proceso, en el que la comunicación de ideas y resultados, de forma oral y escrita, era fundamental. Así, consideraban esencial hacerse entender por otros al traducir e interpretar resultados en formas no matemáticas, al utilizar y valorar diferentes sistemas de representación para organizar y comprender la información utilizada y al construir y exponer sus deducciones, simples o complejas. Se pretendía generar nuevo e integrado conocimiento matemático, entendiendo que las matemáticas son un poderoso medio de comunicación. Finalmente, incidían en la importancia de la educación matemática en el desarrollo personal y social al sugerir participar reflexivamente en el desarrollo de la sociedad como una obra colectiva, la cooperación en grupo o tener una actitud crítica, tanto para cuestionar los argumentos matemáticos, propios y ajenos, y los resultados y repercusiones del hacer matemático. Se asumía, en definitiva, que el saber hacer es más importante que el saber.

Paralelamente, se empieza a considerar que el profesor debe entrar en un proceso de actualización permanente que le permita reconsiderar los avances de la ciencia y de la matemática, y los avances sociales que repercuten directamente en las necesidades, cognitivas y afectivas, y los comportamientos de los estudiantes. Por ello, no es casual que en la década de los 80 tuvieran mucha difusión los trabajos de L. S. Shulman, R. Marks, entre otros, sobre el Pedagogical Content Knowledge para caracterizar el conocimiento y desarrollo profesional de los profesores, que han sido objeto de numerosas investigaciones en los grupos de investigación integrados en la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Construir el conocimiento matemático y esquemas de acción en el aula

> Somos conscientes de la existencia de profesores que desearían que les señalásemos el método más idóneo para enseñar matemáticas, pero esto no es posible ni deseable. … Debido a la diferencia de personalidad y circunstancias, métodos que pueden resultar eficientes con un profesor o grupo de alumnos, acaso no lo sean tanto en otros casos. Con todo, consideramos que hay ciertos elementos que deben estar presentes en la enseñanza acertada de las matemáticas.
>
> (Cockroft, 1985, p. 87)

En esa época se realizaron propuestas interesantes que, salvando el tiempo, siguen teniendo validez y debieran ser estudiadas en los centros de formación de los profesores. Eran esquemas de acción en las aulas en los que, básicamente, se asumía la epistemología genética y se criticaba el divorcio en la enseñanza tradicional del "proceso de génesis de los conocimientos y el proceso de transmisión de los mismos" (Puig Adam, 1960, p. 104), sugiriendo que el educando debe pasar "un proceso de formación de conceptos análogos al experimentado por la humanidad" (Puig Adam, 1960, p. 105). Se consideraba las Matemáticas como una ciencia que evoluciona constantemente, lo que no se reflejaba en los currículos de los primeros niveles de enseñanza (Mialaret, 1986). Empezaba a considerarse la didáctica de la matemática como arte, como ciencia y como técnica, que va más allá de la simple transmisión de conocimiento, para procurar una huella formativa en el educando, primando el acto de aprender sobre el acto de enseñar y poniendo al aprendiz en el centro de la enseñanza (Puig Adam, 1960).

El proceso de construcción del conocimiento se basaría en dos pilares importantes: la maduración del pensamiento en los estudiantes y la evolución de la propia matemática. P. Puig Adam lo explica muy acertadamente, señalando implícitamente diferentes tareas para la E/A.

> El hombre, en un principio impotente ante la inmensidad de las fuerzas naturales, y atónito ante la complejidad de los fenómenos que a su alrededor se desarrollaban, se limitó a observar y a retener, a comparar y a asociar. En cuanto pudo, experimentó por su cuenta, es decir, promovió fenómenos nuevos en condiciones favorables para su estudio. Coleccionó observaciones y experiencias, y, luego de ordenarlas por afinidades, indujo leyes comunes para fenómenos semejantes. Para descubrir tales semejanzas hubo de abstraer, es decir, hubo de prescindir de caracteres accesorios y atender a los esenciales en cada estudio, con lo cual esquematizó, reduciendo la complejidad de las cosas y fenómenos reales a la sencillez de unos entes de razón que los representaran y sobre los cuales pudieran discurrir cómodamente el razonamiento puro. De este razonamiento, ya en esencia matemática, sacó consecuencias que, proyectadas de nuevo en el campo de la realidad, le permitieron obtener nuevas leyes, esta vez no ya inducidas, sino deducidas de las anteriores; con ellas empezó a predecir resultados de experiencias no realizadas, pudo prevenir, precaverse, defenderse de las fuerzas naturales y conducirlas más tarde, para su provecho. Al hacer tales deducciones y predicciones, el hombre llegaba a la plenitud de su categoría racional; su razón, al convertirse de potencia en acción, le brindaba su primera conquista del mundo natural: el conocimiento científico.
>
> (Puig Adam, 1960, p. 31-32)

Más adelante, señalará que el origen de la matemática no escapa a este proceso genético que es tan experimental como pueda serlo cualquier ciencia.

Asumiendo esta aportación, tiene sentido la afirmación de Romberg (1991) que señala que "las matemáticas son un producto social" (p. 328), al considerar que han sido creadas por humanos a lo largo de la historia, como respuesta a los problemas sociales y contribuyendo al desarrollo de la sociedad. Al asumir que el aprendizaje va más allá de la simple recepción pasiva del conocimiento, la actividad docente priorizará el acto de aprender sobre el de enseñar, poniendo en centro de la enseñanza al alumno.

Ligado a las ideas anteriores algnos autores (Tabla 1) diseñaron acciones para las aulas que irían desde lo concreto a lo abstracto, asumiendo la importancia de la experimentación, observación y análisis y síntesis, así como del lenguaje (oral y gráfico, natural y simbólico) para las acciones físicas y las lógico-matemáticas, en un proceso inductivo/deductivo, donde lo primero predominará en la escuela.

Tabla 1. Algunas etapas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Zoltan Paul Dienes. Dienes (1970a; 1970b).	Describe seis etapas (Adaptación; Estructuración; Abstracción-Juegos de Isomorfismo; Representación gráfica o esquemática y Formalización) y cuatro principios (Dinámico, Constructividad, Variabilidad matemática y Concretización múltiple) que ayudarían a los alumnos en la comprensión de los conceptos matemáticos.
Gaston Mialaret. Mialaret (1986).	Señala seis etapas (Acción real con recuperación; Acción acompañada de lenguaje; Conducta del relato; Acción con objetos simples; Traducción gráfica y Traduccción simbólica).
Dina y Pierre Van Hiele. (Crowley, 1987).	Centrados en la geometría describieron cinco niveles de conocimiento (Reconocimiento o visualización; Análisis; Clasificación o Deducción informal u orden; Deducción y Rigor) y cinco fases de aprendizaje a considerar en cualquiera de los niveles: Discernimiento o información; Orientación Dirigida; Explicitación; Orientación libre e integración.
Guy Brousseau. Brousseau (1997).	Se centra en el contrato didáctico, la noción de obstáculo epistemológico y la teoría de las situaciones didácticas (Situación de acción, de formulación y de validación).

El punto de partida para el aprendizaje será el juego, la acción y el reconocimiento, dando mucha importancia a la relación entre la acción y el lenguaje, ya que la formulación y representación son importantes en la construcción progresiva del conocimiento. "El niño no inventa el edificio matemático, pero lo descubre progresivamente y las diferentes partes elaboradas se estructuran, se reestructuran, en función de los conocimientos ya adquiridos" (Mialaret, 1986, p. 20). Los símbolos y representaciones suministran una materialización sencilla del concepto y, junto con la experiencia en las tareas, le lleva a hacerse una imagen mental que ayudará al aprendizaje y, en algunos casos, la dificultará, y por ello será necesario su consideración en el proceso de E/A. Los trabajos de D. Tall y S. Vinner (Tall y Vinner, 1981) profundizaron sobre la importancia de la imagen del concepto (representaciones internas y externas) e influenciaron numerosas investigaciones, pero no tanto los trabajos en el aula y los libros de texto.

Partir de la experiencia y acción tendrá como consecuencia inmediata la generación de recursos didácticos, muchos de los cuales son valorados por profesores actuales cuando acceden a ellos (Figura 1). A través de los materiales, el aprendiz inspecciona, descubre, construye, genera imágenes y establece semejanzas y variaciones de las situaciones, etc. lo que sugiere un proceso de aprendizaje que su mente debe controlar.

Tabla 2. Recursos didácticos para la enseñanza de las matemáticas

Bloques lógicos.	Khote, 1978.
Bloques multibases.	Dienes, 1971a.
Geoplano de C. Gattegno	
Regletas de G. Cuisenaire o números en color de G. Cuisenaire y C. Gattegno.	Gategno, 1962; 1965.
Plaquetas de Herbinière Leber.	Mialaret, 1967.
Varillas engarzadas y articuladas y Algoritmo manipulativo para la raíz cuadrada.	Puig Adam, 1960.
Mecanos.	Biguenet, 1967.
Plegado de papel.	Johnson y Wenninger, 1975.
Recta y Franja numérica; Tarjetas plegables para combinaciones básicas; Cartel numérico del 100	Escalona y Noriega, 1974.

Se asumía que la manipulación era un primer paso motivador para estimular la acción mental de los aprendices sobre los objetos y con los objetos. Después de estas actividades y experiencias manipulativas deberán introducirse de manera progresiva, otros recursos que faciliten la entrada en la abstracción matemática. A este respecto, es interesante observar la validez de estas propuestas en la enseñanza actual (Alsina, 2004).

Aunque, actualmente, lo virtual predomina sobre lo material, reivindicamos los dos caminos (manipulativo y virtual) en la E/A de las matemáticas, pero advirtiendo que la secuencia de aprendizaje es diferente en cada caso. También, la experimentación y análisis de estos materiales debería formar parte de los cursos de formación, inicial y permanente, de profesores de matemáticas.

La resolución de problemas en el currículo

> Hay quien se pregunta si la parte principal del estudio matemático no debe ser la solución del problema en lugar del estudio del libro de texto. Hacer de los problemas un suplemento indica un fallo en la verdadera función del trabajo matemático. Si concedemos que el 'poder' y no el 'saber', el 'pensar' y no el 'memorizar' son los aspectos beneficiosos de la matemática, la importancia de los problemas es indudable.
> (Royo, 1953, 253)

En las propuestas anteriores subyacía la idea de que las matemáticas se han construido a partir de la resolución de problemas concretos que surgían de necesidades de la sociedad y se abordaban con las herramientas matemáticas que se iban conociendo. Así, es fácil entender que algunos autores trasladaran esta idea al ámbito curricular para facilitar la construcción del conocimiento en los estudiantes, asumiendo que la resolución de problemas debía ser el contexto para la E/A de las matemáticas, lo que se plasmará en algunas directrices a partir de los 80 (NCTM, 1980) y cuyo desarrollo ha sido objeto de múltiples aportaciones y reflexiones.

Asumir la resolución de problemas como actividad esencial en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas implica relacionar los aspectos esenciales de la naturaleza de la disciplina y de sus aplicaciones. Debería, para ello, favorecerse la realización de experiencias de trabajo escolar para que los estudiantes llegaran a dominar conceptos y procesos que se reflejan en distintas situaciones matematizables, para que pudieran ser capaces de pensar matemáticamente, aplicando sus conocimientos matemáticos a otras disciplinas y realidades, sociales y personales. Al mismo tiempo, se señalaban tres perspectivas necesarias y complementarias para la resolución de problemas: como vía para la E/A, como un contenido específico y como aplicación a la realidad. Eran muchas las dificultades para trasladar esta propuesta a la práctica docente y, además, la falta de documentos concretos para facilitar la propuesta sobre la resolución de problemas dificultaba su implementación en el aula (Putnam et al., 1990). Así, por ejemplo, se señalaba la diversidad de significado del vocablo ‘problema’ y la expresión ‘resolución de problemas’, tanto en los diferentes textos escolares como en las concepciones y creencias de los profesores. Era evidente que traducir esta propuesta de acción en el aula a las clases prácticas no iba a ser fácil, y a menudo causa de ansiedad tanto a los estudiantes como a los profesores (NCTM, 1980). Las investigaciones actuales muestran que aún persisten numerosas dudas, preocupaciones y resistencia para desarrollar esta recomendación curricular.

En el XII Simposio de la SEIEM (2008) se analizó el desarrollo de la resolución de problemas en los últimos 30 años, mostrando que su presencia e importancia, como contenido y como metodología, se había mantenido y acrecentado en las propuestas curriculares, tanto nacionales como internacionales, pero ello no acababa de reflejarse de manera clara en la práctica docente. Informes recientes de evaluaciones periódicas desarrollados por diferentes instituciones internacionales muestran, reiteradamente, los pobres resultados obtenidos en Matemáticas e inciden en poner de manifiesto la importancia de la resolución de problemas de matemáticas en la enseñanza obligatoria. A pesar del camino recorrido y de la importancia que se le da a la RP en el nuevo currículo debiéramos insistir en la formación y desarrollo profesional del profesorado considerando diferentes variables que influyen en su implementación (Blanco et al., 2015).

Sobre los currículos de matemáticas en este periodo

Obviamente, en los 60 y 70 se modificaron los currículos. Romberg (1991) realizó una crítica oportuna al currículo anglosajón, válida en nuestro entorno, señalando que la limitación del contenido de las matemáticas escolares originó que la administración educativa hiciera una clasificación jerárquica del conocimiento matemático, fragmentando y secuenciando las ideas matemáticas, con el objetivo de que los estudiantes dominaran secuencialmente uno tras otros diferentes conceptos o procedimientos. Señaló que las matemáticas

> Se segmentaron en materias y temas y finalmente en sus componentes mínimos (objetivos procedimentales). Se estableció una jerarquía para demostrar cómo se relacionaban estos objetivos para crear finalmente un producto acabado. Se mecanizaron los pasos que se daban en este proceso mediante libros de texto, hojas de ejercicios y pruebas. Además, se deshumanizó la enseñanza hasta el punto de que el profesor poco tenía que hacer excepto dirigir la cadena de producción.
>
> (Romberg, 1991, 361)

Ello provocó una división de las matemáticas en múltiples compartimentos estancos que se enseñan independientemente de los demás, lo que llevó a un orden parcial de la disciplina, perdiendo el carácter global de la materia.

El currículo presentaba las matemáticas escolares como un sistema unificado y cerrado que contiene un producto ya desarrollado y elaborado. En este marco, tenía plenamente sentido una concepción conductista de la enseñanza, en la que el papel del profesor es el de transmisor del conocimiento ('yo doy matemáticas'), que el estudiante recibirá y mostrará cuando se lo piden en los exámenes, (aunque digamos evaluación). El papel de los estudiantes será a menudo rutinario y pasivo, permitiéndole continuar su progresión, y a la administración mantener el sistema. Esta perspectiva obvia la recomentación de que "conocer matemáticas es hacer matemáticas" (Putnam et al., 1990, p. 62).

Gaulin et al. (1992) analizaron los currículos iberoamericanos del último tercio del siglo XX de los que decían que no recogían los aspectos socioculturales, psicopedagógicos y epistemológicos que deben condicionar y fundamentar la enseñanza/aprendizaje, por lo que recomendaron su revisión. Percibían una visión excesivamente cerrada y fija de la matemática, basada en la estructuración y en la organización lógico-deductiva que hizo de esta ciencia la llamada matemática moderna, y no como un proceso en el que los sujetos van construyendo el sentido y el significado de sus propios aprendizajes, a la vez que adquieren estrategias de pensamiento cuyo alcance va más allá de los conceptos o de los procedimientos asimilados. Los autores, consideraban simplista la concepción de la E/A basada en la transmisión de conocimientos descontextualizados, deductivamente ordenados y desconectados de su evolución histórica, y que el estudiante aprende mediante una práctica rutinaria y memorística.

Es interesante recordar, por la relación que pudiera tener con el uso de los sentidos matemáticos en el currículo actual, la aportación de Guzmán (1992) en relación con la complejidad de la actividad matemática proveniente del uso numérico y del espacio, así como la necesidad de enfrentar la complejidad del símbolo (álgebra), la complejidad del cambio y de la causalidad determinística (cálculo), la complejidad proveniente de la incertidumbre en la causalidad múltiple incontrolable (probabilidad y estadística) y la complejidad de la estructura formal del pensamiento (lógica matemática).

A modo de epílogo

A finales del siglo XX muchas de las ideas renovadoras se plasmaron en currículos en numerosos países. También en España la Ley General del Sistema Educativo (LOGSE) supuso un cambio en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y sus ideas básicas siguen teniendo significado actualmente, pero ello no es objeto de este capítulo.

La revisión anterior nos sugiere, en primer lugar, que la acción docente debe contemplar, simultáneamente, el desarrollo de los términos 'educación' y 'matemáticas', que al igual que los vocablos enseñanza y aprendizaje son diferentes, pero complementarios e interaccionan entre sí. Dado el significado de educar como preparación para la vidad, el resultado de la unión de ambos vocablos vendrá condicionado por el tipo de ciudadano que queremos preparar, por la sociedad que deseamos construir y, también, por la concepción que tengamos sobre la naturaleza y el uso de las matemáticas. Las matemáticas son una herramienta creada por hombres y mujeres que debe ser utilizada para comprender y mejorar el mundo, como nos muestra el sentido de evolución y de interacción con la sociedad que el conocimiento matemático ha tenido desde su origen. La educación - matemática no puede ser neutral a los valores que deben prevalecer en nuestra sociedad como son la participación en la vida social, cultural, política o económica, la capacidad de decisión de crítica, la creatividad, la coeducación y la solidaridad. En definitiva, al desarrollo integral de todos los ciudadanos independientemente de su nivel social, raza, religión sexo o cualquier otra circunstancia personal o social.

No debemos olvidar que como educadores nuestra misión es preparar a los escolares para adaptarse e intervenir en la sociedad del siglo XXI, para desenvolverse con comodidad y eficacia en el entorno con el que se van a encontrar al terminar el período escolar. A este respecto, es necesario entender que los actuales estudiantes de educación obligatoria alcanzarán la madurez más allá del 2040, y a partir de esa fecha será cuando tengan que utilizar sus conocimientos, habilidades y competencias adquiridas en el periodo escolar, como ciudadanos activos en la segunda mitad del siglo XXI. Siguen siendo válida las palabras de L. A. Santaló en el I Congreso Iberoamericano de Educación Matemática en 1984.

> La misión de los educadores es preparar a las nuevas generaciones para el mundo que tendrán que vivir. Impartir las enseñanzas necesarias para que adquieran las destrezas y habilidades que van a necesitar para desenvolverse con comodidad y eficiencia en el seno de la sociedad con que se van a encontrar al terminar el periodo escolar.

Referencias

Aleksandrov, A.D. (1973). Visión general de la Matemática. En A. D. Aleksandrov; A. N. Kolmogorv; M. A. Laurentie, *La Matemática: su contenido, método y significado*. Alianza.

Alsina, A. (2004). *Desarrollo de competencias matemáticas con recursos lúdicos-manipulativos para niños y niñas de 6 a 12 años.* Narcea.

Álvarez, R. y Blanco, L.J. (2015). Evaluación en Matemáticas: Introducción al Álgebra y Ecuaciones en 1º ESO. *Revista Unión 42,* 133-149.

Barrantes, M. y Blanco, L, J. (2006) A study of prospective primary teachers' conceptions of teaching and learning school geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education 9, (5).* 411-436

Biguenet, A. (1967). Modelos animados para la enseñanza de la geometría. En Gattegno, C. et al. *El material para la enseñanza de las Matemáticas.* Aguilar. 147-165.

Blanco, L.J.; Cárdenas, J.A. y Caballero, A. (2015). *La resolución de problemas de Matemáticas en la Formación Inicial de profesores de primaria.* Serv. Publ. UEx.

Bombal, F. (2011). Nicolás Bourbaki: El matemático que nunca existió. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales Vol. 105, nº 1,* p. 77 – 98.

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las Matemáticas.* Alianza Editorial.

Brousseau, G. (1997). Theory of Didactical Situations in Mathematics. Kluwer Academic Publishers.

Castelnuovo, E. (1999). La matemática escolar en este siglo. Marín, F. y Ramellini, G. (2004). *Ideas de emmatemática Castelnuovo*. Monografía 01 SUMA. FESPM. 51-60.

Cockroft, W. H. (1985). *Las Matemáticas sí cuentan. Informe Cockroft.* M.E.C.

Crowley, M. L. (1987). The Van Hiele Model of the Development of Geometric Thoght. En M. M. Lindquist. y A. P. Shulte, (eds.). *Learning and Teaching Geometry, K-12. Yearbook-1987.* NCTM. 1-16.

D'Ambrosio, U. (1979). Metas y objetivos generales de la educación matemática *Nuevas tendencias en la enseñanza de la Matemática*. UNESCO. 205-226.

Dienes, Z.P. (1970). *La construcción de las matemáticas.* Ed. Teide.

Dienes, Z.P. (1971a). *Cómo utilizar los bloques multibase*. Teide.

Dienes, Z.P. (1971b). *Las seis etapas en el aprendizaje de las Matemáticas*. Ed. Teide.

Dorfler, W. y Mclone, R. R. (1986). Mathematics as a school subject. En B. Christiansen, A. G. Howson y M. Otte, *Perspectives on Mathematics education* Reidel Pub. Co. 49-97.

Escalona, F. y Noriega, M. (1974). *Didáctica de las Matemáticas en la escuela primaria 1*. Kapelusz.

Gattegno, C. (1962). *Elementos de matemática moderna con los números en color. Manual para el Maestro.* Cuisenaire de España.

Gattegno, C. (1965). La pedagogía de las matemáticas. En J. Piaget. *La enseñanza de las Matemáticas.* Aguilar. 133-181.

Gaulin, C; Guzmán, M.; Lluis, E. y Oteiza, F. (1992). *Análisis comparado del currículo: Matemáticas en Iberoamérica.* Mare Nostrun Ediciones.

Godement, R. (1974). Curso de Álgebra. Tecnos.

Guzmán, M. (1992). *Tendencias innovadoras en educación matemática*. Olimpiada Matemática Argentina, Buenos Aires.

Hernández, J. (1978). *La enseñanza de las Matemáticas modernas*. Alianza Universidad.

Hidalgo, S., Maroto, A., Ortega, T y Palacios, A. (2013). Influencia del dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas Mellado, V; Blanco, L.J.; Borrachero, A.B. y Cárdenas, J.A. (Eds.): *Las Emociones en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Ciencias Experimentales y las Matemáticas*. DEPROFE. Vol.1. 217-242.

Johnson, D. A. y Wenninger, M. J, (1975). *Matemáticas más fáciles con manualidades de Papel.* Ediciones Distein.

Khote, S. (1978). *Cómo tulilizar los bloques lógicos de Dienes.* Teide.

Kline, M. (1978). *El fracaso de la Matemática moderna*. Siglo XXI.

Krygowska, A.(1979). Educación matemática en el primer ciclo de la enseñanza post-elemental y secundaria. En ICMI. *Nuevas tendencias en la enseñanza de las Matemáticas.* UNESCO. 29-49.

Malaty, G. (1988). What is wrong with the 'back to basics' movements, and what is wrong with the 'new math' movement. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology Vol.19, (1)*. 57-65.

Markusievitch, A. (1978). Algunos problemas de la enseñanza de las Matemáticas en la escuela. En J. Hernandez, *La enseñanza de las Matemáticas modernas.* Alianza. 196-207.

Mclone, R.R. (1979). Teaching mathematical modeling. *Bulletin of the Institute of Mathematics and its applications 15*. 244-246.

Mialaret, G. (1967). *Pedagogía de la iniciación al cálculo*. Kapelusz.

Mialaret, G. (1986). *Las Matemáticas. Cómo se aprenden, cómo se enseñan*. Visor. 2da. Ed.

National Council of Teacher of Mathematics (1980). *Problem solving in school mathematics. 1980 Yearbook*. The Council.

Newman, J. (1963). *Sigma. El mundo de las Matemáticas.* Grijalbo.

Piaget, J. (1965). *La enseñanza de las Matemáticas*. Aguilar,

Piaget, J. (1978). La iniciación matemática. Las Matemáticas modernas y la psicología del niño. En J. Hernandez, *La enseñanza de las matermáticas modernas*. Alianza Universidad. 182-187.

Poincaré, H. (1963). *Ciencia y Método.* Madrid. Espasa Calpe (Austral).

Puig Adam, P, (1960). *La matemática y su enseñanza actual.* Ministerio de Educación Nacional. Madrid.

Putnam, R.T., Lampert, M. y Peterson, P. L. (1990). Alternative perspectives on knowing Mathematics in elementary schools. En C. B. Cazden, *Review of research in education, 16. AERA*. 57-150.

Roanes, E. (1969). *Didáctica de las Matemáticas I.* Anaya.
Romberg, T.A. (1991). Características problemáticas del currículo escolar de Matemáticas. *Revista de Educación, nº 294.* MEC. 323-406
Royo, J. (1953). Los problemas de Matemáticas en la escuela. *Bordón 35,* 247-255.
Schoenfeld, A.H. (1985). Ideas y tendencias en la resolución de problemas". MEC. *La enseñanza de la Matemática a debate*. MEC. 25-30.
SEIEM, (2008). *Actas del XII Simposio de la SEIEM, XISIEM y XVIII EIEM.* 93-111. SEIEM.
Stone, M. (1978). La revolución en las matemáticas. En J. Hernández. *La enseñanza de las Matemáticas modernas.* Alianza Universidad. 73-98.
Tall, D. y Vinner, S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
Thom, R. (1978). ¿Son las Matemáticas modernas un error pedagógico? En J. Hernández, *La enseñanza de las Matemáticas modernas*. Alianza Universidad. 115-130.
UNESCO (1979). *Nuevas tendencias en la enseñanza de las Matemáticas* ICMI. UNESCO.https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000136589/PDF/136589spao.pdf.multi

Consideraciones acerca de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas

Considerations about the teaching and learning of mathematics

Montes, M., Codes, M. y Contreras, L.C.
Centro de Investigación COIDESO, Universidad de Huelva

Resumen

En este capítulo presentamos una perspectiva fundamentada desde la que entendemos que se debería interpretar una nueva propuesta curricular de las matemáticas de la enseñanza obligatoria. Muchas de las ideas que exponemos aquí no son nuevas; años de reformas curriculares y la propia investigación en educación matemática han puesto de relieve muchas de ellas, en muchos casos recogidas en las propuestas oficiales, pero la realidad de las aulas no permite verlas convertidas en acción. En el capítulo volvemos a ponerlas sobre la mesa, justificamos su necesidad, e intentamos reflexionar sobre los elementos que dificultan su puesta en marcha focalizando el papel de sus mediadores principales. Las peguntas clave que guían nuestra reflexión son qué deberían ser las matemáticas escolares y por qué hemos de enseñar matemáticas.

Palabras Clave: Currículo, Orientación de matemáticas escolares, Práctica matemática, Cambios en el paradigma dominante.

Abstract

In this chapter we present an informed perspective from which we understand that a new curricular proposal for mathematics in compulsory education should be interpreted. Many of the ideas we present here are not new; Years of curricular reforms and research in mathematics education itself have highlighted many of them, in many cases included in official proposals, but the reality of the classroom does not allow them to be turned into action. In the chapter we put them back on the table, we justify their need, and we try to reflect on the elements that hinder their implementation, focusing on the role of their main mediators. The key questions that guide our reflection are what school mathematics should be and why we should teach mathematics.

Keywords: Syllabus, Orientation of school mathematics, Mathematical practice, Change in the dominant paradigm.

Introducción

En un libro en el que se aborda de forma extensa el currículo y sus concreciones en cada uno de los niveles educativos de la enseñanza no universitaria, parece adecuado mostrar al lector la perspectiva general de lo que entendemos por enseñar y aprender matemáticas, sin entrar en detalle en los contenidos específicos que formarán parte de esa enseñanza y aprendizaje. Este es el lugar para abordar los elementos atemporales de los estándares curriculares, aquellos que se mantienen permanentes frente a los profundos cambios que la sociedad va teniendo a lo largo del tiempo. Nos situamos ante un momento en el que el acceso a la información por parte de los estudiantes es más fácil que nunca, en el que es más importante discriminar que almacenar, más útil disponer de estrategias de pensamiento flexible que estrategias mecánicas y rutinarias (Levy y Murnane, 2012); una era en la que los medios tecnológicos están al alcance de todos y se hace necesario utilizarlos en la formación. Siempre ha sido más necesario formar para adaptarse a situaciones nuevas, que focalizar la formación en lo contingente y coyuntural, y ese será el enfoque de este capítulo.

Trataremos de reflexionar acerca de lo que se ha denominado la agenda de la educación matemática a lo largo de la vida, en la que el pensamiento crítico[1], la capacidad de plantear y resolver problemas, las estrategias de trabajo colaborativo y la capacidad de comunicación ocupan un lugar prominente (Gravemeijer et al., 2017). Naturalmente, esta reflexión pasa por tener en cuenta no solo el *qué* es necesario aprender, sino también y principalmente *cómo* debe abordarse ese aprendizaje (Wagner, 2014). La propia naturaleza que tienen las matemáticas escolares depende de las opciones que toma el profesorado acerca de qué y cómo deben enseñarse, de cómo secuenciar los contenidos y de cómo evaluarlos (Ernest, 2000). Por ello, el papel del profesorado, como uno de los mediadores esenciales en el aprendizaje, debe formar parte de nuestra reflexión. En este sentido, parece razonable pensar en aulas como espacios de trabajo de diferentes características a lo que hoy es usual, otorgando importancia a las estrategias personales de cálculo, contextualizando el contenido en problemas realistas relacionados con la biología, la física o la ingeniería (Mills, 2012).

Por ello, este capítulo abordará aspectos generales de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde una perspectiva del momento que nos ocupa. No entraremos en detalle en los contenidos específicos del currículo, pero sí en los elementos que, desde nuestra perspectiva, caracterizan lo que significa construir matemáticas. Y lo haremos comenzando con una reflexión retrospectiva de otros momentos en los que la educación matemática se ha planteado estas mismas cuestiones. Ello nos llevará a plantear qué son o qué deberían ser las matemáticas escolares y, unido a ello, argumentaremos después razones para la presencia de las matemáticas en la enseñanza

1. Hoyles et al. (2013) muestran cómo las enfermeras son más eficientes cuando usan estrategias personales, que lo aprendido en razonamiento proporcional, cuando ajustan una dosis de medicamento.

obligatoria. Trataremos después el papel de los mediadores en el aprendizaje, los vehículos entre lo pretendido y lo que se hará en las aulas, y cerraremos con unas reflexiones finales que recogen nuestras inquietudes ante este reto.

Por qué nos volvemos a preguntar sobre esto cada cierto tiempo

No es la primera vez que nos encontramos con un escenario internacional en el que se reflexiona acerca de lo que debe constituir el contenido matemático a desarrollar en las aulas de la educación obligatoria. Desde hace décadas, y de forma cíclica, este planteamiento ocupa el trabajo de docentes, investigadores y responsables políticos de distintos países, casi siempre provocado por lo que se ha venido en llamar "fracaso escolar" en matemáticas. Es bastante improbable que esto ocurriera si la mayoría de los estudiantes, de la mayoría de los países, mostrara un alto rendimiento académico en nuestra materia. Afortunadamente, cada período de catarsis ha venido acompañado de sustanciosos progresos que han emergido desde el ámbito académico. Por citar uno, particularmente relevante, recordemos las aportaciones de la investigación en resolución de problemas desde mediados del siglo pasado.

Casi siempre, los estándares curriculares han recogido esas aportaciones académicas, sin embargo, los argumentos que sustentan el comienzo de cada uno de estos ciclos parecen ser los mismos. Así, siguiendo con el ejemplo de la resolución de problemas, de forma periódica volvemos a encontrar argumentos que ponen de relieve que las recomendaciones de su uso no se han convertido en una realidad en las aulas. Podríamos indagar si las razones de que eso haya sido así se deben a la forma piramidal que sustenta la aplicación de cada reforma curricular, a la ausencia o insuficiencia de la implicación de las reformas en la formación y desarrollo profesional de los y las docentes o a otros motivos. Sin embargo, la reflexión que guiará este capítulo no pondrá el énfasis en esos aspectos y sí lo hará, empero, sobre la propia filosofía, estructura y organización de lo que supone el contenido matemático escolar.

Por ejemplo, nos quejamos de que la matemática escolar se presenta como algo terminado, desde una perspectiva fundamentada en el contexto de justificación, en el más puro estilo platónico, difícilmente compatible con el contexto de descubrimiento (que defendiera Reichenbach, 1938), de corte más aristotélico, y que podría decirse que sustenta la resolución de problemas o el aprendizaje por investigación. Y es en realidad su bella estructura la que domina una organización curricular sustentada en temas o tópicos, en bloques de contenido, que proporcionan una visión de compartimentos estancos a cualquiera que no posea una visión integrada de lo que supone, de hecho, la rica red de relaciones que da consistencia a las matemáticas como ciencia. Y esa visión parcelada, algunas propuestas curriculares han pretendido superarla con llamadas a que los bloques de contenido no son un temario, sino más bien algo que admite transversalidad, pretensiones claramente insuficientes.

¿Y si el problema radicara justamente en esto? ¿Son las matemáticas esos bloques de contenido? ¿Dónde quedan el planteamiento y resolución de problemas, la formulación de conjeturas, la validación, la generalización, la modelización, entre otras capacidades netamente matemáticas? ¿Tienen los contenidos un fin en sí mismos o pueden servir de vehículo para lo anterior? ¿Se soluciona el dilema considerando declarativamente esos aspectos como transversales o caracterizadores de la metodología, o deben ser realmente los organizadores del currículo?

Un cambio en la visión de la matemática escolar

Las matemáticas, más allá de un conjunto estructurado de elementos, reglas, propiedades y procedimientos, son (o al menos deberían ser consideradas como) un derecho de nacimiento para todos los seres humanos, con independencia de su género, etnia, grupo social, o estatus socioeconómico, de la misma forma que lo es el lenguaje. Esta visión es compartida con el informe del CEMat (2021), que plantea que las matemáticas son una actividad humana, indispensable para la sociedad, lo que implica que toda la ciudadanía tiene el derecho de acceder a ella. Actualmente, las matemáticas tienen una función de filtro social, dado que discriminan, en muchos casos, a los niños a los que se hace sentir que tienen menos capacidad, abocándolos a evitarlas. Una implicación inmediata de esta segregación es que los estudiantes pierden el acceso a estudios que desembocan en profesiones bien remuneradas (e.g. ingenierías). Además, las matemáticas permiten mirar el mundo con sentido, y negar esta mirada a ciertos colectivos de estudiantes supone imponer una limitación a su desarrollo como ciudadanos: ¿quién no ha oído alguna vez a una persona ya adulta decir algo similar a "yo estos números no los entiendo, soy de letras"?

Esto sucede, en muchos casos, debido a que se da al alumnado el papel de sujeto pasivo en la construcción de conocimiento matemático, debiendo replicar aquello que sus docentes hacen, y no permitiéndoles empoderarse como sujetos matemáticamente activos. De esta forma, y dado el énfasis profundamente procedimental que suele darse a las matemáticas, se les limita la capacidad de crítica, discusión y ulterior reconstrucción del propio conocimiento matemático. En este sentido, aunque el propio currículo español (al igual que la mayoría de los estándares curriculares) establece que la enseñanza de las matemáticas debe realizarse *a través* de la resolución de problemas, es habitual que esto se interprete como que en las asignaturas de matemáticas debe enseñarse *a* resolver problemas. Asimismo, dado el amplio uso que se hace de los libros de texto (en muchos casos como único material curricular), cabe plantearse qué problemas proponen estos que resuelvan los y las aprendices. Diversas investigaciones (e.g. Jäder et al., 2020) muestran que existe una escasa variabilidad en los problemas que proponen los libros, por lo que, en cierto modo, el objetivo de la escolarización, respecto de los problemas, acaba convirtiéndose en saber resolver determinados tipos de problemas, con una estructura determinada (los comúnmente llamados "problemas tipo").

Así, emergen de forma recurrente cuestiones como qué contenidos deben priorizarse, o la habitual dicotomía entre poner el énfasis en lo procedimental, o en lo conceptual. Estas discusiones redundan, como hemos señalado, en una visión de las matemáticas centrada en contenidos matemáticos tratados como compartimentos estancos, frente a visiones que la tratan como una red estructurada de conceptos. Sin embargo, consideramos que este tipo de visión sobre la matemática escolar debe trascender, de forma que pasemos de una visión centrada en los temas o su organización, a fijarnos en la actividad matemática como centro de atención en la organización del currículo, asumiendo la existencia de elementos profundamente interrelacionados dentro de esa actividad, incluyendo aspectos locales, estructurales, y sintácticos, así como otros con una naturaleza transversal a la actividad matemática escolar. En este sentido, Kilpatrick et al. (2001) proponen una visión de la matemática escolar, centrada en primaria, pero extensible a cualquier nivel de educación obligatoria, que trasciende la polarización sobre un elemento concreto propio de la actividad matemática. Desde esta perspectiva, el desarrollo de habilidades matemáticas implica cinco componentes interrelacionadas e interdependientes: Entendimiento conceptual, asociada a la comprensión de conceptos matemáticos, operaciones, y relaciones entre los anteriores; Fluidez Procedimental, centrada en la habilidad para desarrollar procedimientos de forma precisa, eficiente, apropiada y flexible; Competencia Estratégica, entendida como la habilidad para formular, representar y resolver problemas matemáticos; Razonamiento adaptativo, esto es, la capacidad de pensamiento lógico, reflexión, explicación, y justificación, y; Disposición Productiva, que consiste en la inclinación hacia percibir las matemáticas como sensible, útil y valiosa, que lleva aparejada la autopercepción sobre las propias capacidades, así como la gestión de emociones. Estas cinco componentes deben ser atendidas y desarrolladas sin privilegiar una sobre otra, dado que un menor desarrollo de cualquiera de ellas generaría un alumnado matemáticamente disfuncional. Sin embargo, la habitual dicotomía en el discurso sobre la matemática escolar se centra en los dos primeros, dado que suelen ser los elementos más explícitos en el quehacer matemático que se invita a desarrollar a los estudiantes.

Desde nuestra perspectiva, y coincidiendo con Noss (1989), lo que tiene mayor impacto en el aprendizaje es la forma en la que se pretende que aprendan, y no lo que se pretenden que aprendan. Esta “forma” incluye tanto aspectos vinculados a cómo el profesorado gestiona el discurrir de la sesión, que son los que vienen dados por las orientaciones curriculares, como elementos matemáticos que estructuran la orientación de la actividad matemática del aula, que son los que habitualmente se relacionan con el contenido curricular. Así, proponemos un enfoque del currículo no reproductivo, sino centrado en la creación de matemáticas (Ernest, 1991), que múltiples resultados de la investigación demuestran que promueve un pensamiento no sólo más complejo (Schoenfeld, 1985; Silver, 1994; Lehrer y Schauble, 2000; Bills et al., 2006; Mariotti et al., 2018; Hanna, 2020), sino también más adaptado a las características del aprendiz (e.g. en dinámicas de formulación de problemas matemáticos). Este tipo de enfoque no sólo permite que el profesorado promueva una participación activa de los estudiantes en las sesiones, sino que, además, la participación de los estudiantes se torna en matemáticamente activa, permitiéndoles por tanto empoderarse matemáticamente, es decir, ganar poder en el dominio del lenguaje matemático, de los conceptos y estructuras conceptuales disciplinares, así como de las habilidades y prácticas propias de las matemáticas (Ernest, 2002).

Por tanto, proponemos organizar el currículo no en función de los clásicos bloques de contenido, que acaban tratándose como estancos en la práctica escolar, sino en función de las destrezas transversales que permiten construir y crear matemáticas, desde una perspectiva crítica y accesible para todos los aprendices. Esta propuesta refleja una concepción dual de las matemáticas, siendo tanto como conjunto estructurado de elementos, reglas, propiedades y procedimientos, como una serie de prácticas matemáticas a desarrollar por parte de los estudiantes. Estas prácticas abarcan, entre otras, la *resolución de problemas*, la *formulación de problemas*, la *ejemplificación*, la validación y la refutación como forma de *demostración* y *argumentación*, la *modelización*, la *generalización*, o la *comunicación matemática*. Todas ellas son transversales a los bloques de contenido, e implican destrezas a ser desarrolladas por parte del estudiantado, así como orientaciones metodológicas a ser seguidas por el profesorado.

El ser humano se desarrolla, tanto a nivel individual como a nivel colectivo, formulando y resolviendo problemas adaptados a su interacción con la sociedad y el entorno. En particular, la resolución de problemas matemáticos es, desde hace más de treinta años, un eje vertebrador de los documentos curriculares tanto españoles como internacionales, como ya hemos señalado. Cualquier problema, independientemente de si es escolar o no, y si lo fuera, de forma independiente del contenido o contenidos a los que pueda estar vinculado, requiere de transitar, y no de forma necesariamente lineal, por las fases propuestas por Polya (1945): comprender el problema, desarrollar planes para dar respuesta al requerimiento que este plantee, ejecutar dichos planes, y revisar la resolución, tanto para buscar soluciones por otros caminos, como para buscar extensiones del problema. Asimismo, en los últimos años se ha dado valor a una quinta fase de revisión metacognitiva, centrada en que el resolutor se autoevalúe en su gestión de la resolución a nivel emocional (Caballero, 2013). Así, aprender resolviendo problemas contribuye al desarrollo, por parte de los estudiantes, tanto de habilidades matemáticas, como de una actitud ante el desafío que propone un problema. Asimismo, resolver problemas implica movilizar el conocimiento que se posee y (re)organizarlo para enfrentarse a una situación nueva, lo cual implica desarrollar las propias capacidades matemáticas. Por otra parte, formular problemas supone una actividad genuinamente matemática, que exige al formulador articular la información que se proporciona, un contexto que tenga sentido y una demanda o requerimiento, habitualmente en forma de pregunta, todo ello en el seno de un determinado entorno matemático que dará sentido a la resolución. Esta actividad, si bien es cognitivamente compleja (Silver, 1994), promueve el aprendizaje de las matemáticas de forma integral, abarcando aspectos conceptuales, procedimentales, y dotando al aprendiz de un papel matemáticamente activo.

La *ejemplificación*, por su parte, es una actividad humana esencial. Nos comunicamos esencialmente usando ejemplos. En los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, esta actividad ha de ocupar un papel relevante. Los conceptos y procesos matemáticos adquieren poder en la medida que son dotados de significados ricos y esa riqueza puede vincularse a los espacios de ejemplos que se construyan en torno a esos conceptos y procedimientos. Hay dos aspectos básicos a considerar en el ámbito de la ejemplificación: la transparencia y la variación. Los espacios de ejemplos que han de construir los estudiantes han de contemplar todas las dimensiones de variación de un concepto o procedimiento y, para ello, es preciso que cada una de las dimensiones se muestre, frente a las demás, de forma transparente. Imaginemos que queremos que un estudiante de Primaria construya el concepto de cuadrilátero para que sepa reconocer cualquier representante de este concepto a través de sus características o propiedades. Es necesario identificar ese elenco de características (longitud de los lados, valores de sus ángulos, paralelismo o posición relativa de sus diagonales) de forma que los ejemplos que vaya construyendo generen imágenes mentales potentes vinculadas a cada una de esas características, centrando la atención en cada momento en una de ellas para relacionarlas después.

La capacidad de ejemplificar está también vinculada a la capacidad de demostrar y de definir. Un estudiante ha de conocer el poder limitado de un ejemplo a la vez que reconocer el poder de un buen contraejemplo para refutar una conjetura. La práctica matemática, esencia del proceso de construcción del conocimiento matemático, suele tener un papel retórico en las diversas propuestas curriculares. Saber definir, comprendiendo las características críticas de una definición para permitir una clara diferenciación del ente matemático que se define, saber elegir una forma de validar o refutar lo que se conjetura, saber elaborar argumentos para estos procesos y saber utilizar los elementos básicos del lenguaje matemático para comunicarlo, son herramientas fundamentales a desarrollar en las aulas si realmente apostamos por una construcción efectiva del conocimiento por nuestros estudiantes, y estas herramientas requieren entrenamiento. Bass (2007) nos muestra cómo niños de Primaria abordan cuestiones matemáticas elementales con prácticas matemáticas que trascienden los tradicionales bloques de contenido y cómo una básica discusión acerca de conjeturas sobre paridad de suma de números de igual o diferente paridad puede alcanzar altas cotas conceptuales, pasando de la aritmética módulo 2 a la aritmética módulo 4, por ejemplo.

Estos dos ejemplos, la resolución y formulación de problemas y la ejemplificación, evidencian el enorme poder que tiene una aproximación basada en prácticas matemáticas para el aprendizaje. Así, tiene sentido, desde esta perspectiva, asumir una organización del currículo transversal a los tradicionales bloques de contenido, de forma que las diferentes prácticas matemáticas vehiculen el aprendizaje de los conceptos para dar lugar a estudiantes que no sólo posean conocimiento matemático, sino que, además, sepan qué hacer con él. Aquí se han desarrollado dos de estas prácticas matemáticas, y se han mencionado otras cuatro, que podrían constituir una primera aproximación a estos organizadores del currículo.

¿Para qué enseñamos matemáticas?

Ernest (2000) dice que una respuesta a esta pregunta está condicionada a tres principios. El primero de ellos se refiere al hecho de que las matemáticas escolares están estrechamente vinculadas a valores sociales y culturales, por tanto, es preciso reconocer la multiplicidad de matemáticas que ello implica. El segundo principio está determinado por el sesgo que el valor utilitarista ha concedido a las matemáticas, aportando una sobrevaloración implícita de su papel en los currículos y una visión opuesta al sentido para el que surgieron, como constructo humano, hace miles de años. El tercer principio, de alguna forma vinculado al primero, establece que los objetivos de la enseñanza de las matemáticas no pueden enunciarse fuera del contexto social en el que se realizan. El primero de estos principios nos invita a pensar en un currículo adaptativo, lo que no está en la línea de estándares universales; el segundo sugiere buscar respuestas en los orígenes del conocimiento matemático, en los que la sistematización de los métodos y problemas matemáticos llevó a la creación de la matemática como disciplina académica (Høyrup, 1987); el tercero nos conduce a la necesaria revisión de lo tradicionalmente admitido como objeto de enseñanza y su reorientación hacia elementos curriculares atemporales.

Desde estos principios, las matemáticas escolares tienen que considerarse como un instrumento al servicio de la ciudadanía, como un conjunto de herramientas para explorar la realidad, para representar e interpretar datos empíricos y para efectuar predicciones, de ahí que actividades que fomentan la resolución de problemas, la búsqueda de analogías, la formulación de conjeturas y la generación de estrategias o técnicas deben ser sus elementos vertebradores, contribuyendo a que aspectos coadyuvantes del desarrollo del pensamiento humano, como son el razonamiento deductivo y la curiosidad por plantear y resolver problemas, sean sus generadores. Unido a ello, sigue teniendo vigencia la respuesta dada desde el informe Cockcroft (1985), que justificaba su presencia curricular sobre la base de su consideración como poderoso medio de comunicación, universal (CEMat, 2021), conciso y libre de ambigüedades, que nos permite representar, explicar y predecir.

Compartimos una "concepción global del currículo, más allá de los contenidos, [que] nos permite también mirar las matemáticas desde un punto de vista superior … [señalando] la existencia de las denominadas grandes ideas matemáticas … que vertebran estos contenidos en niveles superiores y permiten apreciar la continuidad y las conexiones intra matemáticas" (CEMat, 2021, p. 5).

Esta forma de caracterizar el currículo matemático no es nueva, aunque ha ido ganando fuerza en las reformas de los últimos años. Nos parece que, antes de proseguir, merece la pena hacer una revisión de los elementos transversales de los últimos estándares curriculares.

Las matemáticas en el currículo

En los últimos treinta años hemos vivido en España seis cambios en las leyes de educación. No todos han tenido un impacto directo en los currículos, pero al menos tres de ellos, sin contar con el último que aún está en proceso de implantación, han supuesto modificaciones que no han mutado la esencia de cómo se entiende la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas e igualmente, no han provocado cambios significativos en el modo de desarrollar el currículo en las aulas, como veremos a continuación.

La Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE), aprobada en el 1990, es la que introdujo la estructura actual de tres niveles educativos: Infantil, Primaria y Secundaria, incluyendo este último la Educación Secundaria Obligatoria (ESO), el Bachillerato y los ciclos formativos. Después de ella han sucedido la Ley Orgánica de Participación, Evaluación y Gobierno de los centros docentes, o LOPEG, de 1995, la Ley Orgánica de Calidad de la Enseñanza, o LOCE, de 2002, Ley Orgánica de la Educación, o LOE, del 2006, Ley Orgánica de Mejora de la Calidad Educativa, o LOMCE, del 2013 y la actual Ley Orgánica de Modificación de la Ley Orgánica de Educación, o LOMLOE, del 2020. Amén de la impronta que en estas leyes han supuesto las diferentes tendencias políticas que han ostentado el poder, en este punto queremos destacar los elementos que han permanecido invariantes, total o parcialmente, en relación con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, aquello que está asociado a la estructura de las matemáticas y a un modo de entender su enseñanza y aprendizaje.

Los distintos currículos se han organizado en torno a bloques de contenido que, en general, rigen la estructura de los libros de texto en las etapas educativas de Primaria y Secundaria, con la consiguiente influencia en el aprendizaje cuando el libro de texto es el principal recurso que emplea el profesorado en el aula. Sin embargo, se reitera la idea, que más tarde se concretaría en las competencias, de que las matemáticas se deben aprender de forma integrada, no solo formando parte del aprendizaje de otras áreas de conocimiento, sino de las propias áreas dentro de la matemática, que son las que se inducen los bloques de contenido de los currículos.

La resolución de problemas es el eje que guía, curricularmente, cómo se debe enseñar y cómo se debe aprender la matemática en Educación Primaria y Secundaria, pero su papel en el currículo ha variado ligeramente según las diferentes leyes. Si nos remontamos a finales del siglo pasado, en el currículo de la LOGSE de la etapa de Primaria la resolución de problemas ya se presenta como el contexto en el que deben enseñarse los contenidos matemáticos, haciendo mención explícita a la necesidad de vincular estos contenidos con el entorno del alumnado y al papel utilitario de la matemática por su "posibilidad de abstracción, simbolización y formalización" (Real decreto 1344/1991, p. 31). En este currículo organizado por contenidos, procedimientos y actitudes, se indica que las matemáticas deben atender a tres objetivos sin prevalencia por parte de ninguno de ellos: formativo, funcional e instrumental. En las subsiguientes leyes, esos objetivos se mantienen, aunque el modo de organizar el currículo no se haya mantenido constante en cada uno de ellos: objetivos, competencias básicas, contenidos y criterios de evaluación en la LOE; competencias, contenidos, resultados de aprendizaje, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje en la LOMCE; y de nuevo objetivos, competencias, contenidos y criterios de evaluación (en el caso de la formación profesional se incluyen los resultados de aprendizaje) en la reciente LOMLOE.

Los currículos aprobados en los más recientes reales decretos han compartido una visión del aprendizaje a partir del desarrollo de competencias. En el caso de las matemáticas, coinciden también en la razón por la que su aprendizaje es necesario para todos los individuos y en el papel de la resolución de problemas como motor de ese aprendizaje, con lo que ello implica. A pesar de ello, tradicionalmente el currículo se ha desarrollado en las aulas centrado en el listado de contenidos, sin apenas integración de las diferentes áreas de la matemática, cuanto menos de otras áreas de conocimiento, y de forma secuencial, contrario al carácter holístico que promueven los currículos.

De manera explícita, en los diferentes currículos se alude a la necesidad de listar contenidos, junto con estándares de aprendizaje o criterios de evaluación, según el caso, como forma de mostrar los contenidos que se deben trabajar en cada ciclo en un contexto de resolución de problemas. Hablar de enseñar a través de la resolución de problemas, no de enseñar a resolver problemas, conlleva asumir el desarrollo de múltiples destrezas matemáticas, la integración de distintos elementos de las matemáticas y el trabajo interdisciplinar con otras materias del currículo. Estos elementos comunes en las diferentes normativas se asocian con una visión de las matemáticas como instrumento esencial en el progreso de otras áreas de conocimiento, no solo las habituales ciencias experimentales, sino también las ciencias sociales e incluso áreas humanísticas y artísticas. Además, se destaca también, de manera más o menos explícita según el caso, su carácter formativo y funcional.

Una lectura del currículo evitando las tablas y listas de contenidos, deja entrever unas matemáticas que se aprenden y se enseñan a partir de la acción, el cuestionamiento, el diálogo argumentado, de la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre, entre otros, y todo ello con una actitud positiva hacia la disciplina. Es cierto que no en todos los niveles educativos ni en todos los currículos desde el de la LOGSE de 1990 se percibe ese modo de entender la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática. Sin embargo, sí se percibe una evolución hacia esta visión que se hace explícita en los cambios introducidos en la última ley del 2020.

El nuevo currículo, que aún está en proceso de implantación, supone un cambio significativo, respecto de los anteriores, y un avance en la visión de las matemáticas como actividad humana, ligada al desarrollo integral de la sociedad y comprometida con los retos del siglo XXI reconocidos por diferentes asociaciones mundiales. El desarrollo y adquisición de competencias sigue siendo el reto del sistema educativo, con la distinción entre competencias clave y específicas. Por ejemplo, en el borrador del currículo de la etapa de Educación Primaria, a través de la organización de estas competencias específicas en cinco ejes, se reconoce el cambio sustantivo introducido en este currículo con el eje de las destrezas socioemocionales. La resolución de problemas, el razonamiento y prueba, las conexiones, y la comunicación y representación, configuran los otros cinco ejes. También la estructuración de los saberes básicos en seis sentidos presentes en el sentido matemático recoge la nueva visión humanística de las matemáticas: sentido socioemocional, numérico, de la medida, espacial, algebraico y pensamiento computacional y sentido estocástico. De manera análoga, con las variaciones pertinentes propias de la etapa, se observa esta nueva visión en el borrador del currículo de Secundaria.

Celebramos estos cambios en la orientación del currículo, en particular en lo relativo a las matemáticas, a pesar de que reconocemos insuficiente la permuta de los listados de contenidos de los currículos anteriores por los de saberes básicos del nuevo currículo.

Mediadores en el aprendizaje de las matemáticas

En los apartados anteriores hemos mostrado nuestra posición acerca de los elementos organizadores del currículo. Cabe ahora reflexionar acerca de los mediadores del mismo, de los vehículos que comunican el currículo pretendido y el desarrollado. Hay, a nuestro entender, dos mediaciones esenciales, el docente y los materiales curriculares, entre ellos el libro de texto y los recursos tecnológicos.

Como propone Chevallard (2017), la supervivencia de la enseñanza de las matemáticas depende de un cambio radical en nuestra concepción de qué y cómo enseñarlas; de poco sirve un cambio curricular si este no es compatible con el paradigma dominante. Por eso, el debate no debe centrarse solo en establecer qué y cómo enseñar, se debe considerar también cómo contribuir a un cambio de paradigma y conseguir que una mayoría del profesorado se implique en él.

Los modelos de educación matemática que sustentan muchas de las reformas curriculares se encuentran dentro de lo que Ellis y Berry (2005) denominan paradigma procedimental-formalista, que sostiene que las matemáticas son un conjunto objetivo de hechos, habilidades y procedimientos organizados lógicamente y optimizados a lo largo del tiempo. Esta perspectiva de existencia independiente de la experiencia humana convierte la matemática escolar en algo intrínsecamente difícil de aprender.

En este paradigma dominante, la utilidad formativa de las matemáticas se ha entendido desde la perspectiva intrínseca o inmanente, sobre todo fundamentado en la utilidad del conocimiento matemático para la formación científica. Pero, curiosamente, los científicos para los que supuestamente trabajamos solo suponen un reducido porcentaje de la población. Una consecuencia no esperada de esto es que la aversión que ese tipo de matemáticas produce en nuestro estudiantado es en parte responsable de un analfabetismo funcional en el ámbito matemático. Del profesorado depende el paso de lo que Chevallard denomina "paradigma de las visitas a las obras" (que supone avanzar secuencialmente por un itinerario ya marcado) al "paradigma de cuestionamiento del mundo" para que la forma en que el estudiantado tropiece con las matemáticas esté "motivado intrínsecamente por las necesidades del estudio: se trata de un estudio funcional, justificado por el problema por resolver. El trabajo de indagación sobre la cuestión estudiada lleva a las y los estudiantes a encontrar varios contenidos en un recorrido principalmente determinado por la dirección de dicha indagación" (p. 168).

Como señalan Ellis y Berry (2005) "es la integración de un nuevo pensamiento sobre la cognición y el mayor reconocimiento de la cultura lo que ha permitido a los educadores matemáticos enmarcar preguntas y conceptualizar soluciones de maneras que era poco probable que se desarrollaran desde el paradigma procedimental-formalista" (p.12). Esta nueva perspectiva, surgida de la síntesis de la investigación cognitiva, se enmarca en un nuevo paradigma cognitivo-cultural, que entiende el conocimiento matemático como una red de conceptos lógicamente organizados e interconectados que surgen de la experiencia, el pensamiento y la interacción humana.

Los fundamentos de este paradigma son radicalmente diferentes a los del formalista procedimental. Al enfatizar el conocimiento matemático como parte de la experiencia y la interacción humanas, orienta su enseñanza de forma que los y las estudiantes realmente comprendan las matemáticas a través de oportunidades de compartir experiencias y significados, de establecer conexiones entre conceptos e ideas relevantes, y ser capaces de aplicarlas de forma crítica y reflexiva a situaciones de su vida cotidiana. Como afirma Philipp (2001), el reto ya no es hacer llegar las matemáticas a los estudiantes, es llevar a los estudiantes hacia las matemáticas.

En esta nueva forma de mediación, el pensamiento crítico, la resolución de problemas, la colaboración a través de redes, la agilidad y adaptabilidad, la iniciativa y el espíritu empresarial, la comunicación eficaz, el acceso y el análisis de información, la curiosidad e imaginación (Wagner, 2014) deben ser las estrategias esenciales y, para ello, el profesorado deberá ser capaz de orquestar discusiones de toda la clase, hacer preguntas profundas y plantear tareas que ayuden al estudiantado a reflexionar y desarrollar su pensamiento actual, dando oportunidad para que la educación matemática prepare a los estudiantes para aplicar las matemáticas en todo tipo de situaciones laborales y de la vida cotidiana.

Como señalan Gravemeijer et al. (2017), dado que las matemáticas que usamos en el ámbito laboral difieren significativamente de las matemáticas que trabajamos en la escuela, los profesores y profesoras han de intentar extraer las características esenciales de las primeras, a fin de obtener una imagen de la actividad matemática para la que los estudiantes deben estar preparados. Si queremos anticiparnos a las demandas del siglo XXI, debemos contemplar que se trabajará en un entorno informatizado, por lo que debemos intentar identificar las competencias matemáticas que complementan ese tipo de trabajo; de la misma forma que será preciso analizar cómo los temas matemáticos adquieren relevancia bajo la influencia del uso de la tecnología de la información para identificar qué contenido matemático habrá que perseguir.

Es preciso pasar de tratar las matemáticas escolares influenciadas por prácticas profesionales formales de los matemáticos y de docentes que aprendieron desde este enfoque, a unas matemáticas inspiradas por problemas prácticos utilizando herramientas, prácticas y discursos culturalmente específicos (Wake y Williams, 2001).

La mediación se torna esencial en la forma de abordar un contenido. El cambio de paradigma implica, por ejemplo, enfatizar la comprensión conceptual de los elementos de un procedimiento frente al exclusivo uso del procedimiento en sí, entendiendo ambos aspectos como no dicotómicos. Como afirma Kieran (2013), ambos aspectos han de convivir e interactuar de forma que la comprensión conceptual acompañe a la elaboración y uso de técnicas, a la vez que el propio proceso de generación de esas técnicas se torne en un proceso de enriquecimiento conceptual.

Las matemáticas, como señalan Kilpatrick et al. (2001), implican comprensión conceptual, fluidez procedimental, competencia estratégica, razonamiento adaptativo y disposición productiva. Esto significa que los procedimientos deben verse como oportunidades de generar nueva comprensión conceptual en la medida que pueden ser adaptados, refinados y extendidos, desde una perspectiva que supone avanzar hacia flexibilidad y conocimiento procedimental profundo (Star, 2005), entendido como un conocimiento de procedimientos asociado con comprensión, flexibilidad y juicio crítico, diferente, aunque relacionado con el conocimiento de conceptos (que el autor re-denomina como conceptos y principios).

En ese mismo sentido se manifiestan Li y Shoenfeld (2019), para quienes no se puede seguir presentando las matemáticas como un cuerpo de contenidos para ser aprendido y un listado de procedimientos para ser aplicados. Es preciso situar el conocimiento en un contexto con sentido a través de prácticas que incluyan planteamiento y resolución de problemas, razonamiento, comunicación y *modelling* en un marco de experiencias para los estudiantes. Así, aunque la elección del qué enseñar es relevante, lo es más el cómo enseñarlo; es desde esa perspectiva desde la que introducen el TRU (*Teaching for Robust Understanding*) basado en 5 principios: un contenido rico (conceptualizado como algo conectado y vinculado a experiencias significativas), la demanda cognitiva (que consiste en dar oportunidades de dar sentido a lo que se hace), que permita un acceso igualitario (en sentido de oportunidades para todos), agencia, propiedad e identidad (ayudar a los estudiantes a implicarse disciplinadamente en la búsqueda de sentido) y evaluación formativa, coherente con el modelo de aprendizaje que valore el saber hacer por encima del saber en sí. Propugnan así una matemática con un sentido más aristotélico (enfatizando el razonamiento lógico y la actividad empírica sobre los objetos matemáticos accesibles a los sentidos) que platónico (poca o nula experiencia se puede adquirir si se considera como algo preexistente, que solo unos pocos pueden comprender). Ha de verse como algo que el humano puede producir, como una actividad humana. Para ello, el rol del docente es generar un clima de indagación, donde las matemáticas contemple exploración y comprensión, con tareas que permitan a los estudiantes desarrollar, compartir y refinar sus ideas, articuladas sobre las grandes ideas matemáticas (que los contenidos no impidan una perspectiva más amplia) y donde el pensamiento de los estudiantes sea central para el discurso en el aula (Li y Shoenfeld, 2019).

Uno de los problemas que cualquier reforma tiene es cómo conseguir que los profesores y profesoras se adapten al nuevo paradigma que las ampara (Lampert, 2001). Lejos de formulaciones prescriptivas de la práctica, este cambio pasa por que los y las docentes aprendan a estructurar ambientes de aprendizaje que permitan el discurso matemático y la conexión de ideas matemáticas. Desde nuestra perspectiva, la clave está en que el conocimiento matemático que han de tener ha de ser más extenso y profundo, potenciando las ideas matemáticas relevantes y las interconexiones entre ellas (Ma, 1999; Sfard, 2003). Ello supone que los cambios curriculares efectivos no es esperable que se produzcan como efecto de cambios legislativos y que requerirán la comprensión de sus fundamentos y la implicación por parte de los y las docentes que han de ejecutarlos.

El otro gran mediador del aprendizaje es el libro de texto. Elegimos este, entre el resto de los materiales curriculares pues, sin duda, es el de uso más extendido entre el profesorado. La selección y uso del libro de texto en el aula de matemáticas requiere hoy la atención de parte importante de los investigadores en educación matemática (Fan et al., 2013; Rezat et al., 2021). No entraremos en profundidad en ello, sólo queremos centrar la atención sobre su influencia como mediador curricular, dado que su papel esencial es convertir las abstracciones de la política curricular en un recurso operativo para profesores y estudiantes (Valverde et al., 2002).

Lepik et al. (2015) distinguen cuatro usos diferentes que el profesorado atribuye al libro de texto: hay quienes lo usan de forma sistemática a lo largo de todo el curso, quienes no lo consideran como su herramienta principal y lo combinan con otros recursos, aquellos que solo los utilizan para la realización de ejercicios y tareas que contienen, y aquellos que los consideran como un material complementario de ampliación de lo trabajado en clase y como recurso del trabajo personal del alumnado. La primera opción, que parece ser la más extendida, es también la más acrítica; las otras implican toma de decisiones acerca de las posibilidades que el libro puede ofrecer en función de los objetivos de aprendizaje que el profesorado tenga.

Es preciso tener en cuenta que, independientemente de la calidad educativa e idoneidad de un libro de texto, su propia organización suele conducir a una visión estática y acabada del contenido y a una secuencia compartimentada de temas y tareas. Si las propuestas curriculares advierten que los bloques de contenido no suponen un temario, el libro de texto se encarga de hacer ver justo lo contrario; si el currículo apuesta por contemplar elementos trasversales como la resolución de problemas, los recursos tecnológicos y la dimensión histórica y cultural de las matemáticas, los libros de texto tienden a convertir la transversalidad en pura anécdota.

Por otro lado, la matemática escolar debe organizarse desde un doble continuo que va de la simplicidad a la complejidad y de la singularidad a la multiplicidad de relaciones. La matemática escolar puede entenderse como una malla de conceptos interrelacionados en una estructura helicoidal, y los libros de texto, en el mejor de los casos, solo ofrecen secciones planas de dicha estructura, impidiendo la necesaria visión holística (vertical y horizontal) que el docente ha de tener del currículo, y promoviendo por tanto una construcción reduccionista y parcelada del conocimiento matemático.

Los recursos tecnológicos conforman el otro grupo importante de mediadores curriculares. Puede parecer ocioso que, avanzado el siglo XXI, sigamos recordando el papel esencial del software educativo en la función de movilizar conocimiento. Sin embargo, conviene destacar los avances que software de acceso libre, como Geogebra, ha permitido experimentar en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Los recursos tecnológicos, no obstante, no cumplen solo su función potenciadora del aprendizaje, son también y, quizás hoy principalmente, un medio para el acceso democrático y universal a la información. Por ello, la educación matemática ha de contemplar su uso como elemento transversal del conocimiento y como medio de acceso al mismo.

Reflexiones finales

Este capítulo propone una visión fundamentada de la matemática escolar con un marcado carácter social, y que huye de las estériles dicotomías y discusiones que durante varias décadas han llevado a un profundo inmovilismo de las matemáticas que se enseñan, en general, en las aulas de los centros escolares. Esto supone un cambio de calado en la forma de concebir las matemáticas tanto a nivel curricular, donde este cambio de perspectiva ha sido ampliamente considerado, como a nivel escolar, donde estas propuestas de cambio no han terminado de calar. Por eso mismo, asumiendo que este tipo de cambios no es inmediato ni sencillo de realizar, hemos profundizado en sus claves y hemos puesto de relieve que requieren de un profundo compromiso que abarca tanto a los y las docentes y centros, como a agentes sociopolíticos. Así, si se pretende un cambio real, profundo y no de forma, en la realidad educativa española, y pretendiendo que impacte en la sociedad de forma significativa, entendemos que sólo puede suceder a través de un compromiso estable en el tiempo y en el contenido de dicho cambio, compromiso que nuestra sociedad de investigación puede y debe liderar. Asimismo, un cambio profundo (aunque insistimos que no nuevo) en la forma de concebir la actividad matemática escolar no sólo pasa por cambiar las leyes educativas del currículo en la escolarización obligatoria, sino que debe afectar profundamente a todos los agentes que actúan como mediadores y, fundamentalmente a la formación de profesorado, de todos los niveles educativos, y tanto de formación inicial como continua. Esta última nos proporciona un contexto privilegiado para fomentar el cambio en la forma de concebir la matemática escolar con cierta rapidez, dado que el profesorado en activo es, en gran medida, el responsable de dar forma al éxito o fracaso de las reformas educativas.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado en el marco del proyecto RTI2018-096547-B-I00 del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades del Gobierno de España, del centro de investigación COIDESO, del grupo de Investigación DESYM (HUM-168), y de la Red MTSK, auspiciada por la AUIP.

Referencias

Bass, H. (2007). Matemáticas, matemáticos y educación matemática. *La Gaceta de la RSME, 10*(3), 689–706.

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A. y Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in Mathematics Education. En J. Novotna (Ed.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.126-154, Vol 1). PME.

Caballero (2013). *Diseño, aplicación y evaluación de un programa de intervención en control emocional y resolución de problemas matemáticos para maestros en formación inicial*. Tesis Doctoral. Universidad de Extremadura

Chevallard, Y. (2017). ¿Por qué enseñar matemáticas en secundaria? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan. *La Gaceta de la RSME, 20*(1), 159-169.

Cockcroft, W. (1985). *Informe Cockcroft. Las matemáticas, sí cuentan*. MEC.

Comité Español de Matemáticas, CEMat (2021). *Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria*. Recuperado de: https://matematicas.uclm.es/cemat/wp-content/uploads/bases2021.pdf

Conference Board of the Mathematical Sciences. (2001). *The mathematical education of teachers*. American Mathematical Society and Mathematical Association of America.

Ellis, M.W., y Berry, R.Q. (2005). The Paradigm Shift in Mathematics Education: Explanations and Implications of Reforming Conceptions of Teaching and Learning. *The Mathematics Educator, 15*(1), 7-17.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. Rouletdge Farmer.

Ernest, P. (2000). Why teach mathematics? The aims, outcomes and opportunities afforded by its teaching and learning. En J. White and S. Bramall (Eds.), *Why learn maths?* University of London.

Ernest, P. (2002). Empowerment in Mathematics Education. *Philosophy of Mathematics Education Journal 15,* 1-16.

Fan, L., Zhu, Y. y Miao, Z. (2013). Textbokk research in mathematics education: development status and directions. *ZDM Mathematic Education, 45*, 633-646.

Gravemeijer, K., Stephan, M., Julie, C., Lin, F. y Ohtani, M. (2017). What Mathematics Education May Prepare Students for the Society of the Future? *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(S1), 105-123.

Hanna G. (2020). Mathematical Proof, Argumentation, and Reasoning. En S. Lerman S. (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_102

Hoyles, C., Noss, R., Kent, P. y Bakker, A. (2013). Mathematics in the workplace: Issues and challenges. En A. Damlamian, J. F. Rodrigues, and R. Strässer (Eds.), *Educational interfaces between mathematics and industry: Report on an ICMI-ICIAM study* (Vol 16). (pp. 43–50). Springer Science y Business Media.

Høyrup, J. (1987). Influences of institutionalized mathematics teaching on the development and organization of mathematical thought in the pre-modern period. En J. Fauvel y J. Gray (Eds), *The History of Mathematics: A Reader* (pp. 43-45). Macmillan.

Jäder, J., Lithner, J. y Sidenvall, J (2020) Mathematical problem solving in textbooks from twelve countries. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 51*(7), 1120-1136.

Kieran, C. (2013). The false dichotomy in mathematics education between conceptual understanding and procedural skillls: an exemple form algebra. En K.R. Leatham (Ed.), *Vital directions for mathematics education reserach*. Springer.

Kilpatrictk, J., Swaford, J. y Findel, B. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. National Academy Press.

Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. Yale University Press.

Lehrer, R., y Schauble, L. (2000). Developing Model-Based Reasoning in Mathematics and Science. *Journal of Applied Developmental Psychology, 21*(1), 39-48.

Lepik, M., Grevholm, B. y Viholainen, A. (2015). Using textbooks in the mathematics classroom: the teachers' view. *Nordic Studies in Mathematics Education, 20*(3-4), 129-156.

Levy, F. y Murnane, R. J. (2012). *The new division of labor: How computers are creating the next job market*. Princeton University Press.

Li, Y. y Shoenfeld, A.H. (2019). Problematizing teaching and learning mathematics as "given" in STEM education. *International Journal of STEM education*. https://doi.org/10.1186/s40594-019-0197-9

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates.

Mariotti, M.A., Durand-Guerrier, V. y Stylianides, G. (2018). Argumentation and proof. En T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger, K. Ruthven (Eds.), *Developing Research in Mathematics Education*, (pp. 75-89).

Mills, K. (2012). Some correspondences and disjunctions between school mathematics and the mathematical needs of apprentice toolmakers: A New Zealand Perspective. En A. Hector-Mason y D. Coben (Eds.), *Proceedings of the 19th International Conference of Adult Learning Mathematics-A Research Forum* (pp. 69-83), Auckland, New Zealand.

Noss, R. (1989). The computer as a cultural influence in Mathematics Learning. *Educational Studies in Mathematics*, *19*(2), 251-268.

Philipp, R. (2001). *Speech presented for the National Council of Teachers of Mathematics Research Pre-session*. Orlando, FL.

Pólya, G. (1945). *How to Solve It. A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton University Press.

Real decreto 1344/1991, de 6 de septiembre, por el que se establece el currículo de la Educación Primaria. Anexo. Boletín Oficial del Estado, 220, de 13 de septiembre de 1991. https://www.boe.es/boe/dias/1991/09/13/pdfs/C00003-00038.pdf

Reichenbach, H. (1938). *Experience and prediction: an analysis for the foundations and the structure of knowledge*. University of Chicago.

Rezat, S., Fan, L. y Pepin, B. (2021). Mathematics textbooks and curriculum resources as instruments for change. *ZDM Mathematics Education, 53*, 1189-1206.

Sfard, A. (2003). Balancing the unbalancable: The NCTM standards in light of theories of learning mathematics. En J. Kilpatrick, W. G. Martin, and D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 353-392). National Council of Teachers of Mathematics.

Star, J. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*, 404-411.

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H. y Houang, R. T. (2002). *According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Kluwer.

Wagner, T. (2014). *The global achievement gap: Updated edition*. Perseus Books Group

Wake, G. D. y Williams, J. S. (2001). *Using College mathematics in understanding workplace practice. Summative report of research project funded by the Leverhulme Trust*. Manchester University.

Sentido matemático Escolar

School Mathematics Sense

Ruiz-Hidalgo, J. F. y Flores, P.
Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada

Resumen

La noción de sentido matemático y sentidos matemáticos escolares se ha incorporado en la redacción de los nuevos documentos curriculares en España, pasando a tener un papel importante en la organización de los mismos. Por tanto, es necesario para un docente profundizar en la noción de sentido matemático, conociendo cuál es su fundamentación, reflexionando sobre la pertinencia de su inclusión en el currículo e informándose sobre las consecuencias que tendrá en futuros procesos de enseñanza y aprendizaje. En este capítulo, tratamos de orientar a los profesionales de la enseñanza a través de los elementos curriculares y cognitivos que soportan la noción de sentido matemático y presentamos una descripción general de cada uno de los sentidos matemáticos escolares en los que se divide: sentido algebraico, espacial, estocástico, de la medida y numérico. Para cada uno de ellos describimos las principales componentes que lo organizan.

Palabras clave: Competencia matemática, Enfoque funcional del currículo, Matemática escolar.

Abstract

The notion of mathematical sense and school mathematical senses has been incorporated into the writing of the new Mathematics curricula in Spain, coming to play a fundamental role in their structure. Therefore, it is necessary for a teacher to delve into the notion of mathematical sense, knowing what its foundation is, reflecting on the relevance of its inclusion in the curriculum and orienting itself on the consequences it will have in future teaching and learning processes. In this chapter, we try to guide teaching professionals through the curricular and cognitive elements that support the notion of mathematical sense as well as a general description is presented of each school mathematical senses into which it is divided: algebraic, spatial, stochastic, measurement and numerical. For each of them we describe the main components that organize them.

Keywords: Curricular functional approach, Mathematics literacy, School mathematics.

Introducción

La postura expresada por las sociedades de profesoras y profesores de matemáticas y por las sociedades científicas que componen el Comité español de Matemáticas (CEMAT, 2021) adopta la noción de sentido matemático y lo sitúa como elemento central que organiza la enseñanza del conocimiento matemático escolar longitudinalmente, desde la educación infantil hasta el bachillerato. Esta postura ha sido adoptada en el nuevo desarrollo curricular (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022a, 2022b), en el que la noción de sentido matemático permite estructurar los saberes básicos que se asocian al desarrollo de las competencias clave.

Los seres humanos buscamos sentido en el mundo esperando que las cosas no sean arbitrarias ni fruto del azar y las intentamos categorizar constantemente, como señala desde la psicología cognitiva Smith (2005). Bruner (2009) reconocía que la fuerza motriz de las actividades intelectuales es la cultura y la necesidad de buscar significados, que hay que integrar en la enseñanza de las matemáticas.

Ayudar a los estudiantes a dar sentido a los contenidos matemáticos orienta su enseñanza, buscando que ganen competencias relativas a dichos contenidos, a través de oportunidades de compartir experiencias y significados, de establecer conexiones entre conceptos e ideas relevantes, y ser capaces de aplicarlas de forma crítica y reflexiva a situaciones de su vida cotidiana (Montes et al., 2022, p. 48)

La visión del aprendizaje que se reflejó en la noción de competencia y de currículo funcional, amplió la expectativa de aprendizaje a la capacitación para utilizar esos contenidos aprendidos en situaciones del entorno. Pero la formulación de competencias matemáticas de manera transversal a los contenidos tal como hizo la OCDE en 2005 (Pensar y razonar, Argumentar, Comunicar, Modelar, Plantear y resolver problemas, Representar, Utilizar lenguaje simbólico, fórmulas y operaciones, Emplear soportes y herramientas tecnológicas), provoca que deba repensarse la organización del contenido matemático. Esta idea se expresa en el capítulo anterior (Montes et al., 2022) donde, específicamente, se indica que la organización curricular de las matemáticas escolares debe basarse en "función de las destrezas transversales que permiten construir y crear matemáticas, desde una perspectiva crítica y accesible para todos los aprendices" (p. 42). La idea de sentido matemático proporciona esta reorganización y respeta los bloques de contenido, centrándose en los elementos que le atribuyen significado.

La palabra sentido forma parte del vocabulario habitual. Existen diversas expresiones relacionadas con sentido en el lenguaje cotidiano "tener sentido", "dotar de sentido", "doble sentido", "sin sentido", … En el diccionario de la Real Academia de la Lengua aparece con 12 acepciones inmediatas y otras pocas más relacionas. De ellas, algunas se refieren al sentimiento, otras a los sentidos perceptivos y otras a diversas capacidades cognitivas.

De todas ellas, algunas acepciones tienen usos convenidos en educación y en matemáticas:

1. "Significado de una palabra o grupo de palabras". En matemáticas, el sentido de un concepto matemático es parte inherente de su significado semántico y se centra en los modos de usos, las situaciones, los contextos y los fenómenos que forman parte del significado de dicho concepto.
2. "Habilidad o destreza para hacer algo o para juzgar bien en ello". Desde el punto de vista del aprendizaje, el sentido aparece como conjunto de habilidades asociadas a contenidos matemáticos concretos que el estudiante debe desarrollar.
3. "Modo de enfocar, de entender o juzgar algo". El docente debe enseñar con sentido, entendiendo por esto proporcionar oportunidades para que sus estudiantes aprendan matemáticas con sentido, esto es, implicar a los estudiantes en el desarrollo de instrumentos propios, no rutinizados en la resolución de problemas.

En este capítulo se realiza una aproximación didáctica que describe la noción de sentido atendiendo a los dos primeros usos convenidos anteriores. Por un lado, desde las matemáticas, como el *sentido de los contenidos matemáticos escolares,* que proporciona una organización fenomenológica del contenido matemático escolar. Por otra, desde el aprendizaje escolar, como los *sentidos matemáticos escolares*, que son los conjuntos de capacidades generales que enlazan los elementos del contenido matemático con aspectos cognitivos de su aprendizaje y con la noción de competencia matemática. A partir de la conexión de las componentes necesarias para poner en acción los respectivos bloques de contenido matemáticos surge el desglose del sentido matemático correspondiente a la enseñanza obligatoria en: sentido algebraico, sentido espacial, sentido estocástico, sentido de la medida y sentido numérico.

Sentido y Sentido Matemático

Significado y sentido de un contenido matemático escolar

Desde una aproximación semántica, consideramos el sentido como uno de los elementos constituyentes del significado de un concepto. Un concepto matemático escolar lo consideramos constituido por: (1) una estructura formal, que incluye conceptos, propiedades, relaciones, algoritmos, …; (2) unos signos y unas reglas que permiten expresarlo y que lo identifican y; (3) un sentido o sentidos que corresponden a un conjunto de situaciones, contextos, fenómenos y modos de uso que permiten usarlo y emplearlo (Rico, 2012, 2013, 2016b; Rico et al., 2015).

Esta visión de sentido de un contenido matemático escolar es muy cercana a la que Freudenthal (2002) defiende, en la que los conceptos matemáticos son los modos de organización de los fenómenos, que son los objetos de la experiencia matemática de las personas. La dualidad fenómenos-organización de fenómenos permite construir nuevos conceptos matemáticos que, a su vez, son fenómenos que se organizan para construir nuevos conceptos. Entendida la construcción de conceptos matemáticos de esta manera, las personas que aprenden parten de fenómenos (o de situaciones o contextos) que permiten experimentar (usar e interpretar) determinado concepto de manera que tenga sentido y produzca nuevos significados utilizables en nuevas situaciones en las que se necesite dicho concepto (Puig, 1997).

Estos sentidos de los contenidos matemáticos, basados en las formas en las que se pueden usar los contenidos matemáticos, se ajustan a la competencia matemática, tanto la defendida en los estudios PISA, como la que promueve la actual legislación educativa, ya que ambas subrayan la funcionalidad de la matemática escolar y, así, enfatizan el interés en los fenómenos del mundo real que requieren y desencadenan un tratamiento matemático. Los contenidos pasan a ser una herramienta con una función y su organización disciplinar basada en la estructura matemática de los mismos deja paso a una organización "fenomenológica" (Rico, 2016a). Esta nueva clasificación selecciona y organiza los contenidos en relación con los fenómenos que organizan y los tipos de problemas de los que surgieron, esto es, organiza los contenidos atendiendo al sentido de los mismos.

En resumen, atendemos a la necesidad de reorganizar el contenido matemático mediante la propuesta de que el sentido de los contenidos matemáticos escolares proporciona una organización "fenomenológica" del contenido matemático escolar que atiende la disposión en función de los clásicos bloques de contenido y que se realiza en términos de las capacidades que permiten comunicar, aplicar, usar en contexto y profundizar en los contenidos matemáticos, desde una perspectiva crítica y accesible para todos los aprendices.

Aprender matemáticas con sentido. Sentido matemático

Desde la perspectiva didáctica, el concepto de sentido numérico arranca en los años 80 del s. XX, concebido por Howden (1989) como una buena intuición sobre los números y sus relaciones, que se desarrolla gradualmente como resultado de exaltar los números, visualizarlos en una variedad de contextos y relacionarlos de maneras que van más allá de los algoritmos tradicionales. Con su introducción se pretende abrir la idea de número que debe adquirir el estudiante, implicándose en la resolución de problemas con instrumentos propios que no se limiten a los tradicionalmente empleados en la escuela (Mason, 1996).

Si bien podemos considerar que enseñar los contenidos matemáticos con sentido equivale a lo que Ausubel llamó enseñanza para un aprendizaje significativo, el concepto de sentido matemático corresponde al resultado final de ese aprendizaje, que lleve a desarrollar maneras flexibles de pensar sobre el contenido para usarlo en diversos contextos, proporcionando los elementos culturales que caracterizan ese contenido (Llinares, 2001).

Por tanto, la idea de sentido matemático reúne tres cualidades importantes: su carácter idiosincrático, es decir, dependiente del que aprende; comprende una diversidad de capacidades relacionadas, que permitan actuar con flexibilidad en situaciones en las que se aplica el contenido; y es posible estudiar las componentes que deben actuar de manera coordinada, para delimitar una cierta definición del aprendizaje final deseable, que será alcanzado en diverso nivel y profundidad por cada sujeto.

Como señala Smith (2005), es el aprendiz el que alcanzará cierto nivel de cada sentido matemático, impulsado por la curiosidad hacia el entorno, pero también por el grado en que maneje las componentes de cada sentido y las relacione entre sí. La cantidad y calidad de estos logros le dará mayor o menor flexibilidad para identificar situaciones en que se aplica el contenido, para llevar a cabo esta aplicación y resolver los problemas afrontados.

En la Didáctica de la Matemática se han empleado diversos procesos para llegar a caracterizar y definir los diferentes sentidos. Bien analizar las respuestas de los estudiantes a tareas que requieren poner en marcha los sentidos, como ha hecho Arcavi (1994) con el sentido de símbolo, o realizar delimitaciones estructurales, a partir de un estudio fenomenológico de las tareas que comportan las situaciones en que se usan los contenidos y las habilidades que se requieren para trabajarlas coordinadamente (p. e. NCTM, 2001; Sowder, 1992).

De manera simplificada, se desarrolla sentido matemático cuando se da sentido a los contenidos, elaborando significados, usando los contenidos en contexto, identificando las situaciones en que es importante emplear dicho contenido, y proponiendo soluciones a las cuestiones que los usos en contexto puedan generar. Este aprendizaje requiere interacción, negociación y comunicación con otras personas (Rico et al., 2015; Ruiz-Hidalgo, 2016).

El aprendizaje con sentido concreta las maneras de comprender y usar las matemáticas necesarias para el desarrollo de la competencia matemática y, a diferencia de la competencia, enfatiza habilidades concretas que se pueden desarrollar con elementos del contenido. De esta forma, el sentido se puede entender como una forma de pensar asociada a un contenido particular o, como se expresa en algunos documentos, como un conocimiento dentro de un dominio conceptual (Greeno, 1991).

Síntesis sobre sentido

Hemos presentado, por un lado, el sentido de un contenido matemático como una dimensión de su conocimiento y parte integrante del significado de dicho contenido, que nos facilita una manera de organizar el contenido matemático escolar. Esta organización es compatible y se enriquece con la combinación del criterio cognitivo (Hiebert y Lefevre, 1986) que organiza por campos de conocimiento conceptual y procedimental y del criterio disciplinar que la organiza por bloques, números, medida, espacio, …

Por otro lado, el sentido matemático es el resultado de un aprendizaje coordinado de las componentes que lo integran, que identificamos a partir de una profundización como profesores sobre el significado de dicho contenido. Por tanto, para caracterizar cada sentido tenemos que arrancar de examinar cuál es la función social del aprendizaje del contenido correspondiente, y posteriormente qué significa dicho contenido (elementos matemáticos estructurales, signos y situaciones), con lo que podremos determinar las componentes del sentido que tenemos que abordar en su desarrollo.

Presentamos así cinco sentidos matemáticos escolares de la enseñanza obligatoria: algebraico, espacial, estocástico, de la medida y numérico, atendiendo a los contenidos matemáticos de esta fase educativa, que comienza enfocándose en la cantidad, para abrirse al espacio y sus posibilidades de medida, posteriormente a la diferenciación del empleo matemático en situaciones aleatorias, y finalmente la introducción al lenguaje matemático de niveles superiores, como es el álgebra. Cada uno de ellos organizado en componentes o dominios de habilidades que, a su vez, se describen mediante habilidades más específicas.

Sentido Algebraico

El objetivo final del aprendizaje algebraico es ampliar el lenguaje matemático a la inclusión de términos no numéricos, promover su uso para expresar relaciones numéricas, generalizar resultados particulares y disponer de recursos para expresar relaciones entre magnitudes.

Uno de los grandes logros de la cultura humana es la introducción de letras y símbolos en los razonamientos matemáticos (Radford y Puig, 2007). El lenguaje simbólico está tan arraigado que muchas personas identifican el álgebra escolar con la simplificación de expresiones y la resolución de ecuaciones. De hecho, en muchos países ha dominado un punto de vista del álgebra escolar como manipulación de símbolos y su enseñanza se ha reservado para las etapas de secundaria y bachillerato (Kaput, 2008; NCTM, 2001).

Sin embargo, la consideración del sentido algebraico amplía esta visión del álgebra en la que no solo se tiene que tener en cuenta la parte estructural simbólica, sino que se incluyen aspectos de la utilidad del álgebra en la cultura, su papel en la historia, su influencia en otras áreas de conocimiento y su papel propedéutico dentro de la propia matemática. En otras palabras, el álgebra tiene dos identidades: por un lado, la manipulación sintácticamente guiada dentro de un sistema de organizado de símbolos. Por otro lado, el álgebra se presenta como la generalización y la expresión de generalizaciones que hace uso de un sistema convenido de símbolos, junto con el uso de la cantidad desconocida para expresar relaciones conocidas con las que obtener dicha cantidad (Kaput, 2008).

Para los aspectos simbólicos y su manipulación, algunas de las habilidades que manifiestan usarlos con su sentido son: identificar situaciones donde usar los símbolos, ejecutar cálculos simbólicos con fluidez y de diversas maneras, conectar el álgebra con la geometría, elegir símbolos con eficiencia, … (Arcavi, 1994; NCTM, 2009). Para los aspectos aplicados del álgebra, se pueden destacar habilidades como generalizar patrones, relacionar las propiedades de los números con la manipulación algebraica, relacionar las familias de funciones con determinadas expresiones algebraicas, analizar el efecto de los parámetros en las expresiones algebraicas, … (NCTM, 2009).

Existe cierto consenso en investigación en educación matemática en las clases de situaciones que conducen a que emerja y se desarrolle la comprensión algebraica y el sentido de los conceptos algebraicos y su uso (Berdnarz et al., 1996), que permite organizar el sentido algebraico en torno a cuatro componentes: Generalización de patrones numéricos, geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas; Resolución de problemas; Situaciones funcionales; Modelización de fenómenos físicos y matemáticos.

Generalización de patrones numéricos, geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas

Desde muy pequeños, los escolares resuelven tareas de clasificación y ordenación en las que aparecen secuencias de objetos. Al principio solo son expresadas verbalmente (rojo, azul, rojo, azul, …) y posteriormente serán descritas con patrones regulares. Mediante expresiones numéricas, la descripción se puede hacer sobre la regularidad (2, 4, 6, 8, … van de dos en dos) o sobre la secuencia (los números pares). En secundaria se pueden utilizar las letras para buscar expresiones que describan las secuencias como términos generales o relaciones entre variables. El uso de elementos geométricos ayuda a la traducción entre diferentes sistemas de representación y permite realizar justificaciones y demostraciones visuales de relaciones numéricas.

Resolución de problemas

La resolución de problemas ha tenido un papel fundamental en el desarrollo del álgebra y, además, es un elemento principal en su enseñanza. Los estudiantes que se enfrentan a problemas que requieren el razonamiento algebraico en secundaria poseen un bagaje de resolución de problemas aritméticos adquirido en la educación primaria. La transición entre aritmética y álgebra debe tener en cuenta la aparición del simbolismo algebraico, pero mucho más debe considerar las semejanzas y diferencias entre los razonamientos que se utilizan para plantear los problemas. Este análisis, además, permite descubrir las situaciones que ponen al límite la capacidad de los estudiantes para resolver problemas aritméticos y utilizarlas para motivar la evolución hacia el uso de las estrategias algebraicas o para evolucionar dentro de la propia álgebra (Bednarz et al., 1996).

Situaciones funcionales

Esta componente agrupa las habilidades relacionadas con el proceso de generalización de situaciones que dan lugar a relaciones funcionales entre magnitudes, donde expresar la generalización se puede pensar como la descripción de variaciones sistemáticas de casos a lo largo de un dominio (Kaput, 2008).

Usar múltiples representaciones de funciones

Incluyendo la simbólica, tabular y gráfica, hacer conversiones entre ellas y tomar decisiones de cuál utilizar en cada momento.

Identificar familias de funciones

Conocer características y comportamientos de algunas familias para aplicarlas a situaciones contextualizadas.

Análisis del efecto de los parámetros

Manipulación de parámetros en familias de funciones y el efecto que estos tienen en el comportamiento de las funciones de la familia.

Análisis del cambio

Prestando atención a la descripción de cambios, cualitativos y cuantitativos, desde los primeros cursos.

Modelización de fenómenos físicos y matemáticos

El proceso de modelado se basa en cierta verbalización que proporciona significado al simbolismo matemático que los estudiantes desarrollan gradualmente. El desarrollo de la habilidad de modelización favorece la introducción al álgebra a través de la noción de variable (Bednarz et al., 1996).

La modelización consiste en identificar las relaciones que existen en los datos de los problemas y situaciones, y de la expresión en diversos grados de simbolización de las cantidades que se relacionan. Se puede desarrollar en todos los niveles ofreciendo situaciones apropiadas: situaciones reales con objetos físicos (fichas, material manipulativo, …) o con representaciones orales o escritas (“cosa”, modelos cardinales, modelos lineales, …). Manejar estas representaciones permitirá expresar las relaciones para buscar las soluciones de las situaciones, interpretarlas o entenderlas mejor. Las situaciones irán aumentando su complejidad hasta que, en secundaria, utilicen las expresiones algebraicas para modelarlas. Más adelante, los símbolos se convertirán en funciones o en familias de funciones (NCTM, 2001).

Síntesis del sentido algebraico

El álgebra es un importante aporte cultural y tiene gran importancia en la formación de todos los ciudadanos. Además de su faceta simbólica, curricularmente aceptada y restringida a la secundaria y bachillerato, tiene otra faceta de generalización que hace énfasis en su utilidad y que puede ser desarrollada desde los primeros cursos de la educación primaria. Los componentes que organizan las habilidades a desarrollar son:

1. Generalización de patrones numéricos, geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas
2. Resolución de problemas
3. Situaciones funcionales
4. Modelización de fenómenos físicos y matemáticos.

Para lograr desarrollar este sentido, Kieran (2004) propone tres tipos de tareas: tareas de generación (en las que situaciones, propiedades, patrones y relaciones se representan o interpretan algebraicamente), tareas de transformación (manipulación algebraica) y tareas globales, que no son exclusivamente algebraicas, sino que se relacionan con el contexto en el que se están usando las herramientas algebraicas.

Sentido Espacial

La geometría abstrae los objetos reales y construye modelos ideales que analiza en un espacio sin imperfecciones y obtiene resultados que proporcionan información de utilidad en el mundo real. En general, es considerada la disciplina de las formas del espacio y las formas y sus medidas. Con su estudio escolar, se pretende que los estudiantes ganen destrezas para ubicarse en el espacio, para captar las posiciones y formas que lo constituyen, y con ello resolver situaciones que se plantean con relación a posiciones y formas. Se vale de modelos geométricos, apoyados en el razonamiento, la visualización y la orientación. Con ello, la persona puede identificar su posición y orientarse para localizar objetos en el espacio.

La construcción del pensamiento espacial se ha descrito con precisión de manera jerárquica (Van Hiele, 1986). Parte de un nivel visual en el que los estudiantes identifican y operan con formas y objetos geométricos de acuerdo con su apariencia. En un segundo nivel, descriptivo/analítico, los estudiantes reconocen y caracterizan formas de acuerdo con sus propiedades. En el tercer nivel, abstracto/relacional, los estudiantes pueden elaborar definiciones abstractas y utilizarlas de manera lógica para caracterizar conjuntos de objetos. Finalmente, en el nivel de la deducción formal, los estudiantes están capacitados para establecer teoremas dentro de un sistema axiomático (Clements y Battista, 1992).

A lo largo de todos los niveles, la identificación de elementos y relaciones geométricas a partir de una adecuada visualización, son herramientas fundamentales para evolucionar, pues el desarrollo de las habilidades del sentido espacial requiere generar una red de imágenes mentales de los conceptos geométricos. Estas imágenes se construyen mediante el trabajo con elementos formales como las propiedades, pero también con la actividad de mirar y explorar cuerpos geométricos reales. Siguiendo los niveles descritos, reconocemos: el papel de la manipulación de objetos físicos, mediante materiales como papel o juegos de espejos; la construcción de figuras, con regla y compás y materiales de construcción; la realización de teselados o mosaicos; la representación de cuerpos mediante la transformación de cuerpos geométricos en su desarrollo plano; la realización de croquis, lectura de mapas, etc.

El sentido espacial se puede definir como "la competencia de un sujeto para registrar y representar formas y figuras, reconocer sus propiedades, identificar relaciones entre ellas, ubicarlas y describir sus movimientos. Por ello, el sentido espacial se refiere a las capacidades de un individuo para trabajar e interactuar en un entorno amplio, elaborar o descubrir imágenes de formas y figuras, clasificarlas, relacionarlas y razonar con ellas" (Flores et al., 2015, p. 129).

Las habilidades del sentido espacial se organizan en dos grandes componentes: el manejo de conceptos geométricos y de las representaciones del espacio y la visualización espacial.

Manejo de conceptos geométricos y de las representaciones del espacio

El manejo de conceptos geométricos hace referencia a la identificación de elementos geométricos, conocimiento de sus propiedades, pero también las relaciones entre sus elementos que permitan realizar clasificaciones o descripciones, y la comprensión de los movimientos.

Analizar las propiedades de las figuras y los cuerpos geométricos

Incluye la identificación, la construcción, la caracterización, ... de formas geométricas usando con rigor el vocabulario apropiado y las representaciones con precisión mediante el uso de diversos materiales. En los primeros cursos, se puede fomentar la descripción de objetos reales usando términos geométricos y la identificación de similitudes y diferencias entre los objetos que permitan clasificarlos. Las descripciones deben ir siendo cada vez más precisas y los atributos cada vez más abstractos hasta llegar a un uso del vocabulario preciso y riguroso, a entender las definiciones y hacer justificaciones convincentes ajenas a los casos particulares.

Reconocer y establecer relaciones geométricas y razonar matemáticamente sobre estas relaciones

Un estudiante que termine la educación secundaria debe ser capaz de utilizar todo el vocabulario relativo a las relaciones geométricas en su vida cotidiana, bien para dar posiciones relativas de objetos reales como para razonar y justificar matemáticamente.

Aplicar transformaciones geométricas y usarlas para analizar situaciones

Se trata de desarrollar habilidades de descripción, construcción y representación que permitan analizar situaciones en las que hay que comparar objetos por su forma y su tamaño, así como identificar qué transformaciones se han realizado en un objeto para generar uno nuevo. Además del trabajo matemático y las habilidades de descripción, el trabajo con transformaciones debe ir acompañado de la utilidad real, como el análisis de la influencia de la geometría en el arte.

Orientación espacial

Comprende las destrezas de determinación de lugares, la descripción de relaciones espaciales y concluye con la utilización de referentes, como las coordenadas geométricas. Comienza, en los primeros cursos con la identificación de la posición relativa de objetos usando referentes, “estar cerca de …”, “dentro de…” y la familiarización con el vocabulario específico. Más adelante, el trabajo con mapas y escalas, permite relacionar la geometría con la medida. En los últimos cursos de primaria y en la educación secundaria, los sistemas de representación se van haciendo más variados y las tecnologías de la información y la comunicación favorecen experiencias reales de lectura, interpretación y toma de decisiones en las que se aprecia el sentido de estas habilidades.

Visualización

La componente de visualización se refiere al conjunto de habilidades y destrezas que permiten identificar los elementos en el espacio. La visualización es “el conjunto de tipos de imágenes, procesos y habilidades necesarios para que los estudiantes de geometría puedan producir, analizar, transformar y comunicar información visual relativa a objetos reales, modelos y conceptos geométricos” (Gutiérrez, 2006, p. 38).

Estas destrezas se desarrollan con la manipulación de objetos, moviéndolos, comparándolos, girándolos, … y discutiendo semejanzas y diferencias en sus propiedades. Dada la naturaleza abstracta de los elementos geométricos, la visualización se requiere para identificarlos y manejarlos. En los primeros años de escolarización, la visualización se basa en la manipulación con objetos, y al avanzar en los cursos, se irán creando representaciones diferentes de los objetos, empleando materiales como geoplanos, cuadrículas o aplicaciones de geometría dinámica. La visualización se hace más necesaria para pasar de las tres a las dos dimensiones, valiéndose de diferentes representaciones, como las diferentes vistas de un objeto (planta, alzado y perfil), los desarrollos planos de los cuerpos, o el uso de materiales de construcción, que enlazan los elementos espaciales con los planos.

Síntesis del sentido espacial

El sentido espacial se organiza alrededor de dos componentes y sus respectivas habilidades, que lejos de ser independientes, están íntimamente enlazadas:

1. Manejo de conceptos geométricos
2. Visualización

El desarrollo de las destrezas se consigue con la propuesta de tareas escolares que fomenten tres acciones básicas: construir, representar y describir. Estas acciones se han de realizar tanto con objetos formales como con variedad de objetos manipulables, donde la tecnología adquiere un papel fundamental en la enseñanza de la geometría. Las herramientas de geometría dinámica proporcionan una modelización de gran diversidad de figuras de dos y tres dimensiones y permiten una manipulación sencilla, facilitando entornos de trabajo e infinidad de ejemplos para enunciar y probar conjeturas, lo que favorece el aprendizaje de la generalización y demostración (NCTM, 2001).

Sentido Estocástico

Las ideas de cultura estadística, alfabetización estadística, competencia estadística, y en este caso de sentido estadístico, pretenden delimitar que el aprendizaje estadístico debe ir más allá del dominio de los elementos que se emplean, para comprender su función como rama imprescindible del razonamiento científico experimental. Por tanto, el objetivo debe comenzar por identificar la naturaleza aleatoria de los fenómenos, para posteriormente examinar qué tipo de razonamientos y modelos matemáticos pueden ponerse en juego para afrontar este tipo de estudios.

En la sociedad del s. XXI, las herramientas que proporcionan la estadística y la probabilidad son necesarias para una ciudadanía competente (Ben-Zvi y Garfield, 2004). Ser capaz de gestionar y evaluar datos de manera apropiada y tomar decisiones basadas en ellos es una destreza que todos los estudiantes que terminan la educación secundaria deberían poseer.

El sentido estocástico recoge el conjunto de capacidades “para hacer frente a una amplia gama de situaciones cotidianas que implican el razonamiento y la interpretación de datos, la elaboración de conjeturas y la toma de decisiones a partir de la información estadística, su valoración crítica y la comprensión y comunicación de fenómenos aleatorios, y la capacidad de realizar algunas predicciones” (CEMAT, 2021, p. 35).

En los últimos años, las investigaciones en educación matemática han logrado cierto acuerdo en la organización de los contenidos y en los elementos del razonamiento estadístico (Batanero et al., 2013). En este capítulo, escrito desde una base curricular, adoptamos una postura que distingue la estadística sin probabilidad o estadística descriptiva y la estadística con probabilidad o estadística inferencial (Burrill y Biehler, 2011). Así, consideramos que las componentes que organizan el sentido estocástico son: identificación de la aleatoriedad, estudio de datos, comprensión y aplicación de los conceptos básicos de la probabilidad, percepción de la variabilidad y razonamiento con modelo estadísticos y desarrollo, y evaluación de inferencias y predicciones.

Identificación de la aleatoriedad

A diferencia del resto de sentidos, los contenidos del sentido estocástico tienen un punto de partida claro: la incertidumbre. Hay, por tanto, una componente transversal del sentido estocástico es la de reconocer la incertidumbre. La incertidumbre puede mostrarse de diferentes maneras y puede ser debida a múltiples causas, por lo que es importante que los estudiantes diferencien los fenómenos de naturaleza determinista de los de naturaleza aleatoria, para que el estudio de la estadística y la probabilidad se realice en situaciones en las que tenga sentido.

Estudio de datos

El estudio de los datos incluye un grupo amplio de habilidades que permiten comprender cómo se distribuyen los mismos y favorecen su descripción con el fin de tomar decisiones basadas en los mismos.

Formular preguntas y reconocer la necesidad de los datos

La curiosidad por el mundo que los rodea lleva a las personas a hacerse preguntas que, en muchos casos solo pueden ser respondidas mediante el análisis de datos, pues los casos particulares no son fiables. La orientación de las preguntas debe evolucionar con los intereses del alumnado a lo largo de la etapa escolar, teniendo siempre presente que solamente tendrá sentido abordar desde la estadística preguntas cuyas respuestas estén sujetas a variabilidad o incertidumbre.

Recoger, organizar y presentar los datos

La recogida, organización de los datos y la presentación de su distribución está relacionada con la habilidad del razonamiento estocástico conocida como transnumeración.

Los instrumentos de recogida al inicio serán proporcionados por el docente hasta que, al final de la etapa secundaria, sean los estudiantes quienes tomen decisiones sobre los procesos de recogida datos a través de encuestas, registros, estudios de observación y de experimentos. Al mismo tiempo que el alumnado desarrolla estrategias de recogida de datos, debe crecer su conocimiento sobre el significado de la muestra.

El alumnado deberá ir construyendo la noción de variabilidad de los datos y su distribución a la par que desarrolla formas de representación con diferentes niveles de complejidad idóneas al tipo de variable y el conocimiento de las mismas y de las herramientas digitales o no usadas para su creación. El uso de medidas está asociado a ver el conjunto de datos como un todo y a la descripción del conjunto en su totalidad sin necesidad de enumerar todos los elementos.

Comparar, asociar y correlacionar variables

Por último, y aunque se trata de una herramienta de los últimos cursos, es importante el uso de técnicas de correlación para tomar una decisión razonada sobre si dos variables estadísticas están asociadas.

Comprensión y aplicación de los conceptos básicos de la probabilidad

Basándose en la cuantificación del grado de incertidumbre de las situaciones aleatorias, el alumnado debería ser capaz de interpretar, realizar predicciones y tomar decisiones acordes con los valores cualitativos y/o cuantitativos asignados a las probabilidades en las diferentes situaciones de aprendizaje.

Comenzando con una valoración cualitativa y una familiarización con el vocabulario, el inicio de la cuantificación puede partir del uso de la frecuencia en situaciones en las que se dispongan de datos. La noción frecuentista de probabilidad se consolida mediante el uso de herramientas tecnológicas que permiten realizar simulaciones.

Percepción de la variabilidad y el razonamiento con modelos estadísticos

Cuando los datos no pueden ajustarse a un modelo hablamos de variabilidad aleatoria. Es necesario percibir la variabilidad e identificar fuentes que la producen. En los últimos cursos de primaria los estudiantes al interpretar los datos en contexto y tomar decisiones o hacer predicciones a partir de la información, deben ser conscientes de que la variabilidad influirá en sus inferencias. En bachillerato, la variación se concreta en el cálculo de intervalos de confianza y su uso para interpretar situaciones.

La comprensión de dichos modelos debe centrarse en la integración y transferencia de las ideas de distribución (de datos, de probabilidad, muestral).

Desarrollo y evaluación de inferencias y predicciones

A lo largo de la educación escolar deben proponerse situaciones de aprendizaje que permitan construir y reconstruir de forma conjunta las ideas de inferencia informal, muestra y predicción. Desde los inicios donde el alumnado se plantee las primeras cuestiones en situaciones de incertidumbre y con pequeñas muestras realice predicciones, hasta bachillerato donde los cálculos asociados de las distribuciones probabilísticas permitan apoyar las hipótesis de predicción e iniciarse en la inferencia estadística.

Síntesis del sentido estocástico

El desarrollo de habilidades de estadística y probabilidad es necesario para el ciudadano actual. A lo largo del período escolar, los contenidos se organizan según las siguientes componentes del sentido estocástico:

1. Identificación de la aleatoriedad
2. Manipulación de datos
3. Comprensión y aplicación de los conceptos básicos de la probabilidad
4. Percepción de la variabilidad y el razonamiento con modelo estadísticos
5. Desarrollo y evaluación de inferencias y predicciones

Para enfatizar estos usos, se debe trabajar con datos cercanos al estudiante, facilitar su interpretación, apoyarse en herramientas tecnológicas y fomentar el aprendizaje activo mediante: sesiones de exposición y discusión de resultados o elaboración de proyectos y puestas en común.

Sentido de la Medida

Medir es un procedimiento que nos permite organizar nuestro entorno mediante la comparación y la cuantificación. Desde la aparición de la geometría como medida de la tierra a la actual cuantificación de datos para su procesamiento por inteligencias artificiales, la medida es una necesidad de nuestra sociedad y el desarrollo científico y tecnológico. También, en la vida cotidiana, desde muy pequeños, comparamos nuestros logros con los de los demás, “quién gana más”. Escolarmente, en matemáticas, está íntimamente relacionada con la cantidad, las operaciones, los conceptos geométricos, la probabilidad, la estadística y con las funciones. Además, tiene vínculos cercanos con otras áreas de conocimiento: las ciencias sociales, el arte o la educación física y, por supuesto, con todas las ciencias, la tecnología y la ingeniería.

Su cotidianidad y su potencial de conexiones subrayan dos características del proceso de enseñanza de la medida. Por un lado, requiere comprender las cualidades que la ciencia ha establecido como magnitudes interesantes para resolver los problemas, y por otro, familiarizarse con los procedimientos de medida de las magnitudes más comunes, las unidades y los instrumentos.

Esto implica que su enseñanza se vincule a la detección de cualidades a partir de la manipulación de materiales y objetos específicos, y promueva la realización de medidas, antes de operar con medidas de una magnitud para obtener medidas de otras.

El sentido de la medida se evidencia cuando se posee una comprensión amplia de todo el proceso de medir en la que se manifiestan múltiples conexiones, con las que el estudiante dispone de estrategias variadas y de criterios de decisión sobre la manera más apropiada de realizar una medida y de usarla en situaciones concretas (Shaw y Cliatt, 1989; Moreno et al. 2015). El sentido de la medida relaciona el conocimiento de los conceptos que caracterizan a las magnitudes más usuales (longitud, superficie, etc.) con los de sus medidas (unidades, instrumentos, procedimientos directos s indirectos)

El proceso de medir parte de la identificación de las cualidades de los objetos que permiten cuantificarlos, se continua con procesos de comparación y ordenación de cantidades, antes de pasar a elegir unidades de medida no estándares para terminar en las reconocidas en el mundo científico. Sólo entonces se estará en disposición de estimar medidas de objetos, familiarizarse con los instrumentos apropiados para proporcionar un resultado sensato de la medida en el contexto en el que esté trabajando. Este proceso sugiere unos grupos de habilidades que organizan el sentido de la medida: reconocimiento de cualidades comparables y medibles, comprensión del proceso de medir, estimar en medida y medida del cambio.

Reconocimiento de cualidades comparables y medibles

El primer paso para aprender a medir es identificar y diferenciar cualidades comparables o atributos observables de los objetos, como son la longitud, la capacidad, la masa, la temperatura, etc.

La elección de una cualidad y su comparación directa permite iniciarse en la medida a través del uso de expresiones como “más largo”, “más ligero” o “menos frío”. Algunas comparaciones son visuales o perceptivas, como la temperatura, y otras necesitan manipulación de objetos, como la comparación de longitudes por superposición. Gracias a la comparación se podrá llegar a la ordenación de cantidades de magnitud.

La evolución del reconocimiento de las cualidades debe ir orientada hacia la noción de magnitud y la identificación de diferentes aspectos de los objetos que representan una misma magnitud, como el perímetro de las figuras, el ancho y alto de los objetos, etc. En cursos posteriores aparecerán las magnitudes derivadas, como la velocidad o las magnitudes adimensionales como la amplitud angular.

Comprensión del proceso de medir

El proceso de medir es básico en las matemáticas escolares, y en él intervienen las unidades, los instrumentos y las estrategias de medida.

Conocimiento de las unidades de medida

Para determinar una medida de un atributo de un objeto se necesita un referente, la unidad de medida. La selección de unidades no estándar y su uso para obtener la medida da sentido al proceso de medir, pues lo vincula al uso de las cosas. La evolución escolar debe guiar a los estudiantes a familiarizarse con las unidades convencionales, como referentes para compartir las medidas realizadas. Con ello se llegará al conocimiento del sistema internacional de medida y del sistema métrico, que se irán ampliando progresivamente.

Aplicación de técnicas, instrumentos y fórmulas apropiados para medir

Las técnicas directas, como la comparación directa y la reiteración de la unidad, son las más apropiadas para comenzar a medir, pues proporcionan significado al proceso de medir. En los primeros cursos se usarán instrumentos de medida directa específicos y también unidades cuadradas, como cuadraditos, para la medida de áreas, o cubos para la del volumen.

Cuando se trabaje con objetos complejos, se verá la necesidad de emplear técnicas indirectas, primero mediante estrategias manipulativas, como descomponer objetos en formas más simples antes de comprender las relaciones que permiten obtener medidas de una magnitud en función de operaciones con medidas de otras (uso de fórmulas).

En secundaria se debe fomentar la toma de decisiones para seleccionar magnitudes, unidades e instrumentos más apropiados para resolver la situación a la que se enfrentan. Las asignaturas como física y química suministran contextos apropiados para trabajar las habilidades de medida.

Medida de una cantidad de magnitud

La medida de una cantidad de magnitud consta de un número y una unidad. Es importante que los estudiantes aprecien la importancia de compartir los resultados de manera que sean comparables, precisos y reproducibles.

Estimar en situaciones de medida

La estimación es una habilidad que se debe desarrollar en todas las etapas educativas. Para ello debería estimularse a los estudiantes a realizar predicciones sobre medidas, antes de llevar a cabo su medida directa. Se desarrolla mediante la comunicación y justificación durante puestas en común sobre las estimaciones realizadas. Progresivamente se orientará hacia el conocimiento de estrategias de estimación: internalización de unidades estándar (tener una imagen o idea de cuánto es un metro, cuánto pesa un kilo, …), familiarización con referentes o conocimiento de medidas de objetos cotidianos (como que un cartón de leche es 1 dm^3, cuál es tu altura, …), dominio de técnicas indirectas que permitan realizar cálculos aproximados, habilidad para comparar con objetos conocidos, y habilidad para aplicar estrategias de composición y descomposición para transformar las formas en otras más fáciles de medir.

Medida del cambio

La noción de tasa de variación aparece asociada a las funciones. Su comprensión y su medida son aprendizajes propios de la secundaria y el bachillerato. La medida de la variación y su interpretación en situaciones científicas es un paso indispensable para avanzar hacia las nociones de límite y de derivada.

Síntesis del sentido de la medida

El sentido de la medida organiza habilidades y destrezas de gran utilidad en la vida cotidiana, que son necesarias para el aprendizaje de otras áreas de conocimiento y que permiten establecer conexiones con otros dominios de la matemática, como los números o la probabilidad. Esta organización está dada por cuatro componentes:

1. Reconocimiento de las magnitudes como cualidades comparables y medibles
2. Comprensión del proceso de medir, que incluye el conocimiento de las unidades de medida, la aplicación de técnicas, instrumentos y fórmulas y la medida de una cantidad de magnitud
3. Estimación en situaciones de medida
4. Medida del cambio

Su enseñanza con sentido debe fomentar la manipulación de objetos que permitan comparar cualidades y el de las unidades e instrumentos apropiados para las magnitudes habituales, antes de llevar al aprendizaje de técnicas de cálculo indirectas.

Sentido Numérico

El número es, sin duda, el contenido con más influencia en el currículo de matemáticas. La mayoría de las tareas que podemos encontrar en los libros de texto y que se proponen en una clase de matemáticas están basadas en el número. El fin de su enseñanza es que los estudiantes se familiaricen con las situaciones que modeliza la aritmética y desarrollen destrezas que les permitan afrontar estas situaciones, tan comunes en nuestra sociedad.

Los contenidos curriculares referidos a los números son muy extensos a lo largo de la educación no universitaria, como lo son las situaciones que permiten comprender y resolver.

No hay una definición consensuada de sentido numérico, pero se aceptada generalmente la expresada por Howden (1989), para el que el "sentido numérico se desarrolla gradualmente como resultado de explorar los números, visualizarlos en variedad de contextos y relacionarlos de manera que no se limiten por los algoritmos tradicionales" (p. 11). Esta idea de sentido numérico subraya, por un lado, que se trata de una competencia cognitiva, como una forma de pensar y razonar; y, por otro, que está focalizado en el dominio de los números y las relaciones (Castro y Segovia, 2015; Llinares, 2001).

Algunas de las características del sentido numérico son (Sowder, 1992):

1. Teje una red conceptual que permite a las personas relacionar números con propiedades de las operaciones.
2. Permite emitir juicios cuantitativos y cualitativos sobre la razonabilidad de resultados de problemas numéricos.
3. Se manifiesta cuando se utilizan formas de resolución flexibles y creativas al resolver problemas que involucran números y cuando se generan o utilizan algoritmos no convencionales.

Siguiendo la caracterización de Sowder (1992), lo importante del sentido numérico es relacionar, emitir juicios, actuando con flexibilidad, frente a problemas que permiten emplear los números. Por tanto, aunque son muchas las habilidades deseables para ello, lo importante es el trabajo coordinado de sus componentes. Tres grandes componentes permiten organizar el sentido numérico: la comprensión de los números y las relaciones numéricas; la comprensión de las operaciones; la flexibilidad en el cálculo mental y estimado.

Comprensión de los números, los sistemas numéricos y las relaciones numéricas

Se han elaborado muchas habilidades que tienen que ver con comprender qué es el número, que se manifiestan de manera diferente dependiendo del sistema numérico que se está considerando y del curso en el que se quieran desarrollar.

Reconocer cómo y cuándo usar los números y qué números usar

Se trata de familiarizarse y diferenciar los usos que tienen los números. El número natural, se usa para contar, para medir, para ordenar, … e incluso para escribir códigos. Los estudiantes deben identificar que uso se está haciendo y qué propiedades tienen: no tiene sentido sumar números de teléfono, aunque sean números.

En los niveles superiores se manifiesta mediante la elección del conjunto numérico a usar en cada momento, a relacionar diferentes conjuntos numéricos y las propiedades que se conservan al pasar de un sistema a otro.

Percibir la magnitud de los números

Si se refiere a la magnitud absoluta, abarca hacerse una idea de la dimensión de una cantidad numérica, lo que le permite apreciar si es razonable un dato (¿pueden asistir 10 millones de espectadores a un concierto?) o un resultado. Pero también la necesidad de precisión en el problema (¿qué cantidad de decimales es necesario considerar para este problema?).

Cuando se refiere a la magnitud relativa de los números, incluye las habilidades para comparar y ordenar números, por lo que es pertinente en casi todos los niveles educativos. Se considera dentro de esta habilidad la comprensión de la densidad de los racionales y de la noción de continuo para números reales, teniendo que ver también con la comprensión de los procesos infinitesimales.

Habilidad para usar referentes

Se trata de desarrollar habilidades asociadas al uso de elementos de referencia o el conocimiento de hechos numéricos. Se usan elementos de referencia cuando se parte de que la suma de dos números menores que uno siempre será menor que 2. Ejemplos de hechos numéricos son que se conozca que un número natural de dos dígitos siempre es menor que uno de tres dígitos, que automatiza la división entre potencias de diez es lo mismo que desplazar la coma decimal, o que la suma de un real con un número complejo es un número complejo. Pero también lo es conocer resultados de operaciones numéricas, como que $2^{10}=1024$.

Conocer distintas representaciones de los números y usar la más adecuada

Los estudiantes deben conocer que un número se puede expresar de diversas formas y decidir cuál es más apropiada en cada situación.

El uso de materiales manipulativos o de modelos numéricos es una forma de representación y manipulación de los números que permite asociar el empleo del material al uso del número en determinadas situaciones, especialmente en los primeros cursos de primaria. Así, por ejemplo, cuando se trabaje con una situación de orden de los números enteros, la representación de los números como recta o línea numérica permite la asociación del orden numérico con la posición izquierda-derecha.

Comprensión de las operaciones

La comprensión de las operaciones se refiere a asociar las operaciones con las acciones que le corresponden para poder decidir qué operación realizar para resolverla.

Comprender el efecto de las operaciones sobre los números

Cuando se trabaja con números naturales la suma aumenta, mientras que la resta disminuye la primera cantidad. Como esto no ocurre en los enteros, los estudiantes deben aprender comportamientos diferentes respecto a las operaciones.

Elegir el procedimiento más sencillo para operar y usar algoritmos diferentes al estándar

Esta habilidad enfatiza el conocimiento de los significados de las operaciones y permite a los estudiantes tomar decisiones sobre qué manera es más eficiente para operar en cada situación.

En los primeros cursos, la suma y resta pueden centrarse en propiedades del sistema de numeración y la composición y descomposición de los números. En cursos intermedios, se fomenta el uso de algoritmos no estándar para obtener resultados rápidos y correctos. Más adelante, se anima al estudiante a que decida qué algoritmo es más eficiente para la situación. Una evolución adecuada de esta habilidad lleva al uso eficiente de la calculadora discutiendo sus resultados, y apreciándola como herramienta más efectiva, pero no necesariamente más útil en todas las situaciones.

Aceptar diferentes estrategias para resolver problemas que involucren números

Fomentar el uso de procedimientos diferentes para la resolución de un problema y aceptarlo hace que el estudiante desarrolle diversidad de razonamientos y estrategias para resolver problemas. Esta habilidad favorece interpretaciones personales, así como la importancia de los significados de los conceptos más que los procedimientos.

Flexibilidad en el cálculo mental y estimado

Frente a la rigidez del cálculo tradicional de lápiz y papel, la flexibilidad en el cálculo mental y estimado, recoge aquellas habilidades que amplían la conexión entre la comprensión de los números y las operaciones.

Habilidad para realizar cálculos mentales

Enfatiza el uso de diversas destrezas para realizar cálculos mentales aprovechando las propiedades de los números y las operaciones. Por ejemplo, extender los hechos numéricos básicos a números de mayor cantidad de cifras, aplicar estrategias particulares a números determinados, descomposiciones y composiciones, etc.

Habilidad de usar números de forma flexible para estimar cálculos

Comenzar por estimar el resultado de una operación, mediante métodos de aproximación, redondeo, traslación, compensación, etc., especialmente en situaciones contextualizadas, es de mucha importancia para poder apreciar la coherencia con los procesos de cálculo que se realicen.

Discernir en qué ocasiones se ha de dar un valor exacto y cuándo es posible dar un valor aproximado

Un elemento clave de la flexibilidad de cálculo, y del sentido en general, es la toma de decisiones. En la vida real, salvo en situaciones profesionales o científicas, es muy limitado la necesidad de resultados precisos. Entre amigos no se utilizan cantidades exactas, sino que aproximamos casi siempre. El trabajo con problemas y situaciones contextualizadas permite discutir y adaptar las respuestas dependiendo del contexto.

Síntesis del sentido numérico

Las componentes del sentido numérico resumen aspectos que deben contemplarse de manera coordinada. El desarrollo de cada una de ellas debe apoyarse en las habilidades de las otras. Desde un punto de vista cognitivo, resulta muy difícil que un estudiante avance en una de ellas sin hacerlo en otras. Por tanto, cuando se desarrolla el sentido numérico, se desarrolla:

1. La comprensión de los números, los sistemas numéricos y las relaciones numéricas
2. La comprensión de las operaciones
3. La flexibilidad en el cálculo mental y estimado

No se debe olvidar que se trata de conseguir enlazar la numeración, las operaciones y los símbolos de manera flexible que permita que los números tengan sentido para los estudiantes, mediante la interpretación de cantidades, operatoria variada y, sobre todo, toma de decisiones en situaciones contextualizadas, bien identificando las cantidades y las operaciones con las que resolver o interpretar un problema, o bien, en caso de que no dispongan de un modelo matemático de resolución, buscando estrategias de resolución variadas y siendo conscientes de la validez de las soluciones.

Referencias

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal Mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*(3), 24-35.

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 83*, 7-18.

Bednarz, N. Kieran, C. y Lee, L. (1996). Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching. In N. Bednarz, C. Kieran, y L. Lee, (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 3-12). Kluwer Academic.

Ben-Zvi, D. y Garfield. J. (2004). Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking: Goals, Definitions, and Challenges. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The Challenge of Developinf Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 3-15). Sringer-Science+Business Media, B. V.

Bruner, J. (2009). *Actos de significado. Más allá de la revolución cognitiva*. Alianza Editorial.

Burrill, G, y Biehler, R. (2011). Fundamental Statistical Ideas in de School Curriculum and in Trainign Teachers. En C. Batanero, G. Burrill, y C Reading (Eds.*), Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 57-69). Springer Science+Business Media B.V.

Castro, E. y Segovia, I. (2015). Sentido numérico. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria* (pp. 109-126). Ediciones Pirámide.

CEMAT (2021). Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en educación no universitaria. Comité español de Matemáticas. https://matematicas.uclm.es/cemat/wp-content/uploads/bases2021.pdf

Clements, D. H. y Battista, M. T. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. En D. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420-464). Macmillan.

Flores, P., Ramírez, R. y del Río, A. (2015). Sentido espacial. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria* (pp. 127-146). Ediciones Pirámide.

Freudenthal, F. (2002). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Kluwer Academic Publishers.

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(3), 170-218.

Gutiérrez, A. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. En P. Flores, F. Ruiz y M. de la Fuente (Coords.), *Geometría para el siglo XXI* (pp. 13-58). FESPM y SAEM THALES.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 128). Routledge.

Howden, H. (1989). Teaching number sense. *Arithmetic Teacher, 26*(6), 6-11.

Kaput, J. J. (2008). What is Algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early* Grades (pp. 5-17). Lawrence Erlbaun Associates and National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (2004). The core of Algebra: Reflections on its main activities. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal, (Eds.). *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study* (pp. 21-33).Kluwer Academic.

Llinares, S. (2001). El sentido numérico y la representación de los números naturales. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación prim*aria (pp. 151-175). Síntesis.

Mason, J. (1996). El futuro de la aritmética y del álgebra: utilizar el sentido de la generalidad. *UNO: Revista de didáctica de las matemáticas, 9*, 14-22.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022a). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. En *BOE n. 52,* de 2 de marzo de 2022 (p. 24386-24504). Madrid: Autor.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022b). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. En *BOE n. 76,* de 30 de marzo de 2022 (p. 41571-41789). Madrid: Autor.

Montes, M., Codes, M. y Contreras, L. C. (2022). Consideraciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. En L. Blanco, N. Climent, M. T. González, A. Moreno, G. Sánchez-Matamoros, C. de Castro y C. Jiménez (Eds.), *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en Educación Matemática* (pp. 37-54). Editorial Universidad de Granada.

Moreno, M.F., Gil, F. y Montoro, A. B. (2015). Sentido de la medida. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria* (pp. 147-170). Ediciones Pirámide.

NCTM (2001). *Principios y estándares para la Educación Matemática*. The National Council of Teachers of Mathematics y Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES.

NCTM (2009). *Focus in High School Mathematics. Reasoning and Sense Making*. The National Council of Teachers of Mathematics.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Horsori.

Radford, L. y Puig, L. (2007). Syntax and meaning as sensuous, visual, historical forms of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics, 66*, 145-164.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1*, 39-63. doi: https://doi.org/10.35763/aiem.v1i1.4

Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 33*, 11-27.

Rico, L. (2016a). Matemáticas y análisis didáctico. En L. Rico y A. Moreno (Coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 85-100). Ediciones Pirámide.

Rico, L. (2016b). Significados de los contenidos matemáticos. En L. Rico y A. Moreno (Coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 153-174). Ediciones Pirámide.

Rico, L., Flores, P. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2015). Enseñanza de las matemáticas con sentido. *UNO: Revista de didáctica de las matemáticas, 70*, 48-54.

Ruiz-Hidalgo, J. F. (2016). Sentido y modos de uso de un concepto. En L. Rico y A. Moreno (coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 139-151). Ediciones Pirámide.

Shaw, J. M. y Cliatt, M. J. P. (1989). Developing Measurement Sense. In P. R. Trafton (ed.), *New Directions for Elementary School Mathematics: 1989 Yearbook* (pp. 149-155). The National Council of Teachers of Mathematics.

Smith, F. (2005). *El muro de cristal. Por qué las matemáticas parecen tan difíciles*. Movimiento Cooperativo de Escuela Popular.

Sowder, J. (1992). Making sense of numbers in school Mathematics. En G. Leinhardt, R. Putnam y R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching* (pp. 1-51). Routledge.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. Academic Press.

La evaluación en matemáticas

Assessment in Mathematics

Chamoso, J. M.[a], Cáceres, M. J.[a] y Cárdenas, J. A.[b]
[a] Universidad de Salamanca, [b] Universidad de Extremadura

Resumen

En este capítulo se introducen algunas situaciones reales que invitan a reflexionar sobre la evaluación en matemáticas. Se explica de manera práctica la información necesaria para seguir el capítulo; se sugieren y ejemplifican prácticas de evaluación, entre ellas, el uso de instrumentos como el portafolios y las rúbricas de valoración o la incorporación de algunas tareas que permitan valorar algo más que el mero uso del concepto o del algoritmo; también se presenta una guía de evaluación que puede ser de ayuda para mejorar esta práctica. El capítulo finaliza con algunas reflexiones sobre las cuestiones planteadas al inicio y ofrece un decálogo, junto a unos puntos de partida, que intentan facilitar la planificación y puesta en práctica de una evaluación formativa que involucre a los estudiantes y promueva el avance de su aprendizaje matemático.

Palabras clave: Evaluación formativa, Matemáticas, Criterios de evaluación, Métodos de evaluación, Portafolios, Rúbrica.

Abstract

This chapter introduces some real situations that invite reflection on the assessment in mathematics. From this, the necessary information to follow the chapter is explained in a practical way; some assessment practices are suggested and exemplified, among them, the use of instruments such as portfolios and assessment rubrics or the inclusion of tasks that allow evaluating something more than the mere use of the concept or the algorithm; an assessment guide is also presented that can be of help to improve this practice. The chapter ends with some reflections on the questions raised at the beginning and offers a decalogue, along with some starting points, which try to facilitate the planning and implementation of a formative assessment that involves students and promotes the advancement of their mathematical learning.

Keywords: Formative assessment, Mathematics, Assessment criteria, Assessment methods, Portfolios, Rubric.

Antes de empezar: Algunos sucedidos reales y algunas preguntas

Se incluyen algunos sucedidos reales relacionados con evaluación en matemáticas, surgidos en diversos contextos y niveles educativos. Unos están centrados en la actuación del docente, otros en la de los estudiantes y otros en los instrumentos de evaluación. Algunas preguntas pueden ayudar a reflexionar.

> Sucedido 1: En un curso universitario del Grado de Ingeniería, un profesor estaba preparando el examen final de una asignatura de matemáticas y pidió a un compañero cercano:
>
> – "Necesito una integral interesante para el examen, ni muy fácil ni muy difícil.
> – "¿Vas a incluir una integral entre las preguntas del examen final? ¿Es importante saber resolver integrales para ser ingeniero?
> – "No sé. Nunca lo había pensado. Cuando estudiaba siempre ponían una integral en el examen de esta asignatura y ya, como profesor, llevo haciéndolo así desde hace más de 20 años. Los estudiantes lo esperan".

Pregunta: ¿Hay que poner una pregunta en el examen por costumbre o porque otros profesores lo hacían antes? ¿No se trata de relacionar la evaluación de una asignatura con los objetivos de aprendizaje, conectándola con los objetivos globales del Grado correspondiente?

> Sucedido 2: En una ocasión, un maestro de Primaria estaba calificando los trabajos de matemáticas de los estudiantes. Tras corregir algunos, se dio cuenta de que habían entendido mal la explicación que él había dado en el aula. Quizás él lo había explicado mal. Reflexionó sobre ello. "Lo hecho, hecho está y hay que avanzar en el curso".

Pregunta: ¿Cómo se valoraría a un estudiante que respondiese una pregunta mal pero que recogiera lo que el profesor dijo que, por circunstancias o error, lo explicó mal? Aunque quizás el maestro fuera el responsable, las respuestas indicaban que los estudiantes no lo tenían asimilado, algo que podría repercutir en aprendizajes posteriores.

> Sucedido 3: En un aula de Secundaria varios estudiantes discutían sobre un examen cercano de matemáticas. Uno de ellos dijo: "No sé si sabré hacerlo bien. Lo intentaré, pero, en cualquier caso, voy a escribir todos los pasos de manera ordenada. Al profesor le gusta que todo esté ordenado y estoy seguro de que, de esa forma, conseguiré aprobar".

Pregunta: Una respuesta, ¿se debe confeccionar según el criterio del estudiante o intentando agradar el pensamiento del profesor?

> Sucedido 4: Un estudiante de segundo de Bachillerato no confiaba en sus capacidades en matemáticas, pero tenía interés en superar la asignatura. Dijo: "En las pruebas finales escritas de cada evaluación, que deciden la calificación final, siempre hay 5 preguntas: dos teóricas y tres problemas, uno resuelto en clase, otro similar a los resueltos en clase, pero con los datos cambiados, y uno diferente a los realizados en clase. Lo tengo claro, de memoria, me estudio la teoría y todos los problemas realizados en clase. Así, en el examen, primero completo la teoría y el problema resuelto en clase; después, intento resolver el problema con los datos cambiados; el problema diferente ni lo miro. Siempre consigo entre 6 y 8, dependiendo de lo que sea capaz de hacer en el problema con los datos cambiados, aunque realmente no entiendo nada".

Pregunta: Si el estudiante no entiende nada, ¿esa valoración realmente valora el aprendizaje del estudiante?

> Sucedido 5: En una reunión de evaluación en un centro de Secundaria, dos profesores de matemáticas discutían sobre las valoraciones de varios estudiantes que tenían dificultades para superar la asignatura. De repente, uno de ellos dijo: "Hay cuatros y cuatros".

Pregunta: ¿Hay cuatros y cuatros? ¿No es un 4 siempre un 4? ¿Quizás ese 4 no refleje todo lo que conlleva y, previamente, habría que haber utilizado una rúbrica de valoración más precisa?

> Sucedido 6: En un curso universitario del Grado de Estadística, el docente, cansado de responder las preguntas de los estudiantes en la revisión de calificaciones, decidió realizar la prueba final de calificación de la asignatura en forma de cuestionario de respuesta múltiple de manera que las respuestas de los estudiantes se puntuaran mecánicamente. De esa forma, la calificación era objetiva y evitaba apreciaciones personales. De repente, Ana, una estudiante, acudió a la revisión de calificaciones, revisó su trabajo, lo comparó con las respuestas correctas y preguntó al profesor: "Tengo un 4,95. ¿Es suspenso o aprobado? Supongo que suspenso, ¿no?". "Tú lo has dicho" contestó el profesor.

Pregunta: ¿Valorar que el aprendizaje de un estudiante es suficiente para superar una asignatura puede ser 5 y no serlo 4,95?

> Sucedido 7: En un curso universitario del Grado de Psicología, el docente realizaba la prueba final de calificación de la asignatura de matemáticas en forma de test. Carlos, un estudiante que había seguido escasamente el desarrollo de la asignatura durante el curso, pero que había estudiado duro en las últimas semanas, salió muy contento de la prueba final diciendo: "Apruebo seguro y, quizás, con

nota". Al hacerse públicas las calificaciones, Carlos estaba suspenso. Carlos fue a la revisión de calificaciones y el profesor le explicó que ponía las calificaciones en función de las respuestas correctas de todos los estudiantes según un criterio establecido al inicio del curso, del que se había informado públicamente. Se consideraban las calificaciones finales ordenadas de todos los estudiantes y el 22% más bajo era suspenso, el 25% siguiente era aprobado, el 25% posterior era notable, el siguiente 22% sobresaliente y el 6% restante, matrícula de honor. Carlos tuvo 36 respuestas correctas de las 40 posibles, pero, a pesar de ello, su calificación estaba en el 22% inferior de las de todos los estudiantes del curso.

Pregunta: ¿Se debe evaluar en función del nivel de los estudiantes? ¿No se trata de valorar el aprendizaje de cada estudiante?

Sucedido 8: En una ocasión, un estudiante de Primaria le dijo a su padre:

– "He sacado un 1 en el examen de matemáticas".
– "¿Un 1? ¿Qué ha pasado? Lo sabías bien. Lo estudiamos juntos.
  Sí, lo sabía bien y lo hice todo bien. Pero el maestro dijo que, si después de poner la solución del problema se nos olvidaba añadir al resultado si eran centímetros, metros o manzanas, lo calificaría con 0 y se me olvidó ponerlo.

Pregunta: Si el estudiante tenía suficiente conocimiento, ¿podría tener como calificación un 1? ¿No se trata de valorar el aprendizaje del estudiante? ¿Quizás el docente utilizó el examen para fomentar el aprendizaje de algunos aspectos que consideraba importantes?

9. Sucedido 9: En un máster de formación de profesorado de matemáticas de Secundaria, el profesor presentó 5 proyectos realizados por estudiantes de Secundaria. Los estudiantes, en pequeños grupos, debían establecer criterios propios de valoración del proyecto para decidir qué estaba bien o estaba mal, y hasta qué punto lo estaba. Posteriormente debían calificar cada uno de ellos. Finalmente, ya con todo el grupo, el profesor escribió en la pizarra las valoraciones de cada grupo a cada uno de los proyectos. ¡En algunos proyectos había valoraciones que variaban de 4 a 9, de suspenso a sobresaliente!

Pregunta: Si un trabajo de un estudiante está bien, ¿debería estar bien para todos los profesores, aunque variase en detalles? ¿O puede depender de cada profesor?

Introducción

En los inicios de un curso de Grado en Maestro de Infantil, Grado en Maestro de Primaria y Máster en profesorado de Secundaria, especialidad de matemáticas, se propuso a los futuros docentes, que respondieran la siguiente pregunta: ¿Qué entiendes por evaluación en general y en matemáticas en particular? Casi la totalidad de las respuestas consideraban la evaluación como un instrumento para emitir un juicio sobre el rendimiento y las capacidades de los estudiantes. Posteriormente, a pesar de los esfuerzos desarrollados durante el curso por hacer entender que la función de la evaluación durante un proceso formativo es algo más que calificar, cuando los estudiantes tuvieron que planificar una propuesta didáctica en el área de matemáticas, en cada caso, planteaban el desarrollo de la evaluación únicamente en la última sesión de clase y algunos, incluso, olvidaban considerarla.

La evaluación es mucho más que la calificación de un producto final. Evaluamos constantemente a lo largo de cada día cuando, por ejemplo, leemos este texto, conocemos a una persona, estamos preparando una comida, tomamos un café, decidimos como pasar un día festivo, leemos un libro o vemos una película. En cada caso, no sólo se evalúa al final del proceso sino también en otros momentos, y, en algunos casos, esa valoración permite generar cambios para tratar de mejorar el resultado. Algo similar sucede con la evaluación en matemáticas.

La evaluación se realiza a partir del conocimiento y las expectativas que se tiene sobre lo que se evalúa. En el caso de la evaluación en matemáticas, se lleva a cabo desde la mirada de un especialista que muestra sus concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como los conocimientos y herramientas que se ponen en juego. En la evaluación del aprendizaje se destaca lo que el docente considera importante para el conocimiento y cómo influye en la enseñanza y aprendizaje.

Entendemos la evaluación en matemáticas como un elemento del proceso formativo que no sólo muestra dónde está cada estudiante respecto a la adquisición del conocimiento, sino que también, permite identificar dificultades y generar alternativas para modificar, ampliar o profundizar en el mismo y, en consecuencia, puede utilizarse para el aprendizaje. Por tanto, la evaluación forma parte de la regulación de un tipo de aprendizaje constructivo. En este sentido podríamos decir que el papel del docente se acerca más al papel de un médico que al de un juez.

La evaluación en matemáticas como elemento del proceso de enseñanza y aprendizaje

Entendemos que la planificación del diseño de un programa de formación en matemáticas, en los diferentes niveles educativos, debería incluir un aprendizaje activo que permita la construcción del conocimiento por el estudiante y que implique el desarrollo de una variedad de tareas que permitan, por ejemplo, trabajar de manera colaborativa, preguntar y responder preguntas, reflexionar sobre su aprendizaje y sobre el aspecto instrumental de las matemáticas, razonar y discutir críticamente, y aplicar el conocimiento en situaciones reales. Todo ello, adaptado a las edades y peculiaridades de los estudiantes y atendiendo a la formación en valores, la diversidad, la colaboración, la reflexión crítica y el desarrollo sostenible.

En esa forma de enseñanza-aprendizaje, el papel del profesor debe ser más esperanzador que la tradicional interacción ‘paso a paso’ controlada por el docente pues debe permitir que el estudiante siga diversos caminos, de la misma forma que, como ciudadano, en el futuro tendrá que hacer frente a diversos problemas que no tengan un método establecido o solución exacta o que le harán tomar una decisión que difiera de la del experto (cuando, por ejemplo, tenga que contratar un seguro de vida, organizar sus impuestos o planificar unas vacaciones) o como profesional, cuando tenga que afrontar un problema o tarea que se le haya planteado.

Para ello, el docente debe actuar como mediador e informar a los estudiantes de los objetivos de enseñanza-aprendizaje, metodología y criterios y forma de evaluación. Además, debe planificar el trabajo para que el estudiante reflexione, se haga preguntas, busque información, identifique problemas, valore diferentes aspectos y manifieste un criterio propio que debe defender de manera argumentada, tanto de forma oral como escrita. Para ello hay que tener en cuenta las concepciones de los estudiantes y su conocimiento, y el docente debe plantear preguntas y, ante las dudas o errores, la mejor respuesta es una buena pregunta. Es decir, a lo largo del proceso formativo, debe tener un papel dinamizador y crear oportunidades de revisión del trabajo y discusiones entre estudiantes, y entre ellos y el profesor, a la vez que debe llevar un riguroso proceso de seguimiento y análisis de lo acontecido en el desarrollo del proceso. El material de trabajo debe ser cuidadosamente seleccionado de manera que se plantee en forma de reto, reto asumible, aunque sea parcialmente.

En ese contexto, parece conveniente que el estudiante construya el conocimiento y sea participante activo en el proceso de enseñanza-aprendizaje de forma que adquiera el conocimiento por sí mismo y desarrolle distintas habilidades y competencias. Para ello, en el aula de matemáticas se debe atender a las capacidades de cada estudiante, que son diferentes en unos y otros, y plantear actividades que vayan más allá de la mera reproducción y que requieran el uso de capacidades o habilidades de un alto nivel de reflexión cognitivo, con cierto grado de complejidad de las operaciones mentales implicadas y que obliguen a conectar conceptos y estructuras, sintetizar informaciones y establecer deducciones (Cárdenas et al., 2016). Un ejemplo de ello podrían ser proyectos o tareas abiertas que permitan que haya varias soluciones al mismo problema. Además, se debería promover el trabajo en equipo y reconocer la importancia de la comunicación, reflexión y discusión.

Para conseguirlo hay que tener en cuenta la evaluación. Sus objetivos y métodos ejercen más influencia en cómo y qué aprenden los estudiantes que cualquier otro elemento del proceso formativo. Decide lo que los estudiantes consideran importante, afecta su comprensión y participación en las tareas de aprendizaje y a la transferencia de los conocimientos al aprendizaje futuro. Debería ser un proceso que permita a los estudiantes conocer qué son capaces de hacer, qué deberían mejorar y cuáles son los errores cometidos. Esto significa que la evaluación debería incluir métodos de análisis e interpretación que faciliten que los estudiantes construyan su propio conocimiento individual y colectivo, y valore no sólo las tareas desarrolladas en el aula sino también las que se realizan fuera de ella y, en general, todos los aspectos que contribuyen al aprendizaje del estudiante. Los estudiantes deberían conocer claramente los criterios que se van a utilizar para su evaluación de manera que un indicador importante de su formación es que ellos mismos fueran capaces de valorar su trabajo de la misma forma que lo hacen los profesores ya que, además de aportar un sentido de justicia, les permitiría mejorar su aprendizaje y entender mejor los objetivos con los que se están formando. No se puede olvidar que la autoevaluación tiene una función motivacional que mejora el aprendizaje (Cáceres y Chamoso, 2015).

Contexto teórico, que intenta ser práctico

Algunos apuntes teóricos

Un factor clave en cualquier reforma curricular es el desarrollo de prácticas de evaluación que cumplan con los objetivos curriculares. Estas prácticas de evaluación impulsan, en gran medida, el diseño de los libros de texto y la práctica docente. Si se consideran unas directrices curriculares basadas en el desarrollo de competencias, la evaluación puede ser más compleja que si tiene otros objetivos. Hay que considerar que se puede producir un desajuste entre el objetivo curricular y la evaluación de competencias de pensamiento matemático o modelado, por ejemplo.

Los currículos actuales plantean una evaluación global, continua, formativa e integradora. Para ello se aconseja favorecer situaciones de aprendizaje en las que se planteen tareas y actividades significativas y relevantes para resolver problemas de manera creativa y cooperativa, reforzando la autoestima, la autonomía, la reflexión y la responsabilidad, así como el uso generalizado de variados instrumentos de evaluación, accesibles y adaptados a las distintas situaciones de aprendizaje que permitan la valoración objetiva de cada estudiante.

¿En qué momentos del proceso de enseñanza-aprendizaje se evalúa? ¿Para qué se evalúa en cada momento? Imaginemos que queremos organizar un viaje de vacaciones con nuestra pareja o un grupo de amigos. Para ello habrá que hacer una evaluación inicial o diagnóstica para valorar si nuestra pareja o grupo de amigos, por ejemplo, querrán ir, el lugar apropiado, posibilidades económicas, número de días, peculiaridades y preferencias de los que van, tipo de alojamiento o en qué se va a dedicar esos días que puede conllevar comprar algo necesario como material para esquiar y crema solar. Una vez en el lugar decidido, habrá que hacer una evaluación formativa para ajustar las previsiones realizadas al desarrollo real, donde pueden producirse cambios previstos e imprevistos que no se habían considerado como, por ejemplo, si el alojamiento no es el que se preveía, si llueve de manera que impide realizar alguna excursión prevista o si alguien se pone enfermo. Finalmente, la evaluación sumativa tendrá en cuenta la valoración de cada uno de los aspectos considerados como lugar elegido, gasto ocasionado, número de días dedicados, alojamiento, comidas, excursiones y planificación y peculiaridades de los viajeros. La evaluación auténtica tiene en cuenta todos los aspectos considerados.

Esa metáfora puede ayudar a reflexionar sobre la evaluación en matemáticas. Cuando se planifica la evaluación de una asignatura, unidad didáctica o sesión de matemáticas se incluye una evaluación inicial de tipo diagnóstico de, por ejemplo, características, contenidos, contexto, necesidades individuales de los estudiantes, posibilidades del centro y aula o calendario escolar. Posteriormente, en el desarrollo, habrá que hacer una evaluación formativa como estrategia de regulación del proceso formativo para, por ejemplo, valorar el progreso de los estudiantes no sólo en la adquisición de contenidos conceptuales y procedimientos, sino también en la adquisición de capacidades y el desarrollo de las competencias básicas, corregir errores o valorar el avance de los contenidos tratados respecto a la previsión realizada. Finalmente, una evaluación sumativa tendrá en cuenta la valoración de cada uno de los aspectos considerados que pueden estar relacionados con el profesor, los estudiantes u otras cuestiones. La evaluación auténtica tiene en cuenta todos los aspectos del proceso de enseñanza-aprendizaje considerados.

En las últimas décadas, la terminología utilizada para considerar la evaluación educativa y su relación con el aprendizaje ha evolucionado y los términos evaluación formativa y evaluación sumativa son ampliamente utilizados. En función del propósito, se entiende que la evaluación formativa sirve para apoyar y mejorar el aprendizaje de los estudiantes, mientras que la evaluación sumativa trata de rendir cuentas, clasificar o certificar la competencia sobre el rendimiento de los estudiantes. De esta forma se puede hablar de tres tipos de evaluación: la evaluación del aprendizaje (evaluación sumativa), la evaluación para el aprendizaje y la evaluación como aprendizaje (ambas consideradas como evaluación formativa). Tanto la evaluación para el aprendizaje como la evaluación como aprendizaje se consideran parte de la práctica diaria de estudiantes y docentes, y buscan el aprendizaje continuo, aunque la segunda centra principalmente su atención en la autoevaluación (Schellekens et al., 2021).

La evaluación debe ir íntimamente relacionada con la enseñanza-aprendizaje. Por ello, en este capítulo entendemos los tres tipos de evaluación como entidades integradas en coherencia con todo el modelo educativo para facilitar al máximo el aprendizaje. Un diseño apropiado de la evaluación permitirá que los estudiantes puedan comprobar si consiguen resultados de aprendizaje adecuados o puedan utilizar la información proporcionada para llegar a conseguirlos, detectar carencias en el procedimiento que obligue a realizar cambios y que tanto el profesorado como los estudiantes se puedan organizar para el trabajo que se requiere (Benjumeda et al., 2016)

Para ello es necesario establecer unos claros objetivos de enseñanza que puedan ser traducidos en resultados de aprendizaje y permitan definir criterios de evaluación. Los objetivos de enseñanza son declaraciones que indican lo que el profesor propone hacer. Sin embargo, los objetivos de aprendizaje indican lo que se pretende que aprendan los estudiantes. Su descripción, concreta y precisa, permite identificar y perfilar los criterios de evaluación, es decir, los indicadores de aprendizaje que han de mostrar los estudiantes.

Los objetivos de enseñanza deben ir dirigidos a los objetivos de la asignatura, unidad didáctica o sesión en el contexto general del plan de estudios correspondiente.

Deben tener en cuenta aspectos referidos tanto al conocimiento matemático como a otros aspectos. Por ejemplo, se pueden considerar el conocimiento y aplicación de contenidos, el pensamiento matemático, el razonamiento matemático, la resolución de problemas, la valoración de modelos, la argumentación matemática, la comunicación, la representación, el formalismo matemático, la comprensión de enunciados, el uso de herramientas de dibujo, el uso de la calculadora y de tecnología, el sentido numérico, la autonomía e iniciativa personal del estudiante, la creatividad, la reflexión, la capacidad de aprender algo nuevo, la participación e interés, la relación con otras áreas de conocimiento, la atención al desarrollo sostenible, la búsqueda de los propios errores, la atención a la educación en valores, el trabajo cooperativo, el pensamiento crítico u otros. Decidir cuáles de esos aspectos se pretende que nuestros estudiantes aprendan condicionaría los objetivos de aprendizaje, la metodología y la evaluación.

Cuando se planifica la evaluación conviene definir y acotar los contenidos y comprobar si se retoman de nuevo. Además, se debe elaborar un listado de las destrezas y habilidades alcanzables que se pretenden desarrollar. Estas habilidades y conocimientos deben ser adecuadas al nivel de estudio, al grupo de estudiantes y al contexto. También hay que delimitar si se trata de enseñar explícitamente todas las capacidades y habilidades necesarias para lograr los resultados de aprendizaje o se asume directamente alguna de ellas. Esto permitirá concretar los diferentes niveles de logro para los criterios de evaluación y decidir cuáles se considerarán en las diferentes tareas de evaluación que se propongan, a la vez que evitará desviar el foco de atención a cuestiones que no sean objetivo de aprendizaje.

Para realizar una evaluación formativa es necesario utilizar algo más que el tradicional examen escrito. Una variedad de métodos de evaluación clarifica las habilidades de los estudiantes, se adapta a cada uno de ellos y puede mejorar el compromiso con la tarea. Por ello es importante decidir qué instrumentos y técnicas son más apropiados y en qué momento debemos utilizarlos, qué actividades permitirán realizar un mejor seguimiento y, además, qué instrumentos facilitarán la valoración de las diversas actividades que se utilicen a lo largo del proceso. También hay que considerar la relación coste-beneficio que suponen en el proceso educativo (Beesley et al., 2018).

Hacer partícipes a los estudiantes del proceso de evaluación requiere una comunicación constante en diversos sentidos y con canales de comunicación adecuados. Una plataforma virtual, por ejemplo, puede ayudar a ello. Por ejemplo, antes de evaluar conviene que estén informados de los conocimientos y habilidades que se consideran objetivo de aprendizaje, así como de los criterios de evaluación que puede ayudarles a monitorizar su aprendizaje. Ello podrá favorecerse con procesos de autoevaluación y coevaluación. Durante el proceso formativo, es esencial crear diferentes momentos de revisión en los que los estudiantes puedan reconocer en qué punto están y qué pueden hacer para ampliar, profundizar o mejorar su propio trabajo. Este tipo de acciones ayudan a la autoevaluación y a la metacognición. Las rúbricas de evaluación son un medio adecuado para desarrollar estas prácticas de evaluación ya que permiten detallar indicadores precisos de niveles de logro.

La evaluación puede apoyar e impulsar el aprendizaje de los estudiantes no solo indicando, o reconociéndolo ellos mismos, el nivel en el que se encuentran respecto a la adquisición de cierto conocimiento o el desarrollo de alguna habilidad o destreza, sino, además, para dotar de vías de acción que ayuden a avanzar en el aprendizaje. Para ello, conviene que la información que se ofrezca como retroalimentación, ya sea por parte del docente o de los compañeros, sea útil para los estudiantes, llegue a tiempo y sea relevante para alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos en las tareas de evaluación.

La información que se obtiene durante el proceso puede ayudar al docente a la reflexión y toma de decisiones sobre su propia práctica y realizar los ajustes oportunos. Permite valorar si la metodología de enseñanza y los instrumentos de evaluación fueron adecuados o se deben considerar alternativas. También facilita reflexionar sobre aspectos como, por ejemplo, la atención que se está dando a estudiantes con dificultades de aprendizaje, talento matemático o alguna otra necesidad de adaptación. Y ajustar los tiempos de evaluación y retroalimentación para permitir que los estudiantes reflexionen y utilicen la información recibida. Además, permite reflexionar, por ejemplo, sobre el desarrollo general del proceso, la motivación a los estudiantes, el fomento del aprendizaje reflexivo o la corrección de errores.

Para facilitar la compleja tarea de valorar las diversas tareas que compongan el proceso evaluativo se pueden utilizar matrices de valoración, que se suelen llamar rúbricas o listas de valoración. Estas matrices facilitan la calificación, pero, sobre todo, permiten que los estudiantes conozcan con antelación los criterios con los que serán valorados, lo que proporciona una valiosa información cualitativa para la mejora del proceso de aprendizaje. Reflejan los criterios de evaluación y establecen distintos niveles de consecución para cada uno de ellos. En función del tipo de evaluación que se desee realizar y los criterios que se consideren para ello, se pueden considerar rúbricas de evaluación holísticas o analíticas. Las rúbricas holísticas, generalmente, se utilizan para valorar la adquisición de un conocimiento concreto o la calidad global de actividades abiertas donde no haya una respuesta correcta definitiva y pueda permitir errores en el proceso. Las analíticas se suelen utilizar para una evaluación más pormenorizada de los diversos aspectos que se consideran fundamentales en el proceso. Estas últimas son más costosas de construir y de aplicar que las holísticas, pero, a la vez, permiten un alto grado de retroalimentación para los estudiantes (Cáceres y Chamoso, 2015).

Algunas posibilidades de evaluación que se pueden considerar

Si se pretende desarrollar una evaluación global, continua, formativa e integradora, la evaluación debe integrarse como un elemento del proceso de enseñanza-aprendizaje. Para ello será necesario disponer de una variedad de técnicas e instrumentos que aporten información de distinta naturaleza y en diferentes momentos del proceso formativo.

Uno de los instrumentos más completos para realizar una evaluación de ese tipo es el portafolios de aprendizaje. Se entiende portafolios de aprendizaje a la compilación de trabajos realizados por el estudiante que aporta evidencias de su conocimiento, destrezas, disposición y reflexión sobre el trabajo realizado. Puede concretarse en propuestas de trabajo que cada estudiante desarrolla a lo largo del proceso formativo, que pueden ser de distinta naturaleza o con diferentes objetivos como, por ejemplo, voluntarias u obligatorias, individuales o en grupos, para recordar, mejorar el aprendizaje o profundizar en el mismo. Esas propuestas de trabajo deberían ser planificadas adecuadamente y, además, cada una de ellas debería tener su propia rúbrica de valoración. Todo ello debería conocerlo el estudiante con antelación (Cáceres y Chamoso, 2015).

Una característica interesante del portafolios es que no sólo muestra un trabajo final del proceso formativo sino, también, el progreso del aprendizaje del estudiante, las responsabilidades que asume, cómo participa en el proceso de diagnóstico y evaluación, cómo percibe los incidentes críticos, sus actitudes, sus hábitos de independencia y reflexión, la voluntad de aceptar los propios errores, la consideración de los errores como oportunidades de aprendizaje y sus habilidades tanto en resolución de problemas como en comunicación, razonamiento y análisis. El uso del portafolios obliga a tomar decisiones que se deben justificar. Además, puede incluir posibilidad de revisión y mejora ya que, la revisión y reflexión del propio trabajo, favorece la autorregulación del aprendizaje. Para conseguirlo, los trabajos que incluya deben ayudar a conseguirlo (ejemplos en Figura 1 y Figura 2).

En un curso de formación de docentes de matemáticas de Primaria, se organizó un portafolios de aprendizaje basado en unas propuestas de trabajo para el estudiante, en grupos de 2, en tres sentidos: *Ejercicios* (voluntarios; para hacerlos fuera del aula), *Actividades* (obligatorios; para hacerlos en el aula) y *Proyectos* (obligatorios; para hacerlos fuera del aula). Todas las propuestas de trabajo tenían posibilidad de mejora.

En concreto, cada uno de los proyectos tenía como objetivo, referido a la enseñanza de matemáticas en Primaria: diseño de un contenido, conocimiento del contenido matemático y metodológico, reflexión sobre la práctica y creatividad. Cada uno se valoró en función de la profundización y calidad del objetivo considerado, y su implicación en el proceso de enseñanza-aprendizaje del estudiante:

Nivel 1 (Descripción): Cuando participa en el proceso con una visión externa.

Nivel 2 (Argumentación): Cuando participa de forma activa en el proceso.

Nivel 3 (Aportación): Cuando, además de participar, se involucra en el proceso, y toma decisiones propias.

Por ejemplo, cada grupo de estudiantes entregó el proyecto de diseño de un contenido matemático para Primaria al inicio del curso y volvió a entregarlo al final del mismo mejorado, para lo cual el desarrollo del curso se dirigió a formar en aspectos, en diversos sentidos, que pudieran facilitar esa mejora. La Tabla 1 recoge la rúbrica para valorar el proyecto referido a creatividad (Cáceres et ál., 2010, Chamoso y Cáceres, 2016)

Figura 1. Práctica de evaluación de un portafolio

Tabla 1. Plantilla de valoración del proyecto de creatividad

Niveles	Indicadores
0 (Generalidad): Toma los contenidos directamente de otras fuentes y los estructura sin criterio aparente.	• El contexto, el argumento y las actividades no son válidos. • No se adapta al trabajo pedido.
1 (Descripción): Conoce lo que utiliza sin relacionarlo entre sí para explicar los contenidos, el desarrollo global, y los gráficos.	• El contexto, el argumento y las actividades son válidos. • Las aportaciones son las habituales.
2 (Argumentación): Argumenta lo que realiza relacionándolo entre sí y siguiendo una secuencia lógica para explicar los contenidos, el desarrollo global, y los gráficos.	• El contexto, el argumento y las actividades son válidos, apropiados y motivadores. • Las aportaciones son variadas.
3 (Aportación): Utiliza argumentos propios y crea modelos originales para explicar los contenidos, el desarrollo global, y los gráficos.	• El contexto, el argumento y las actividades son válidos, apropiados, motivadores y creativos. • Adapta el trabajo a distintos niveles de dificultad. • Las aportaciones son muy variadas en diferentes sentidos.
Valoración global de la estructura del trabajo escrito (esquema, desarrollo, objetivos, conclusión, bibliografía, reflexión personal)	0: Carece de los aspectos fundamentales y no se aprecia coherencia aparente. 1: Presenta algunos aspectos fundamentales. 2: Incluye la mayor parte de aspectos fundamentales. 3: Incluye todos los aspectos fundamentales con coherencia.

En un curso de formación de docentes de matemáticas de Primaria, se organizó un portafolios de aprendizaje basado en el desarrollo de un Proyecto Estadístico (PE) que los estudiantes, en grupos, debían presentar, oralmente y por escrito, al final del curso. Los estudiantes conocían, desde el principio del curso, la rúbrica de valoración que se iba a utilizar (Tabla 2).

Como parte de su portafolios, y para favorecer el adecuado desarrollo del PE, cada grupo de estudiantes, hacia la mitad del curso, en sesiones sucesivas de aula:

1. Presentó sus Avances del Proyecto Estadístico (APE), oralmente y por escrito.
2. Aplicó la rúbrica a su propio APE (Autoevaluación). Después, aplicó la rúbrica a 5 APE desarrollados por sus compañeros (Coevaluación). Finalmente, cada grupo validó o modificó la valoración de su propio APE. Las valoraciones de cada APE referidas a Autoevaluación y Coevaluación, unido a la valoración del profesor, se pudieron a disposición de los estudiantes.
3. Presentó sus Mejoras de los Avances del Proyecto Estadístico (MAPE) por escrito, que fueron las que se consideraron para valoración final (Cáceres y Chamoso, 2019).

Figura 2. Práctica de evaluación de una tarea del portafolios para favorecer el desarrollo de un Proyecto Estadístico considerando la reflexión, la autoevaluación y la coevaluación

Tabla 2. Rúbrica de valoración de un Proyecto Estadístico

	4	3	2	1
Planteamiento y justificación del problema y objetivos	El tema es pertinente, el problema se justifica adecuadamente y se formulan objetivos medibles estadísticamente	El tema es pertinente, el problema se justifica vagamente o se formulan objetivos que no son medibles estadísticamente	El tema es pertinente pero no se justifica adecuadamente su elección o se formulan objetivos para los que no es necesario aplicar la estadística	El tema no es pertinente y no se justifica su elección. No se formulan objetivos o se formulan objetivos ambiguos
Búsqueda de información	Se utilizan suficientes fuentes de información adecuadas al tema de estudio y se incluyen en la bibliografía	Se utilizan algunas fuentes de información adecuadas al tema de estudio y se incluyen en la bibliografía	Se utilizan algunas fuentes de información adecuadas al tema de estudio y no se incluyen en la bibliografía	No se muestran evidencias de haber utilizado fuentes de información.

	4	3	2	1
Recogida y organización de datos	Se indica cómo se recogen los datos, los instrumentos de recogida y la explicación clara de su organización	Se indica cómo se recogen los datos y los instrumentos de recogida, pero no cómo se organizan	Únicamente se indica cómo se han recogido los datos	No se indica el proceso de recolección de datos

En cualquier caso, el portafolios recoge las respuestas de estudiantes a tareas propuestas para el aprendizaje. Se entiende que el tipo de tareas que los docentes proponen a los estudiantes tiene gran influencia en su aprendizaje, lo que ellos entenderán por "matemáticas" y el medio con el que construyen su aprendizaje. Pueden ser de diversos tipos como, por ejemplo, creación o resolución de tareas matemáticas, elaboración de proyectos, mapas conceptuales, pruebas escritas, autoevaluaciones o coevaluaciones, detección de errores, reflexiones, modificaciones del propio trabajo, realización de vídeos, resolución de tareas en contextos reales o crear problemas matemáticos. A continuación, se detallan alguna de ellas.

Se entiende como mapa conceptual a un gráfico de nodos en el que se sitúan conceptos, que se unen mediante flechas que suelen ir acompañadas de palabras o frases de enlace formando proposiciones. Los más utilizados son los jerarquizados y de araña. En los primeros, un concepto principal se sitúa en la parte superior y, debajo, los subconceptos en filas; en los segundos, el concepto principal se coloca en el centro y se enlaza con subconceptos a su alrededor. Su elaboración puede ser más o menos guiada, en función de los objetivos que se pretendan y las características de los estudiantes; es decir, se puede considerar desde una lista no jerarquizada de conceptos o términos conceptuales para construir un mapa conceptual con un listado de conexiones guiado por el profesor con la participación de los estudiantes, hasta la elaboración libre por parte del estudiante (Figura 3). Admite otras variantes y posibilidades como, por ejemplo, la elaboración del mapa conceptual de un mismo concepto en diferentes momentos del curso para descubrir la evolución del conocimiento del concepto por los estudiantes. Se suele valorar mediante una plantilla de control en la que se indican las conexiones correctas, incorrectas o inexistentes.

Una forma de evaluar mapas conceptuales es la que estudiantes de 3º de ESO elaboraron libremente, atendiendo a los siguientes aspectos:

1. ¿Qué diferencias se observan a la hora de presentar los conceptos en los diferentes mapas conceptuales? (dirigido a analizar la forma en que se organizan los conceptos y las palabras o frases de enlace).
2. ¿Qué conceptos no se introducen? ¿Qué relaciones no se establecen? (dirigido a identificar conceptos incluidos, omitidos y repetidos).
3. ¿Qué conceptos están mal asentados o mal relacionados? (dirigido a descubrir posibles errores cometidos).

Estos aspectos no solo los debe considerar el profesor, sino que también lo deben hacer los estudiantes con sus propias producciones y las de sus compañeros. Esto les permitirá ser conscientes de la profundidad de su producción, de hacer una autoevaluación al preguntarse, por ejemplo: ¿qué dificultades he tenido al hacer el mapa conceptual? ¿qué he aprendido con el mapa conceptual? (Azcárate, 2006).

Figura 3. Una propuesta para evaluar mapas conceptuales

Otra posibilidad es la resolución de problemas abiertos. Los problemas abiertos permiten que haya más de una solución correcta para resolverlos, lo que favorece la creatividad, la iniciativa, la toma de decisiones y la aplicación del conocimiento matemático. Pueden estar relacionados con la modelización, que busca resolver un problema real y donde las matemáticas se convierten en una herramienta que ayuda a organizar, sintetizar y representar datos, tomar decisiones, resolver el problema e interpretar el resultado. Esto último puede realizarse en forma de tarea pero, usualmente, se hace como proyecto en grupos colaborativos durante un cierto periodo de tiempo. Generalmente requiere de frecuente retroalimentación ya sea, por ejemplo, por parte del docente, mediante diálogos grupales o evaluación por pares. Este tipo de tareas se suelen valorar mediante rúbricas de evaluación (Figura 4).

El proyecto "El Agua" pretende que el estudiantado de Secundaria sea consciente del gasto de agua que se genera en su vivienda y en el municipio, y adopte medidas de ahorro.

Las capacidades que se consideran son: Comunicación (C), Matematización (M), Representación (R), Razonamiento y Argumentación (A), Diseño de estrategias para resolver problemas (RP), Utilización de operaciones y lenguaje formal y técnico (O) y Utilización de herramientas matemáticas (T).

Los procesos que se consideran son:

1. Formulación matemática de las situaciones:
    1.1. Paso de situación real a modelo o esquema.
    1.2. Modelo o formulación matemática.
2. Empleo de conceptos, datos, procedimientos y razonamientos matemáticos.
3. Interpretación, aplicación y valoración de los resultados matemáticos.
    3.1. Validar soluciones.
    3.2. Exponer conclusiones del estudio.

El trabajo se realiza en grupos y se divide en tres etapas:

1. Delimitación de los aspectos que ayudan a determinar el gasto de agua diario que se produce en la propia vivienda. Decisión, justificada, del método más adecuado para medir el consumo, así como las matemáticas que ayudan, por ejemplo, a representar el gasto de agua o la frecuencia de uso.
2. Elaboración de una encuesta para realizar un estudio estadístico más amplio sobre los hábitos de consumo en las viviendas del barrio.
3. Recolección de resultados de las encuestas, recuento de respuestas, elaboración y selección de tablas de frecuencias y de gráficos, elección de la información para presentar los resultados. Interpretación de resultados.

El instrumento para evaluar el proyecto es una plantilla de valoración atendiendo a las capacidades y procesos considerados (un detalle de la plantilla referida al proceso "Paso de situación real a modelo o esquema" se incluye en la Tabla 3; Benjumeda et al., 2015).

Figura 4. Práctica de evaluación por proyectos

Tabla 3. Plantilla de valoración del proceso "Paso de situación real a modelo o esquema" del proyecto "El Agua"

Criterio	Indicador		Capacidades						
			C	M	R	A	RP	O	T
Justificación de la elección del método para calcular el agua consumida en cada una de las situaciones acordadas en grupo clase	0	No da razones							
	1	Razones no matemáticas	X	X		X			
	2	Razones matemáticas							
Explicación de cómo se utiliza el agua en el caso elegido (esquema) e identificación de limitaciones y supuestos de cada uno	0	Predominio de esquemas incompletos o inadecuados							
	1	Esquemas incompletos o inadecuados para algunas situaciones	X	X		X	X		
	2	Esquemas adecuados y razonables							
Reconocimiento de los aspectos necesarios para el estudio estadístico (preguntas de la encuesta)	0	Se contemplan muy pocos aspectos de los necesarios							
	1	Faltan algunos aspectos importantes	X	X		X	X		
	2	Se contemplan todos los aspectos necesarios							

La creación de tareas matemáticas por los estudiantes, o la adaptación de tareas en algún sentido, requiere una alta demanda cognitiva, incrementa el conocimiento matemático y la capacidad de diseño matemático-didáctico. Se puede realizar de diferentes formas en función del objetivo de enseñanza. Por ejemplo, estudiantes de Educación Secundaria y Bachillerato crearon tareas vinculadas con la vida real para una evaluación inicial, con el objetivo de descubrir tanto potencialidades como grandes dificultades matemáticas (Mercado Hurtado, 2007). En otro sentido, en formación de docentes se han desarrollado experiencias en las que no solo se crean tareas, sino que también se mejoran a partir de la formación (Figura 5).

En una sesión de aula de 2 horas de duración futuros docentes de primaria, en grupos, crearon tareas matemáticas. En concreto, inicialmente, debían crear tres tareas en contextos reales que se pudieran plantear a un estudiante de Primaria. A continuación, cada grupo analizó la autenticidad de las tareas creadas a partir de una rúbrica de valoración que se les proporcionó, para descubrir aspectos que podían mejorarse. Después de una discusión formativa general sobre el grado de autenticidad de algunas tareas creadas por algunos grupos con el fin de proponer, entre todos, sugerencias de mejora, cada grupo modificó sus tres tareas iniciales para proponer tres nuevas tareas finales con un mayor nivel de autenticidad.

Cada tarea final se valoró como correcta si cumplía todas las dimensiones de autenticidad, suficiente si se mejoraba al menos una de ellas y mejorable si no se mejoraba ninguna (Cáceres et al., 2015).

Figura 5. Práctica de evaluación para crear tareas y mejorarlas

Existen otras muchas posibilidades de evaluación en diferentes sentidos dependiendo de los objetivos que se pretendan (Azcárate, 2006; Serradó y Azcárate, 2006; Serradó, 2009); también el cuestionario KPSI (Knowledge and Prior Study Inventory), para favorecer la autopercepción y la autorregulación del aprendizaje del estudiante cuando valora su percepción sobre su grado de conocimiento, competencias y conocimientos previos.

Algunas sugerencias. Pautas para una buena evaluación en matemáticas

La evaluación en matemáticas de una asignatura, una unidad didáctica o una sesión de clase, por ejemplo, se puede organizar de diversas formas. Una posibilidad es hacerlo en función del desarrollo del proceso formativo en el aula para lo que se pueden considerar tres momentos, antes, durante y después. En esencia:

Planifica tu evaluación (antes)

1. Considera las directrices oficiales para ajustar la planificación de la asignatura. Valora el contexto y las peculiaridades que pueden condicionarla. Valora la necesidad de realizar una evaluación inicial o diagnóstica directamente con los estudiantes.
2. Clarifica tus objetivos de enseñanza, tanto los referidos al conocimiento matemático como otros que entiendas que se deben considerar. Traslada tus objetivos de enseñanza a resultados de aprendizaje.
3. Redacta los criterios de evaluación de cada objetivo de enseñanza con precisión y claridad indicando los diferentes niveles de logro para cada uno de ellos.
4. Elige instrumentos de evaluación que permitan obtener información sobre el aprendizaje y decide los momentos y formas en que los utilizarás.

5. Diseña las tareas de evaluación que formarán parte de esos instrumentos y las rúbricas que permitirán valorar el nivel de logro. Para ello, además, ten en cuenta, por ejemplo, estudiantes con dificultades de aprendizaje o de altas capacidades.
6. Organiza un calendario que recoja los momentos de evaluación, de retroalimentación y entrega del trabajo revisado, adecuado para que no suponga una presión que perjudique el proceso.
7. Dialoga y acuerda con los compañeros el desarrollo del proceso formativo.

Implementa tu evaluación (durante)

1. Consensúa la evaluación con los estudiantes.
2. Facilita las rúbricas de evaluación de cada tarea previamente a su realización para favorecer la regulación del aprendizaje.
3. Ajusta la evaluación si fuera necesario dependiendo del desarrollo del proceso formativo o imprevistos.
4. Facilita a los estudiantes sus resultados con detalle, incluyendo orientaciones que permitan revisar el propio trabajo y profundizar sobre él.
5. Solicita reflexiones sobre el propio aprendizaje. Facilita la revisión del propio trabajo, ya sea personalmente o entre compañeros.

.

Reflexiona sobre el proceso (después)

1. Valora el proceso formativo en el que se incluye la evaluación.
2. Realiza la calificación del aprendizaje de cada estudiante según la planificación del proceso formativo efectuada.
3. Valora si la evaluación desarrollada sirvió para obtener información sobre los resultados de aprendizaje propuestos.
4. Valora si te has sentido cómodo durante el proceso y cómo se podría haber hecho mejor. Considera instrumentos de evaluación alternativos si lo estimas conveniente.

Reflexiones finales

En este capítulo se aportan ideas sobre la evaluación en matemáticas, experiencias y ejemplos que pueden ayudar a desarrollarla y sugerencias para realizar una adecuada evaluación. Pero lo que principalmente se ha pretendido es reflexionar sobre la evaluación. Cada docente debe gestionarla según su concepción de la enseñanza y aprendizaje, atendiendo al contexto y estudiantes.

Los sucedidos reales iniciales posibilitan algunas reflexiones. Por ejemplo, Sucedido 1 permite reflexionar sobre la relación que debe tener la evaluación con los objetivos de aprendizaje; Sucedidos 2 y 4 recuerdan que, en las aulas de matemáticas, el objetivo es aprender matemáticas; Sucedidos 3, 5, 8 y 9 reflejan la importancia de la rúbrica de valoración, acordada entre docentes y alumnos, y la necesidad de su uso apropiado; Sucedidos 6 y 7 indican que no siempre el sentido de justicia o de objetividad de la evaluación está en consonancia con la valoración del aprendizaje adquirido. Pero el lector puede realizar otras reflexiones en cualquier sentido. Así es la evaluación, algo vivo que depende de cada docente, aunque siempre ajustándose a las directrices educativas, objetivos de enseñanza, contexto y estudiantes.

Algo para terminar. A continuación, se muestran respuestas de estudiantes a dos tareas de evaluación:

1. En una clase de secundaria de estudiantes de talento matemático se propuso la siguiente actividad: "Describe el trayecto de tu casa al colegio que haces cada día para que alguien pueda seguirlo sin equivocarse sin que estés tú delante. Puedes hacer un dibujo, mapa u otras posibilidades que te parezcan. Incluye lugares significativos y relevantes que puedan ayudar (por ejemplo, parque, kiosko, parada del autobús, semáforos, contenedores, paso de peatones, tienda del pan). Puedes hacer lo mismo con la vuelta del colegio a tu casa".

Se adjuntan respuestas de dos estudiantes (Figura 6 y 7)

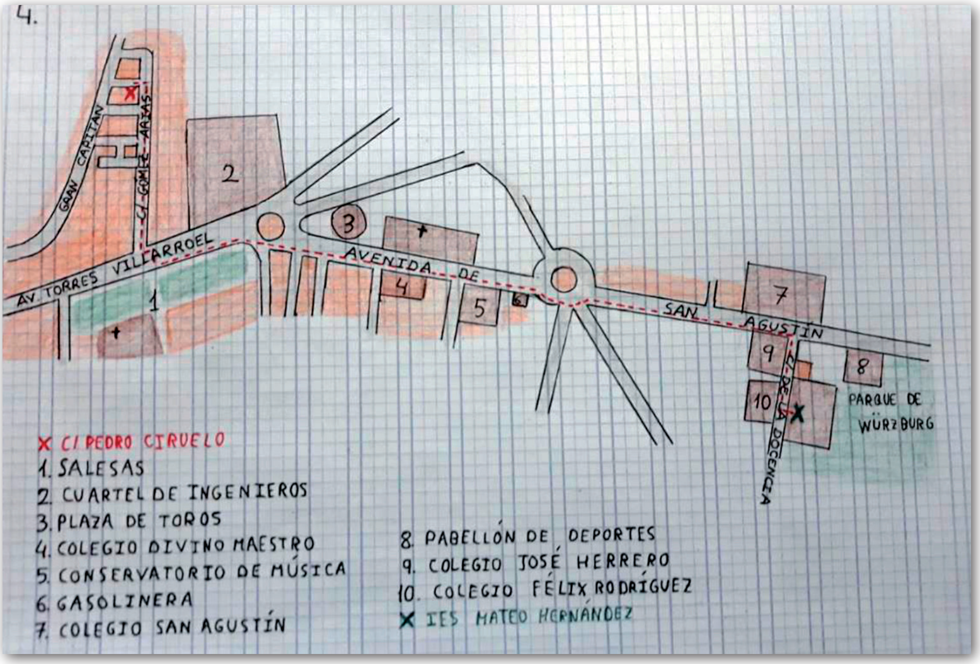


Figura 6. Plano del trayecto de tu casa al colegio

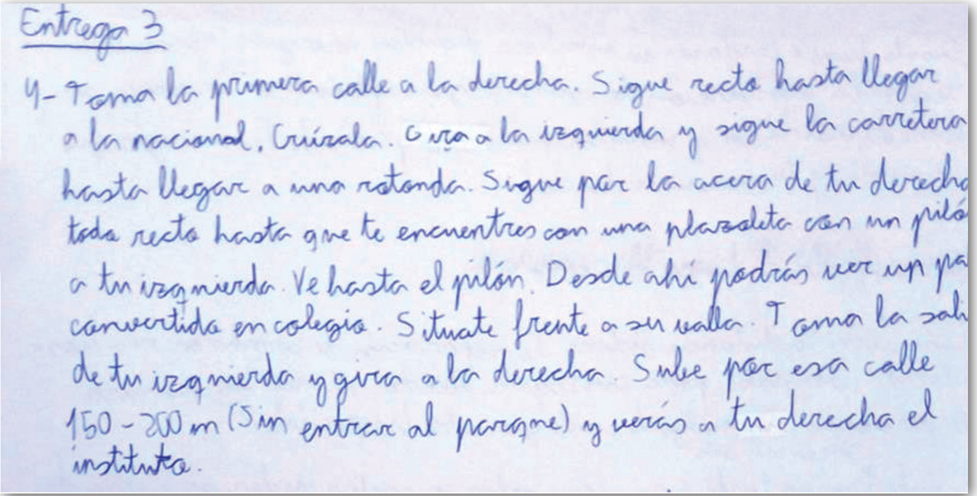

Entrega 3
4- Toma la primera calle a la derecha. Sigue recto hasta llegar
a la nacional. Crúzala. Gira a la izquierda y sigue la carretera
hasta llegar a una rotonda. Sigue por la acera de tu derecha
toda recto hasta que te encuentres con una plazoleta con un piló
a tu izquierda. Ve hasta el pilón. Desde ahí podrás ver una pa
convertida en colegio. Sitúate frente a su valla. Toma la sal
de tu izquierda y gira a la derecha. Sube por esa calle
150 - 200 m (Sin entrar al parque) y verás a tu derecha el
instituto.

Figura 7. Descripción del trayecto de tu casa al colegio

El docente comprobó que las dos respuestas eran correctas.

Pregunta: Aunque las dos respuestas sean correctas, ¿una puede ser más correcta que otra?

2. En un aula de matemáticas de secundaria cuyo objetivo es aprender la media aritmética, se pidió a los estudiantes que calcularan la media aritmética del peso de 3 personas. La respuesta de un estudiante fue 489,7 kilogramos.

Pregunta: Quizás el estudiante sabía calcular la media aritmética, pero tuvo un error al colocar la coma. ¿Qué hacer? Si sabe calcular la media aritmética, la respuesta se le podía valorar casi bien debido al error en cálculo. Pero, ¿se puede permitir que un estudiante, después de conseguir un resultado, no reflexione sobre lo obtenido en el contexto de la tarea solicitada y valorar que no es posible que la media aritmética del peso de 3 personas sea 489,7 kilogramos?

Reflexione sobre ellas. Seguro que no todos los docentes coincidirían en la misma respuesta en cada caso. Eso puede abrir posibilidades futuras de continuar este trabajo.

Recuerda que la evaluación:

1. Es un elemento del proceso de enseñanza-aprendizaje.
2. Dirige el aprendizaje del estudiante.
3. Debe valorar los objetivos de enseñanza y aprendizaje.
4. Debe mostrar el aprendizaje del estudiante atendiendo a los objetivos de enseñanza y aprendizaje.
5. Muestra el desarrollo del proceso formativo que, además del aprendizaje del estudiante, incluye otros aspectos como, por ejemplo, el trabajo del profesor.

Decálogo para una adecuada evaluación:

1. Convierte la evaluación en un elemento para aprender.
2. Planifica la evaluación en diferentes momentos del proceso formativo.
3. Diseña criterios de valoración o rúbricas, precisos y adecuados, y ponlos a disposición de los estudiantes con antelación.
4. Considera diferentes instrumentos de evaluación. No olvides la autoevaluación y la coevaluación.
5. Adecúa la evaluación al contexto y las capacidades de los estudiantes atendiendo especialmente, por ejemplo, a los que tienen dificultades de aprendizaje y a los que tienen talento matemático.
6. Facilita la reflexión sobre el aprendizaje para mejorar el propio trabajo y la evaluación.
7. Favorece la retroalimentación.
8. Haz tu evaluación justa y objetiva.
9. Trata de eliminar la tradicional presión por la evaluación. Anima constructivamente a los estudiantes para que consigan una evaluación adecuada.
10. Haz que tu evaluación motive, sea útil e interesante.

Referencias

Azcárate, P. (2006). Propuestas alternativas de evaluación en el aula de matemáticas. En J. M. Chamoso (Ed.), *Enfoques actuales en la didáctica de las Matemáticas* (pp. 187-219). MEC.

Beesley, A. D., Clark, T. F., Dempsey, K. y Tweed, A. (2018). Enhancing Formative Assessment Practice and Encouraging Middle School Mathematics Engagement and Persistence. *School Science and Mathematics, 118*(1–2). https://doi.org/10.1111/ssm.12255

Benjumeda, F. J., Romero, I. y López-Martín, M. M. (2015). Alfabetización matemática a través del aprendizaje basado en proyectos en secundaria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 163-172). SEIEM.

Benjumeda, F. J., Romero, I. y Zurita, I. (2016). Una propuesta de evaluación formativa para el aprendizaje basado en proyectos en matemáticas. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 177-186). SEIEM.

Cáceres, M. J. y Chamoso, J. M. (2015). La Evaluación Sobre la Resolución de Problemas de Matemáticas. En L.J. Blanco, J.A. Cárdenas y A. Caballero. *Resolución de Problemas de Matemáticas en la Formación Inicial de Profesores de Primaria* (pp. 225-241). Universidad de Extremadura. http://hdl.handle.net/10662/5241

Cáceres, M. J. y Chamoso, J. M. (2019). Influencia de un proceso de autoevaluación, coevaluación y evaluación en la formación de profesores de primaria. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 351-372). Ediciones Universidad Salamanca. https://eusal.es/eusal/catalog/view/978-84-1311-073-8/5054/4212-1

Cáceres, M. J., Chamoso, J. M. y Azcárate, P. (2010). Analysis of the revisions that pre-service teachers of Mathematics make of their own project included in their learning portfolio. *Teaching and Teacher Education, 26(5)*, 1186-1195. https://doi.org/10.1016/j.tate.2010.01.003

Cáceres, M. J., Chamoso, J. M. y Cárdenas, J. A. (2015). Situaciones problemáticas auténticas propuestas por estudiantes para maestro. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 201-210). SEIEM.

Cárdenas, J. A., Blanco, L. J. y Cáceres, M. J. (2016). La evaluación de las matemáticas: análisis de las pruebas escritas que se realizan en la secundaria. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 12(*48). https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/527

Chamoso, J. M. y Cáceres, M. J. (2016). Diseño e implementación de una asignatura de formación de docentes reflexivos de Matemáticas que considera los contenidos globalizados. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 15*, 69-81. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/23879

Mercado Hurtado, A. I. (2007). Matemáticas el primer día de curso: un nuevo enfoque de la evaluación inicial. *Suma, 56,* 33-38.

Schellekens, L. H., Bok, H. G., de Jong, L. H., van der Schaaf, M. F., Kremer, W. D. y van der Vleuten, C. P. (2021). A scoping review on the notions of Assessment as Learning (AaL), Assessment for Learning (AfL), and Assessment of Learning (AoL). *Studies in Educational Evaluation, 71*, 101094. https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2021.101094

Serradó, A. (2009): El desarrollo de las ocho competencias básicas a través de la resolución de problemas. *Epsilón, 26*(2), 7-22.

Serradó, A. y Azcárate, P. (2006): El portafolio: instrumento de evaluación de los alumnos con necesidades educativas especiales. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemátic*as, *43*, 42-56.

Parte 2

Las matemáticas en los niveles escolares

Mathematics in School Levels

Introducción

En la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en los diferentes niveles escolares existe la convicción de que es necesario enfrentar el proceso de enseñanza y aprendizaje desde una nueva perspectiva, es decir, repensar los métodos didácticos que brindan un aprendizaje significativo a los estudiantes para apoyarlos en el desarrollo de un vasto conjunto de habilidades necesarias para desempeñarse eficientemente en la sociedad actual. A lo largo de los diferentes niveles escolares el alumnado deberá desarrollar el razonamiento matemático y la comunicación, una comprensión profunda de los conceptos matemáticos, y la capacidad para reconocer la aplicación del conocimiento matemático en el mundo real.

Además, en la sociedad actual, en la que se tiene fácil acceso a instrumentos y aplicaciones que realizan cálculos matemáticos de todo tipo, no es necesario que el alumnado dedique tiempo a memorizar y reproducir técnicas. La sociedad necesita formar personas con sentido crítico, con capacidad para comunicar y argumentar con lógica, y que usen con criterio las tecnologías que están a su alcance para resolver problemas.

El desarrollo de la competencia matemática se lleva a cabo mediante la movilización de contenidos que integran conceptos, procedimientos y actitudes. Estos contenidos se van a organizar entorno a la idea cognitiva de sentido matemático que a lo largo del libro se ha venido interpretando como el conjunto de destrezas relacionadas con el dominio en contexto de contenidos métricos, numéricos, algebraicos, geométricos y estocásticos. Esta idea de sentido matemático subraya el carácter funcional del aprendizaje de las matemáticas y las posibilidades de establecer conexiones entre los diferentes contenidos de los sentidos matemáticos.

En la propuesta de CEMAT (2021) el conocimiento matemático que debe adquirir el alumnado a lo largo de los diferentes niveles escolares se ha estructurado, como acabamos de mencionar, en cinco sentidos matemáticos: algebraico, espacial, estocástico, de la medida y numérico. El orden en el que se nombran estos sentidos es orden alfabético, no indica prioridad o importancia en el aprendizaje de las matemáticas.

El sentido algebraico se caracteriza por ver lo general en lo particular, reconociendo patrones y relaciones de dependencia entre variables expresando estas regularidades mediante diferentes representaciones, y modelizar situaciones matemáticas o del mundo real con expresiones simbólicas. Para que el aprendizaje del álgebra sea significativo para el estudiante debe centrarse en cuatro enfoques: Generalización de patrones numéricos, geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas, Resolución de problemas, Situaciones funcionales, Modelización de fenómenos físicos y matemáticos (Stacey et al., 2006). Estos enfoques abarcan las componentes básicas del álgebra en la escuela.

El sentido espacial se refiere a las capacidades de un individuo para trabajar e interactuar en un entorno amplio, elaborar o descubrir imágenes de formas y figuras, clasificarlas, relacionarlas y razonar con ellas (NCTM, 2000). El sentido espacial debe ir acompañado del sentido de la medida y el descubrimiento de patrones, y en la educación secundaria también se puede relacionar con el concepto de función.

El sentido estocástico está ligado a la intuición sobre la incertidumbre, y es la capacidad para hacer frente a una amplia gama de situaciones cotidianas que implican el razonamiento y la interpretación de datos, la elaboración de conjeturas y la toma de decisiones a partir de la información estadística, la comprensión y comunicación de fenómenos aleatorios, y la capacidad de realizar algunas predicciones.

El sentido de la medida es necesario para comprender y comparar atributos de los objetos y los seres vivos de nuestro mundo. Este sentido se caracteriza por la capacidad del sujeto para estimar y cuantificar magnitudes. Se reconoce esta capacidad en el individuo que entiende y elige las unidades adecuadas para estimar, medir y comparar atributos y utiliza las herramientas adecuadas para realizar mediciones. En la etapa de Bachillerato el salto al límite permitirá medir el cambio de los procesos e incorporar el cálculo integral como herramienta para la medida de superficies.

El sentido numérico se caracteriza por la aplicación del conocimiento sobre numeración y cálculo en distintos contextos, y por el desarrollo de habilidades y modos de pensar basados en la comprensión, la representación y el uso flexible de los números y las operaciones.

En esta parte 2, hemos dedicado un capítulo a cada uno de los distintos niveles escolares (Educación Infantil, Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato) Y en ellos hemos ejemplificado el trabajo de aula cada uno de los sentidos matemáticos (algebraico, espacial, estocástico, de la medida y numérico) considerados en el currículo para orientar al profesorado de esta etapa a desarrollar las propuestas curriculares. Además, por las características diferentes de su alumnado también se ha dedicado un capítulo a las matemáticas en la Universidad, Formación Profesional, Educación para Personas Adultas y, un último capítulo, a la educación matemática del alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo.

Referencias

Comité Español de Matemáticas (CeMat). (2021). Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria. https://matematicas.uclm.es/cemat/wp-content/uploads/bases2021.pdf

NCTM. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática.

Stacey, K., Chuck, H., y Kendal, M. (eds.). (2006). The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study (Vol. 8). Springer Science y Business Media.

Moreno, A.[a]; Sánchez-Matamoros, G..[b] (Coord.)
[a] *Universidad de Granada,*
[b] *Universidad de Sevilla.*

Matemáticas en la Educación Infantil

Mathematics in Early Childhood Education

Alsina, Á.[a], Berciano, A.[b], De Castro, C.[c], Edo, M.[d], Giménez, J.[e], Jiménez-Gestal, C.[f], Prat, M.[g], Salgado, M.[h], Vanegas, Y.[i]

[a] *Universidad de Girona,*
[b] *Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea,*
[c] *Universidad Autónoma de Madrid,*
[d] *Universitat Autónoma de Barcelona,*
[e] *Universidad de Barcelona,*
[f] *Universidad de La Rioja,*
[g] *Blanquerna-Universidad Ramon Llull,*
[h] *Universidade de Santiago de Compostela,*
[i] *Universidad de Lleida*

Resumen

En la Educación Infantil, el aprendizaje de las matemáticas se inicia con los conocimientos intuitivos e informales que los niños traen a la escuela. En estas edades, las prácticas docentes deben favorecer el desarrollo de los procesos infantiles de resolución de problemas y razonamiento, representación, comunicación y conexión de ideas matemáticas, así como facilitar que los niños interactúen con ideas matemáticas clave. El enfoque de enseñanza se basa en el juego, la exploración, y la manipulación, en proporcionar tiempo suficiente, materiales manipulativos, y apoyo para que los niños se desenvuelvan en situaciones de la vida en las que necesiten conocimientos matemáticos.

Palabras clave: Educación infantil, Metodología didáctica, Recursos didácticos, Sentido algebraico, Sentido espacial, Sentido estocástico, Sentido de la medida, Sentido numérico.

Abstract

In Early Childhood Education, the learning of mathematics begins with the intuitive and informal knowledge that children bring to school. At these ages, teaching practices should favor the development of children's problem-solving and reasoning processes, representation, communication and connection of mathematical ideas, as well as favoring for children to interact with key mathematical ideas. The teaching approach is based on play, exploration, and manipulation, on providing enough time, manipulatives, and support for children to face life situations in which they need mathematical knowledge.

Keywords: Early childhood education, Educational methodology, Educational resources, Algebraic sense, Measurement sense, Number sense, Spatial sense, Stochastic sense.

El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en Educación Infantil

En las últimas décadas, ha ido aumentando considerablemente la visibilidad de la Educación Matemática Infantil. Muestra de ello, es el desarrollo de diversas agendas de investigación en este campo (Alsina, 2020a; Elia et al., 2021). En el contexto internacional, por ejemplo, se está realizando una importante labor en el grupo *Early Years Mathematics (EYM)* dentro del *Congress of European Research in Mathematics Education (CERME)*, con la presencia de estudios de autores españoles. Edo (2016) señala que entre los temas que se han tratado en las diferentes ediciones aparece el análisis de las oportunidades de aprendizaje matemático en contextos informales, el papel de los materiales, las diferentes formas de comunicación y representación matemática de los niños pequeños o las evidencias de aprendizaje sobre contenidos específicos, entre otros. Existen otras iniciativas a nivel internacional, como las *POEM Conferences on Early Mathematics Learning*, que cubren cuestiones relacionadas con el desarrollo del pensamiento matemático a través de investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de los procesos matemáticos y el contenido matemático, el impacto del entorno social, con estudios sobre las transiciones para niños pequeños entre el hogar y la escuela o bien la profesionalización de los maestros de la primera infancia, con una amplia variedad de enfoques teóricos y metodológicos innovadores que establecen unas bases interesantes para futuras investigaciones en esta área (Alsina, 2020; Carlsen et al., 2020).

En el contexto español se ha producido también un aumento considerable de la producción científica desde la reactivación del Grupo de Investigación en Educación Matemática Infantil (IEMI) en 2011, dentro de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). En este caso, los intereses de investigación se han orientado principalmente a tres grandes temas: la adquisición y el desarrollo del pensamiento matemático infantil, la formación inicial de maestros de Educación Infantil y el uso de recursos o contextos de aprendizaje para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático (Alsina, 2013; Salinas, 2016).

A continuación, se resaltan aspectos clave sobre el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas en Educación Infantil organizados en tres dimensiones (Alsina, 2020): 1) las finalidades de la enseñanza (¿para qué se enseña? y ¿por qué se enseña?); 2) la organización de la enseñanza (¿qué se enseña? y ¿cuándo se enseña?); y 3) las prácticas de enseñanza (¿cómo se enseña?). Con ello, se pretende promover un debate sobre la calidad de la Educación Matemática Infantil y la influencia en el aprendizaje de las matemáticas en etapas educativas posteriores.

Finalidades de la enseñanza de las matemáticas en Educación Infantil

Sobre esta dimensión, se destacan dos cuestiones fundamentales: el papel relevante que tiene la Educación Infantil para desarrollar las habilidades matemáticas y la entidad propia de la etapa.

En el marco del desarrollo integral, es fundamental reconocer en el papel de las matemáticas intuitivas e informales. Los conocimientos matemáticos intuitivos se refieren a un tipo de conocimiento autoevidente, basado en la certeza intrínseca, más global, metafórico, no analítico (Fischbein, 1987); adicionalmente, los conocimientos matemáticos informales tratan sobre las nociones y procesos aprendidos en la dinámica diaria no escolar, los cuales se desarrollan a partir de las interacciones con el medio físico y social, donde se presentan escenarios como los juegos que generan aprendizajes de una manera más natural y espontánea (Alsina, 2015; Baroody, 2005; Clements y Sarama, 2015; Geist, 2014; Ginsburg y Baroody, 2007; Vanegas et al., 2021). Estos conocimientos informales son el eslabón necesario para el acceso a la matemática formal, que se refiere a las habilidades y conceptos que se aprenden en las escuelas y suele caracterizarse por una matemática más simbólica y escrita (Baroody, 2000). De acuerdo con Ginsburg et al. (1998), estas formas de aprendizaje se relacionan entre sí para ir dando un sentido al desarrollo de los conocimientos matemáticos.

En relación a la entidad propia de la etapa, es importante precisar que la Educación Infantil *no es una etapa pre-escolar*, tampoco en lo que se refiere a la enseñanza de las matemáticas. Desde este prisma, las matemáticas que se aprenden en esta etapa tienen por objeto que los niños puedan desenvolverse en diversas situaciones de la vida cotidiana en las que necesitan conocimientos matemáticos, en una clara alusión al enfoque competencial (NCTM, 2003).

Organización de la enseñanza de las matemáticas en Educación Infantil

Geist (2014), Clements y Sarama (2015) y Alsina (2006, 2015), han realizado diversos estudios que les han permitido establecer qué conocimientos matemáticos son importantes abordarlos en toda la etapa de Infantil. Anteriormente, otros organismos y autores habían propuesto los conocimientos matemáticos que deberían aprender los niños a partir de los 3 años. Canals (1989), por ejemplo, había realizado una propuesta de organización de los conocimientos matemáticos de 3 a 6 años a partir de tres tipos distintos de actividades matemáticas: identificar, relacionar y operar. Esta autora incluía los bloques de lógica, números y cálculo, medida y geometría. El NCTM (2003) se refiere a conocimientos relativos tanto a los contenidos (números y operaciones, álgebra, geometría, medida, datos y azar) como a los procesos (resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación). Otros autores realizan aportaciones que van consolidando la disciplina, como por ejemplo Chamorro (2005), quién desarrolló los bloques de lógica, el número y la aritmética, la geometría y la medida, además de la resolución de problemas; Castro y Castro (2016), en cuya obra colectiva se hace referencia al pensamiento lógico-matemático, el espacio y la geometría, los números y las operaciones, y la medida; o bien el libro de Muñoz-Catalán y Carrillo (2018), en el que participan diversos autores y que tratan el número y las operaciones, las magnitudes, la estadística y la probabilidad, el espacio y las figuras geométricas. En estas propuestas, más allá de explicitar los contenidos que se deben abordar por edades, se remarca que las matemáticas infantiles deben incorporar la exploración de una gran variedad de ideas matemáticas (numéricas, geométricas, de medida, de estadística, del álgebra temprana) y el desarrollo de procesos matemáticos (conexiones, resolución de problemas, razonamiento, comunicación y representación).

Las prácticas de enseñanza de las matemáticas en Educación Infantil

En diversas declaraciones de posición se han descrito algunas recomendaciones esenciales acerca de las prácticas de enseñanza de las matemáticas en Infantil, que aquí se reproducen de forma sintetizada. Así, por ejemplo, la Asociación Nacional para la Educación Infantil y el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (NAEYC y NCTM, 2013), señalan que es necesario potenciar el interés natural de los niños en las matemáticas y su disposición a utilizarlas para dar sentido a su mundo físico y social; aprovechar las experiencias y conocimientos previos de los niños; utilizar prácticas docentes que fortalezcan los procesos infantiles de resolución de problemas y razonamiento, así como los de representación, comunicación y conexión de ideas matemáticas; facilitar que los niños interactúen con ideas matemáticas clave; proporcionar tiempo suficiente, materiales, y apoyo para que los niños se impliquen en el juego; o introducir activamente conceptos matemáticos, métodos y lenguaje a través de una variedad de experiencias y estrategias de enseñanza apropiadas; entre otras. También la Asociación Australiana de Profesores de Matemáticas e Infancia en Australia (2012) propone diversas recomendaciones, por ejemplo, atraer la curiosidad natural de los niños; utilizar enfoques aceptados para la educación en la primera infancia como el juego para facilitar el desarrollo infantil de las ideas matemáticas; animar a los niños a verse a sí mismos como matemáticos, estimulando su interés y habilidad en la resolución de problemas y la investigación a través de actividades relevantes para ellos, que supongan un reto, y exijan mantener el esfuerzo; proporcionar materiales apropiados, espacio, tiempo y otros recursos para animar a los niños a implicarse en su aprendizaje matemático; animar a los pequeños a justificar sus ideas matemáticas a través de la comunicación de estas ideas, de un modo desarrollado por los niños, que muestren niveles adecuados de rigor matemático; etc.

Con base en las dimensiones descritas, en los apartados siguientes se profundiza en distintos conocimientos matemáticos que se deben potenciar en la Educación Infantil. Se resaltan avances de la investigación en Educación Matemática Infantil y se ejemplifican prácticas que se espera enriquezcan el trabajo de aula y, con ello disponer, además del estado actual, de una base para analizar escenarios de futuro de la Educación Matemática Infantil en nuestro contexto.

Educación matemática en 0-3

En los últimos 20 años, se ha observado un interés creciente por el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas desde el nacimiento a los 3 años. Observamos esta tendencia en documentos curriculares (Clements, 2004; National Research Council, 2014), en investigaciones y experiencias en el aula (Alsina, 2015; De Castro, 2011; De Castro et al., 2015; De Castro y Quiles, 2014; Edo, 2012; Lee, 2012), y en libros para la formación inicial de maestras y maestros de Educación Infantil (Alsina, 2006; Clements y Sarama, 2015; Geist, 2009).

Los niños de 0 a 3 años comienzan a desarrollar intuiciones matemáticas que serán la base para sus posteriores aprendizajes, todavía dentro de la Educación Infantil (3 a 6 años), así como después, en la Educación Primaria. En estas edades, el aprendizaje se desarrolla a través del juego, casi siempre muy poco dirigido, con la creación de entornos de aprendizaje, en que se organizan el espacio y los materiales para proporcionar experiencias, gracias a las cuales, los pequeños puedan desarrollar estas intuiciones matemáticas.

Oportunidades de aprendizaje de las matemáticas, de 0 a 3 años, durante una jornada escolar

Las rutinas proporcionan oportunidades para el aprendizaje matemático. Empezamos la jornada con el recibimiento. Después, recogemos el aula tras jugar, esperando a los demás miembros del grupo. Aquí aparece el pensamiento matemático al guardar los juguetes realizando agrupamientos, seleccionando objetos de un tipo, o elaborando clasificaciones sencillas que atienden al tipo de objeto. Al tiempo, se deben coordinar el tipo de objetos a guardar con el número y características de los recipientes que se usan para guardarlos, orientarse en el espacio y distribuir correctamente los materiales en recipientes. A veces, incluso, utilizar algún tipo de simbolización, guardando objetos en un cesto con un dibujo o una foto del objeto (De Castro et al., 2015).

En el corro, o asamblea, cada día, el encargado del día en el aula de 2 a 3 años puede contar a los compañeros que han venido. La disposición de los pequeños en el corro facilita un orden para el conteo. El objetivo, más que contar correctamente, es ofrecer una situación significativa que da sentido a la práctica del conteo para determinar cuántos somos, si falta alguien, o cuántos faltan. Ir despacio, tocando a cada compañero, al contar (con una varita, en la actividad de "contar cabezas", Figura 1) ayuda a hacer la correspondencia uno a uno. Este conteo emergente va acompañado de errores, al tratar con cantidades muy grandes para ellos. Son habituales los errores en el recitado de la secuencia de palabras-número: "uno, dos, tres, cuatro, cinco, ocho, nueve, cinco, seis, …". Tampoco los niños son conscientes que el último numeral recitado representa el número de compañeros contados, o principio de cardinalidad. En este contexto, los niños pueden "escribir" cuántos compañeros han venido, desarrollando sus propias notaciones numéricas. Con el paso del tiempo, se observan sistemas de notación que denotan la intención de representar cantidades mediante marcas, una representación icónica del número basada en el uso de la correspondencia uno a uno (Figura 1). Estas actividades introducen a los pequeños en el ámbito de la cuantificación, y, más en concreto, del conteo y la estimación. Cuando les damos pistas "hoy faltan muchos compañeros" o "hoy estamos todos", sus notaciones varían, haciendo más o menos marcas.

Figura 1. Contar "cabezas" y estrategias para repartir cubiertos

En la comida, aparecen de nuevo oportunidades para aprender matemáticas con el reparto de platos, cubiertos o baberos. Aparecen distintas estrategias: reparto de uno en uno, llevar un plato, colocarlo en la mesa, y volver por el siguiente; llevar todos los elementos, el cesto de las cucharas, y devolver el cesto tras el reparto; o realizar una estimación, tomando varios objetos, y devolviendo sobrantes o volviendo a buscar más (Figura 1, derecha). Los propios niños y niñas, en caso de error, suelen alertar al responsable. En el almuerzo, niñas y niños toman uno o varios trozos de fruta. Ésta se preparada en un cuenco y un niño la reparte entre sus compañeros. También en este momento pueden generarse errores, dejar algún niño sin fruta, típicos de situaciones de correspondencia uno a uno, de enumeración, conteo o estimación. Aquí la colocación de los niños influye de manera notable. El maestro, en este caso, puede incidir en hacer ver la importancia de seguir el orden y fijarse en que cada niño tenga fruta. Para que sea una situación manejable por el niño, serán cantidades pequeñas (hasta tres, por ejemplo) y se apoyará en comentarios como "tienes que traer uno para… y otro para…" (De Castro y Flecha, 2018).

Matemáticas y juego sensorial

En el aula de bebés, 0-1 años, las matemáticas hacen su aparición a través del juego sensorial, con recursos como el "cesto de los tesoros", propuesto por Goldschmied (2000) (Alsina, 2006; Edo, 2012). El conocimiento de los objetos, a través de la exploración de sus propiedades físicas y sonoras, abre la puerta a los agrupamientos y a las clasificaciones, que podemos ver ya en el aula de un 1-2 años, en variantes del juego heurístico (Alsina, 2006; Edo, 2012; Goldschmied, 2000). Para los bebés, se suele proponer la creación de diferentes cestos de materiales, con una temática concreta, como un cesto con instrumentos musicales, de frutas, etc. (De Castro y Flecha, 2018)

Algunas situaciones de juego se plantean en el ciclo de 0 a 3 a partir de instalaciones (Alsina y León, 2016). En ellas, los materiales no se disponen al azar; hay un "orden", una estructura y una intencionalidad de estimular el pensamiento matemático. La tela sobre el suelo, con los materiales en el borde, delimitan un espacio. En la disposición, también se aprecia una simetría aproximada. Los materiales, en cada parte del espacio de juego, se presentan agrupados. Hay recipientes de distintos tamaños para explorar la magnitud capacidad, para ordenar por tamaños, para trasvasar contenidos y para hacer comparaciones. Abundan las equivalencias en forma, cilindros, pero también las diferencias (materiales de plástico, madera, metal, o cartón). Seguimos la línea de Geist (2014) al plantear que, en la intervención en estas edades, es fundamental la organización del entorno de juego. En la Figura 2, observamos la organización del entorno y una situación de trasvasado de un recipiente a otro, que partía de un agrupamiento de tapones amarillos y del llenado de un vaso. A la derecha, una intervención del maestro haciendo ver la diferencia de capacidad entre dos recipientes. Los niños utilizan las latas de atún para establecer correspondencias uno a uno entre colecciones de latas y troncos, y los vasos para llenarlos de materiales y hacer trasvases. El tipo de actividad matemática es dirigida indirectamente por los maestros a través de una cuidada selección de materiales y la organización del entorno de juego, que se traduce después en "acciones matemáticas" (Alsina y León, 2016; De Castro y Flecha, 2018).

Figura 2. Disposición de los materiales en la propuesta, trasvasados e intervención

Otras propuestas adecuadas para el aprendizaje de las matemáticas de 0 a 3 años son las bandejas de experimentación, para niñas y niños de 1 a 3 años (Alsina, 2015; Edo, 2012) y las transformaciones de espacios (Edo, 2012). También el juego en el exterior, en el jardín, puede estimular el pensamiento matemático. Los materiales más comunes son los cubos, palas y arena; elementos ideales para iniciarse en intuiciones relativas a la cantidad, peso o capacidad, en el camino hacia la medición de magnitudes. Disponer de diferentes contenedores para la arena, facilita la comparación de capacidades, al introducir unos dentro de otros, o a través del trasvase del contenido (Lee, 2012).

Juego de construcción de 0 a 3 años

Otra situación privilegiada para la emergencia de intuiciones matemáticas es el juego de construcción. Los niños, desde muy temprano (1-2 años), comienzan a recorrer una trayectoria de aprendizaje en la construcción que ha sido descrita por Gura (1992). Comienzan formando apilamientos lineales verticales (torres) y horizontales (caminos), después pasan a los apilamientos bidimensionales, formando embaldosados y paredes (Figura 3, izquierda), a los cerramientos, los puentes, y acaban formando patrones y simetrías. La evolución a lo largo de estos hitos es rápida y depende más de la experiencia con la construcción que de la edad, apareciendo simetrías ya en el aula de 2-3 años (Figura 3, derecha).

Figura 3. Elementos matemáticos en el juego de construcción infantil de 0 a 3 años

En el juego de construcción se dan múltiples oportunidades para el aprendizaje de las matemáticas. Se construyen formas geométricas a partir de otras, como el rectángulo de la Figura 3 (izquierda), aparece la longitud en los apilamientos horizontales, y la altura en las torres, también con situaciones de comparación directa, bien con la altura de los niños, o entre dos torres. También, al formar puentes, se compara la distancia de los pilares con la longitud de la pieza superior. Finalmente, aparecen esquemas de construcción que se repiten, como patrones, y construcciones simétricas que surgen de forma espontánea (De Castro, 2011; De Castro y Quiles, 2014).

Sentido numérico

El desarrollo del sentido numérico en la Educación Infantil implica un gran número de conocimientos y procesos matemáticos. Aunque el conteo, la iniciación a la suma y la resta, y el desarrollo de notaciones numéricas, han recibido una atención mayor en Educación Infantil, hay otros contenidos que cada vez requieren mayor atención. Por ejemplo, la subitización, o reconocimiento inmediato (súbito) de una cantidad sin necesidad de contar, gracias a que se trate de una cantidad muy pequeña de hasta 3 o 4 objetos (subitización perceptiva), o a que la cantidad se organice según un patrón visual (como en los dados, las manos, los naipes) y utilicemos la relación parte-todo (subitización conceptual) (Clements y Sarama, 2015). En la actualidad, hay diferentes materiales manipulativos que proponen una iniciación visual a la aritmética, complementaria del conteo, como el rekenrek (un ábaco holandés), las placas del Numicon (adaptación de las placas de Herbinière Lebert), o los marcos de diez (*ten frames*). Estos y otros materiales manipulativos (regletas de Cuisenaire, cubos encajables) facilitan también el aprendizaje de otros contenidos, como la descomposición aditiva, que es un contenido adecuado para la edad de 5 años en Educación Infantil con materiales manipulativos y en contextos de resolución de problemas (Dacey et al., 1999) y será un requisito básico para el aprendizaje de estrategias de cálculo mental en la Educación Primaria.

El aprendizaje del conteo y la iniciación a la aritmética

Desde los 2 años, hasta los 6, se van desarrollando muchos aspectos interrelacionados del conteo. La recitación de la secuencia de palabras número comienza en torno a los 2 años, con recitados hasta 5. Poco a poco, el recitado va avanzando hasta el 10 (3 años) y hasta el 20 (4 años), alcanzando el recitado hasta 100 en torno a los 6 años, para lo cual es necesario aprender a contar de 10 en 10 y hacer la conexión entre décadas (saber qué palabra número va después del 29, 39, etc.). También, en torno a los 6 años, se aprende a contar hacia atrás desde 10 (Clements y Sarama, 2015). El recitado de palabras número no es algo puramente memorístico, pues las palabras número siguen ciertos patrones en su formación, como la ley de formación a partir del 16 o del 20 (veinti+uno, veinti+dos, etc.), la similitud entre las palabras para las unidades y las decenas (tres, cuatro, cinco… treinta, cuarenta, cincuenta…). Además, la lista de las palabras número que usamos para contar se va convirtiendo en un instrumento matemático, según pasamos por diferentes niveles de elaboración de la parte de la secuencia adquirida (Fuson, 1992).

La resolución de problemas aritméticos verbales

Los problemas aritméticos verbales de estructura aditiva recomendados para Educación Infantil son los correspondientes a las categorías semánticas de cambio, creciente y decreciente, con incógnita en la cantidad final y los de combinación con incógnita el total. Un segundo grupo de problemas, accesibles en último curso de Educación Infantil, en torno a los 6 años, son los de cambio con incógnita en la cantidad de cambio, los de combinación con incógnita en una parte, y los de comparación con incógnita en la diferencia (Clements y Sarama, 2015). Los niños resuelven estos problemas utilizando estrategias informales de modelización directa. En ellas, se representan las cantidades, las relaciones entre cantidades o las acciones que se relatan en el enunciado, y finalmente se utiliza el conteo para determinar la solución del problema (Fuson, 1992).

Realmente, según la investigación (ver revisión en De Castro y Hernández, 2014), los niños y niñas de 4 a 6 años pueden resolver una variedad mucho más amplia de problemas aritméticos verbales, incluyendo problemas de estructura multiplicativa, de multiplicación, división reparto y división medida y otros problemas. Las condiciones que se deben cumplir para que los pequeños resuelvan estos problemas son: (1) Que el enunciado sea breve y evoque una situación familiar; (2) Que las cantidades que aparecen en el problema sean accesibles a las capacidades de conteo infantiles;

(3) Que el enunciado sea fácil de modelizar. Un ejemplo de esta situación es el problema, basado en el cuento "*A remainder of one*", de Elinor J. Pinczes, en el que los niños deben organizar un ejército de 21 insectos en una disposición rectangular, en filas iguales. Se trata de un problema de descomposición factorial que admite varias soluciones. En la Figura 4, vemos las estrategias de modelización directa que utilizan niñas y niños de 5 años para resolver este problema. La estrategia base es crear contando una colección de 21 objetos e ir formando, por ensayo y error, gráfica o manipulativamente, grupos de 2, de 3 (una de las soluciones, Figura 4, en el centro), de 5, de 6, de 7 (la segunda solución, Figura 4, izquierda). Al final de la sesión de resolución de problemas, los niños pueden compartir y explicar sus soluciones.

Figura 4. Estrategias de modelización directa, y soluciones, en un problema de descomposición factorial

Situaciones de aula como las descritas en el ejemplo de la Figura 4, ilustran que, más allá de los contenidos, en la Educación Infantil se pueden desarrollar procesos matemáticos (NCTM, 2003) y los distintos momentos del ciclo de construcción de modelos matemáticos, abarcando desde el planteamiento de un problema "real", como la organización de una colección de objetos en una disposición rectangular, la elaboración de un modelo matemático con objetos o dibujos, la obtención de soluciones matemáticas (21=3×7, 21=7×3, 21=21×1, 21=1×21), su interpretación en contexto (incluyendo 1 fila de 21 soldados o 21 filas de 1 soldado), y su valoración como posible solución del problema inicial, descartando algunas de las soluciones matemáticas (21=21×1, 21=1×21).

Las representaciones numéricas y el aprendizaje de los numerales escritos con cifras

Las notaciones numéricas van evolucionando, en la Educación Infantil, desde representaciones icónicas, en que el número se representa mediante una colección de dedos, marcas, u objetos, cuantificados mediante subitización o correspondencia uno a uno, hasta las representaciones simbólicas con cifras que llegan a implicar el conocimiento del principio del conteo de cardinalidad. Alsina (2011), al estudiar las notaciones numéricas de niñas y niños de 3 a 6 años, en dictados de números, encuentra que hay una evolución desde la ausencia de código simbólico, con representaciones icónicas (un 69,9% en 3 años), al uso de código simbólico (un 89% a los 5 años). Muchos niños, de 2-3 años, ya son capaces de representar hasta 3 objetos, mediante marcas (Clements y Sarama, 2015; De Castro et al., 2015).

En la Figura 5 vemos tres actividades cuya finalidad es el desarrollo de la representación numérica. En la primera, a la izquierda, los niños de 3 años se inician en los juegos de tablero. Lanzan un dado y deben colorear la cantidad de casillas obtenida en la tirada. Ahí aparece una primera representación numérica, en que la configuración del dado, y la relación parte-todo, permiten la subitización conceptual (Clements y Sarama, 2015) de la cantidad de puntos. Después, el niño determina las casillas a colorear, y hace una marca en la cifra correspondiente del camino numérico, mediante el conteo. Finalmente, copia el numeral en el espacio intermedio. Los cambios de color en cada tirada permiten evaluar el desarrollo de la partida. En el centro de la Figura 5, observamos el desarrollo de una partida de bingo. Los pequeños comienzan copiando los números de los cartones en su propio cartón, en el cuaderno. Se pueden utilizar los números hasta 15 en 4 años, y hasta 30 en 5 años. Durante la partida, se van escribiendo los "números que han salido" y redondeando los que tenemos en el cartón. Cuando un niño no sabe leer el número que tiene que "cantar" al extraer una bola del bombo, o consigue escribir el número que canta un compañero, utiliza un camino numérico, o una tabla 100, contando casillas, para saber cómo "se llama" cada número escrito con cifras en el camino numérico. Finalmente, a la derecha, vemos la actividad del "número misterioso". En ella, cada día tenemos que averiguar qué número está escondido tras cada dibujo, bien examinando e interpretando la representación numérica de cada casilla, o bien buscando pautas en los números correspondientes a los días anteriores. En esta actividad, para niñas y niños de 5 años, se discute primero por parejas, y después se elige a tres alumnos, que deben explicar a los demás sus hipótesis sobre cuál es el número secreto del día.

Figura 5. Actividades de representación numérica

Las actividades de la Figura 5, pretenden mostrar que, a cualquier edad, dentro de la Educación Infantil, podemos aprender a usar distintas notaciones numéricas, incluyendo la lectoescritura de números hasta 30. Esto se puede hacer, a través del juego, y en diferentes situaciones de aula típicas en estas edades: la partida de bingo se desarrolla en gran grupo; el juego de tablero, en el trabajo por rincones; y el número misterioso, en la asamblea. En esta última actividad, el alumnado de 5 años se aproxima a las ideas sobre el sistema de numeración decimal, incluyendo las decenas, que serán tan importantes en los primeros cursos de Educación Primaria, trabajando con representaciones gráficas de materiales manipulativos que usan en el aula, que enfatizan los agrupamientos de 10: marcos de diez (*ten frames*), bloques de base 10, y palillos agrupados de 10 en 10.

Con estos ejemplos, tratamos de ilustrar el principio didáctico de que, en la Educación Infantil, es viable articular las propuestas matemáticas basadas en el juego y adecuadas al desarrollo cognitivo, físico y emocional de los pequeños, logrando un desarrollo del sentido numérico apropiado para afrontar los retos que supondrá el cambio de etapa educativa a los 6 años.

Sentido algebraico

El álgebra se ha vinculado tradicionalmente al lenguaje simbólico con el que se comunican las Matemáticas (Alsina, 2020). Sin embargo, hay que considerar que existe también una larga tradición de promover conocimientos de naturaleza algebraica previos al simbolismo ya desde la Educación Infantil, como los distintos tipos de relaciones, los patrones o los cambios.

Autores como Montessori, Piaget o Dienes situaron estos conocimientos dentro de la *Lógica*, la *Lógica Matemática* o el *Razonamiento Lógico-matemático.* Alsina (2019b) indica que los currículos de infantil de países como Estados Unidos, Australia, Singapur o Nueva Zelanda han empezado a sustituir paulatinamente estas nociones por el término *Early Algebra* (Álgebra Temprana), que intenta introducir habilidades propias del pensamiento algebraico como la predicción o la generalización desde las primeras edades. A partir del análisis de contenido de estos currículos, Pincheira y Alsina (2021) han caracterizado el álgebra temprana en infantil como:

> La capacidad de desarrollar modos de pensamiento algebraico durante las primeras edades en situaciones vinculadas tanto al álgebra propiamente como a otras áreas del currículo de matemáticas, tales como números, geometría, medida, etc. Para empoderar estos modos de pensamiento algebraico, se debería capacitar a todos los niños y niñas de Educación Infantil para experimentar con elementos u objetos a partir del reconocimiento de atributos con el propósito de establecer relaciones (clasificaciones, ordenaciones, correspondencia, etc.), realizar seriaciones a partir de patrones de repetición (identificación, construcción y representación del patrón) y describir cambios cualitativos y cuantitativos (p. 175-176).

Considerando estos antecedentes, se presenta una síntesis de los principales conocimientos matemáticos y didácticos que debería movilizar el profesorado de infantil para promover el desarrollo del sentido algebraico en esta etapa educativa.

Conocimientos matemáticos y didácticos para promover el desarrollo del sentido algebraico en educación infantil

Con base en la caracterización del álgebra temprana, el profesorado de infantil debería tener un conocimiento de las matemáticas asociadas al sentido algebraico que puede movilizar un niño de esta etapa, asumiendo que debería conocerlas de una manera profunda y diferente a como debe saberlo un alumno (Alsina y Delgado, en prensa). Desde este punto de vista, Alsina (2022) se refiere a tres conocimientos importantes:

- Reconocimiento de atributos para establecer relaciones: el reconocimiento de atributos es un conocimiento físico acerca de las características de los objetos del entorno (color, tamaño, tipo de material, olor, etc.) que, a su vez, es imprescindible para promover el conocimiento matemático propiamente, estableciendo diversos tipos de relaciones: relaciones binarias de equivalencia (clasificaciones), que cumplen las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva; relaciones binarias de orden (ordenaciones), que cumplen las propiedades antireflexiva, antisimétrica y transitiva; y las correspondencias, que son una ley que asocia determinados elementos de una agrupación A con uno o más elementos de otra agrupación B.

– Patrones: la identificación de patrones implica la observación y reconocimiento de regularidades o secuencias iterativas en objetos o datos. Rittle-Johnson et al. (2013), Wijns, et al. (2019) y Lüken (2020) han determinado que las tareas de modelado más frecuentes son: a) duplicar el mismo patrón; b) ampliar la secuencia; c) encontrar elementos faltantes; y d) construir el mismo patrón con diferentes materiales; siendo copiar, extender, interpolar y generalizar respectivamente, las principales habilidades.
– Descripción de cambios: el cambio es una idea matemática importante que se refiere a una transformación que, desde una perspectiva genérica, se puede entender como una operación que consta de un estado inicial, el cambio o transformación propiamente dicha a través de un operador, y un estado final (Alsina, 2006).

En relación a los conocimientos didácticos, que se focalizan en la organización y las prácticas enseñanza, Alsina (2015) y Alsina y Berciano (2020), entre otros, han identificado que los niños menores de tres años ya empiezan a realizar acciones vinculadas a los conocimientos descritos. Asimismo, diversos autores han planteado trayectorias de aprendizaje y/o propuestas de distribución de contenidos para niños de 3 a 6 años que contribuyen a desarrollar el sentido algebraico. Para el caso de los patrones, por ejemplo, Clements y Sarama (2015) y Rittle-Johnson et al. (2015) afirman que alrededor de los tres-cuatro años los niños son capaces de copiar un patrón. Las habilidades de extender e interpolar emergen a los cuatro años (Lüken, 2020; Rittle-Johnson et al., 2013); y a partir de los 5-6 años identifican la unidad de repetición y transfieren dicho conocimiento para generalizar un patrón (Clements y Sarama, 2015; Rittle-Johnson et al. 2015).

Para promover el desarrollo progresivo del sentido algebraico, las experiencias informales de exploración del entorno, manipulación, experimentación y juego son imprescindibles en la Escuela Infantil (0-3 años). Autores como Goldschmied (2000), Alsina (2006, 2015) o Edo (2012), entre otros, describen propuestas como el cesto de los tesoros, el juego heurístico o las bandejas de experimentación, que permiten a los niños menores de 3 años descubrir de qué están hechos los objetos, qué acciones se pueden realizan con ellos, plantear hipótesis y conjeturas, etc. y, de este modo, iniciar el aprendizaje de conocimientos matemáticos intuitivos e informales que son la base del sentido algebraico.

Respecto al segundo ciclo, Alsina (2019, en prensa) propone itinerarios de enseñanza, es decir, secuencias intencionadas a partir de diversos recursos y estrategias didácticas organizadas en tres niveles:

– Recursos informales, que permiten visualizar las ideas matemáticas de manera concreta: situaciones reales, materiales manipulativos y juegos; p. ej., en la Figura 6 los niños descubren un patrón de repetición AB en una plaza (columna-farola), clasifican piezas por un criterio de forma y observan cambios de color a partir de la máquina de cambiar cualidades.

Figura 6. Recursos informales para desarrollar el sentido algebraico de 3 a 6 años

– Recursos intermedios, que permiten avanzar hacia la esquematización y la generalización progresiva: recursos literarios y tecnológicos; p. ej., en la Figura 7 se muestra el cuento “La Ratita Presumida”, cuya estructura sigue siempre el mismo patrón, pero con un cambio al final que advierte que, aunque los patrones sirven para predecir lo que va a suceder, hay que estar atentos a los cambios y comprobar si las predicciones se cumplen o no; junto con un robot educativo programable para trabajar patrones que, a su vez, permite desarrollar el pensamiento computacional. Para Wing (2006), el pensamiento computacional se vincula principalmente a la resolución de problemas haciendo uso de los conceptos fundamentales de la informática. Las principales habilidades asociadas son: formular problemas que permitan usar un ordenador u otras herramientas para encontrar la solución; organizar y analizar lógicamente datos; representar datos a través de abstracciones, como modelos y simulaciones; automatizar soluciones mediante la secuenciación de pasos ordenados: identificar, implementar y analizar posibles soluciones para conseguir la más eficiente; y generalizar y transferir un proceso de resolución a una amplia variedad de problemas (ISTE y CSTA, 2011).

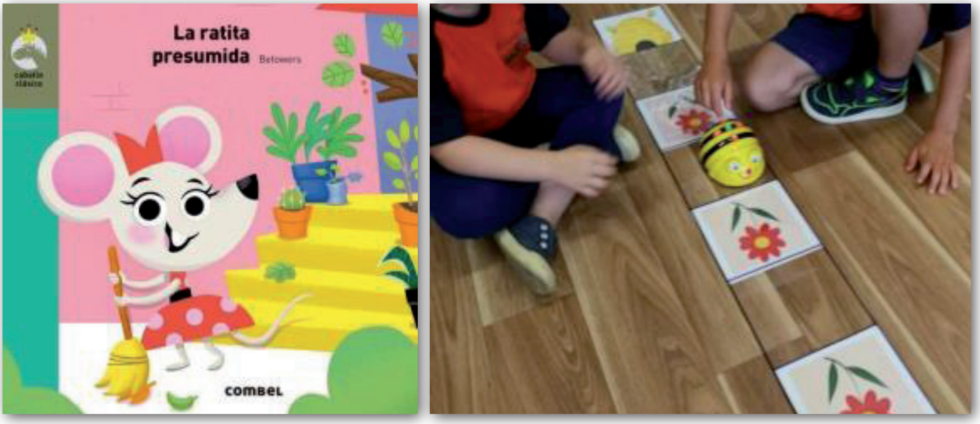


Figura 7. Recursos intermedios para desarrollar el sentido algebraico de 3 a 6 años

Como se aprecia en la segunda imagen de la Figura 7, al resolver la tarea de patrones se ponen en juego algunas de las habilidades indicadas, sin que ello signifique que el pensamiento computacional sirva exclusivamente para desarrollar el sentido algebraico. Desde este punto de vista, Alsina y Acosta (2018) establecen unos primeros vínculos entre la educación matemática infantil y el pensamiento computacional a partir de los procesos del NCTM (2003).

– Recursos formales, que permiten trabajar la representación y formalización del conocimiento matemático con procedimientos y notaciones convencionales: recursos gráficos; p. ej., en la Figura 8 se muestra un ejemplo de WODB (*Which One Doesn't Belong?*), un recurso creado por un profesor estadounidense en el que, a partir de cuatro situaciones representadas gráficamente, los niños deben pensar cual no pertenece y argumentar por qué a partir de características como el color, el tipo de alimento, la cantidad de elementos, etc.

Figura 8. Recursos formales para desarrollar el sentido algebraico de 3 a 6 años

La planificación y gestión de la enseñanza del álgebra temprana en infantil a partir de estos itinerarios de enseñanza permite completar el aprendizaje desde lo concreto hasta lo simbólico y, lo que es más importante, empezar a desarrollar habilidades imprescindibles del sentido algebraico como la predicción y la generalización, que son una puerta de entrada a las matemáticas superiores.

Sentido espacial

El desarrollo del razonamiento espacial en las edades iniciales, no sólo se constituye en una base para que los niños puedan explicar el mundo que les rodea, sino también para generar conexiones entre diferentes ideas matemáticas y entre las matemáticas y otras disciplinas como el arte, las ciencias, la tecnología, el diseño, las ciencias sociales, etc. (Moss et al., 2016). De acuerdo con Newcombe y Frick (2010) el pensamiento espacial se refiere a la ubicación de los objetos, sus formas, sus relaciones entre sí y las trayectorias que siguen cuando se mueven. El razonamiento espacial involucra diferentes acciones: visualización, localización, orientación, cambio de dimensiones, elaboración de mapas, transformaciones, diseño, composición y descomposición, entre otras (Davis y Spatial Reasoning Study Group, 2015). A continuación, se resaltan varios aspectos que es importante considerar en el fomento del sentido espacial en Educación Infantil.

Contextos y sentido espacial

Los niños se desarrollan en un contexto social que le brinda múltiples informaciones, que generalmente percibe por la propia exploración de lo que tiene alrededor.

El niño hace exploraciones y progresivamente crea formas de representación de los diferentes contextos: imágenes, diseños, y lenguaje verbal (Stocco et al., 2003). En consecuencia, es necesario brindar oportunidades para que los niños vivencien diversos tipos de contextos. No es lo mismo la experiencia de ver formas al subir una montaña que usar un conjunto de piezas de madera para hacer una construcción. No es lo mismo reconocer formas de la naturaleza que identificar formas en la cocina. Tampoco es lo mismo hablar del movimiento de un columpio o el que se produce en la elaboración de la masa para hacer pan. Todas estas situaciones ofrecen posibilidades diversas que junto con preguntas adecuadas pueden ayudar a agudizar el sentido espacial.

Si se posibilita que los niños vivencien experiencias en diferentes espacios, podrán identificar no sólo las formas en el universo sino también las transformaciones asociadas a acciones, como: cerrar/abrir; inflar/desinflar; estirar/apretar; encajar/apilar/entrelazar; vaciar/llenar; balancear/saltar; etc. Las experiencias en el suelo deben complementarse con la mirada del cielo, la pantalla del ordenador, o ver estructuras de realidad virtual. El trabajo con el mundo del arte permite hablar tanto de lo que se ve como de la función de los objetos como representaciones de ideas, sentimientos o vivencias.

> Es necesario usar diferentes contextos y analizar sus potencialidades para desarrollar ideas geométricas. Empezar por los más cercanos, hasta proponer situaciones desconocidas a partir de videos o noticias televisivas. Otros escenarios como el juego y el cuento pueden situar a los niños para “viajar” en mundos diferentes pero necesarios para explorar su idea de espacio.

Una mirada cultural sobre el sentido espacial

La Geometría ha formado y forma parte de la cultura de nuestra sociedad. Desde que se habla de migración, o de traslado se habla de movimiento en el espacio. O bien cuando jugamos a la gallinita ciega o el cuatro en raya pensamos en situar objetos en el espacio (Bishop, 1999). Fenómenos como la observación de cambios en sombras, analizar qué pasa cuando se observan reflejos en espejos naturales, o construidos, son observaciones que consideran este elemento cultural. Experimentar con espejos cilíndricos -como han hecho algunos artistas como Dalí-, implica introducir invenciones culturales que sorprenden a los niños y sirven como elemento de provocación para razonar y hablar de la forma, la medida, la posición, la repetición, entre otras nociones. Imaginar puntos de vista diferentes con ayuda de materiales manipulativos o medios tecnológicos como *google-earth* es otra experiencia cultural. Separar regiones como la tierra y el cielo mediante la línea del horizonte o línea del cielo, son experiencias clave para entender el nacimiento de la astronomía, y asociar elementos turísticos de la arquitectura.

Reconocer propiedades como la rodadura, el empaquetamiento, el equilibrio e identificar sus conexiones con ciertas relaciones geométricas (p.e. paralelismo, perpendicularidad, etc.) es importante para explicar el funcionamiento de muchos objetos y enriquece el sentido espacial. Por ejemplo, se puede asociar los balones/pelotas a objetos que ruedan pero que no lo hacen de la misma manera que los objetos con forma de cono. También se puede explorar la idea de estabilidad de formas arquitectónicas asociada a la simetría, de hecho, los niños lo hacen de manera intuitiva en sus construcciones libres (De Castro y Quiles, 2014). Otro caso puede ser el análisis de la repetición en el mundo artístico, el cual permite iniciar la mirada a los mosaicos y las transformaciones. Con estas observaciones, mostramos a los niños que el pensamiento visual es importante en muchos dominios del conocimiento actual: desde la ingeniería, la arqueología, la arquitectura, el diseño, etc.

> Hablar del sentido espacial, implica reconocer que se trata de una reflexión cultural. Muchos juegos tradicionales tienen su base en observaciones espaciales. Reconocer el porqué de la forma de los iglús y/o las inclinaciones de los techos en países con un clima predominantemente frío es hacer conscientes a los niños de los modelos de la geometría en distintas culturas.

Construcción de un lenguaje asociado al sentido espacial

Promover sentido espacial implica desarrollar capacidades diversas en cada persona. Supone un largo proceso, que requiere: explorar, comparar, expresar verbalmente e interiorizar (Canals, 1997). Requiere de un lenguaje adecuado para describir relaciones y descubrimientos. Los niños necesitan disponer de referencias que les permitan explicar cómo es su casa, su clase, su barrio, su ciudad, etc. Actualmente los niños ven el mundo a través de cuentos, dibujos, pinturas, TV, videojuegos, etc., y, desde allí incorporan expresiones/palabras como arriba, abajo, grande, estrecho, gira, mueve, entre muchas otras, las cuales se debe ayudar a significar con el trabajo que se haga de ellas en el aula. El lenguaje asociado al sentido espacial, además de implicar el uso de referentes, debe permitir a los niños hablar de diversas situaciones desde describir dónde están, dónde se encuentra un objeto que quieren, dónde encontrar determinado producto en el supermercado hasta hablar de la proximidad o lejanía de sus casas a la de sus seres queridos y/o amigos.

> El sentido espacial no se adquiere recibiendo información, ni consiste sólo en reconocer visualmente determinadas formas y saber su nombre correcto. El lenguaje se debe ir incorporando de manera progresiva, incidiendo especialmente en la comprensión que los niños van construyendo de las nociones y explorando diferentes formas de representación y comunicación de las ideas espaciales.

La dimensionalidad y referencialidad

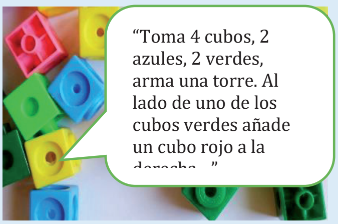
El desarrollo del razonamiento espacial en los niños implica trabajar la orientación espacial. Esto supone, saber situarse; establecer relaciones entre los objetos respecto a uno mismo como referencia según donde están situados; y, por último, situar objetos en el entorno. Todo ello comporta hablar de posición, movimiento, localización, distancias, medidas, etc., aspectos clave en la comprensión de los sistemas de referencia (Clements, 2004). Aquí entran en juego experiencias como la elaboración e interpretación de mapas, el seguimiento o planteamiento de instrucciones para seguir un itinerario, pero considerando que los niños deberían iniciar recreando situaciones de orientación usando materiales concretos, luego hacer dibujos de la organización de dichos objetos, para finalmente elaborar mapas que incluyan el uso de códigos y la utilización de símbolos (Vanegas, 2018).

> La comprensión y representación de las relaciones espaciales es uno de los desafíos de formación en las edades iniciales. El sentido de localización implica reconocer sistemas de referencia propios o externos; ubicar objetos, seguir estrategias de orientación, interpretar instrucciones de navegación y construir representaciones como los mapas, itinerarios o una maqueta. Todas estas actividades son complejas (involucran diferentes procesos y nociones), pero de gran riqueza para fomentar el sentido espacial.

Promover habilidades espaciales

Una actividad geométrica que busca un aprendizaje significativo involucra diversas habilidades (de dibujo, de construcción, de comunicación, de aplicación y transferencia, entre otras), por ello es importante potenciar procesos cognitivos como la visualización, el razonamiento y la representación (Clements, 2004; Giménez y Vanegas, 2007). Además, las habilidades de pensamiento espacial y el razonamiento geométrico desempeñan un papel fundamental en el desarrollo de procesos como la resolución de problemas; el aprendizaje matemático y la comprensión lectora de los niños (Van den Heuvel-Panhuizen y Buys, 2008). Como educadores es primordial conocer y promover actividades que potencien dichas habilidades en los niños. Y, generar un entorno de aprendizaje que les permita discutir y evidenciar sus progresos sobre las ideas geométricas (Clements et al., 2018). Para finalizar y concretar algunas de las ideas expresadas en este apartado en la Tabla 1 se describen ejemplos de actividades señalando algunas de las habilidades que potencian.

Tabla 1. Ejemplos de actividades que potencian el sentido espacial

Actividad	Descripción	Habilidades
¿Hacemos un diseño? 	• Se presenta a los niños el material • Dependiendo del material disponible, se puede pedir a los niños, que usen en su diseño, todas las piezas o acotar si se quiere focalizar en un aspecto (cierta forma, una cantidad de piezas, etc.). • El diseño puede ser libre o asociado a una temática que se esté abordando en el aula. También se pueden pedir diseños relacionados a objetos y/o personajes de una historia en particular. • Generar un diálogo para que el niño describa qué ha querido representar con su diseño.	• Visualización • Composición figuras de 3D • Comunicación
¿Dibujamos? 	• Se presenta un diseño a los niños (Puede ser uno de los que hayan realizado en la actividad anterior) • Se pide a los niños analizar el diseño y determinar cuáles y cuántas piezas se han utilizado • Se pide a los niños hacer un dibujo de las partes del diseño en papel	• Visualización • Composición y descomposición de figuras de "D y 3D • Representación
¿Hacemos un dictado geométrico? 	• Se da a los niños instrucciones orales para construir una figura en 2D o 3D. • Se da un tiempo para que los niños construyan una imagen mental de la figura descrita en las instrucciones • Los niños dibujan o construyen la figura del dictado. • Se muestran cada una de las elaboraciones a toda la clase • Se discute/razona sobre las similitudes y/o diferencias que tienen los dibujos/figuras construidas por los niños	• Visualización • Composición y descomposición de figuras de "D y 3D • Representación • Comprensión del lenguaje espacial

Actividad	Descripción	Habilidades
 ¿Cómo ir del aula al comedor? 	• Se plantea a los niños una situación en la que se debe ayudar a un alumno nuevo i/o invitado para que pueda dirigirse de un lugar a otro de la escuela (p.e. de la clase al comedor). • Se pide a los niños que individualmente realicen un dibujo que describa el recorrido que ellos hacen para ir de la clase al comedor de la escuela. • Se comparte en la clase las diferentes propuestas elaboradas por los niños. Se analiza el tipo de información que se presenta. • Se pide a un niño que interprete el dibujo propuesto por otro. Se aprovecha para hablar si contiene toda la información necesaria para que la persona sepa llegar al comedor. • Se pide a los niños que añadan, modifiquen para mejorar su propuesta.	• Representación • Uso del lenguaje espacial • Orientación • Razonamiento visual-espacial • Localización

Sentido de la medida

El sentido de la medida es fundamental para la comprensión del mundo que nos rodea. Su desarrollo es lo que nos permite describir los objetos y situaciones en las que nos encontramos: el edificio es grande, el juguete es pequeño, el colegio está cerca, o lejos, de casa, …, y uno de sus fines puede ser asignar un valor numérico a un atributo como puede ser la longitud o el peso de un objeto.

La noción de medida está estrechamente relacionada con la geometría y la aritmética y, en ocasiones, se presenta mediante aplicación de métodos e instrumentos de medida estructurados, cuyo uso supone entender los procesos de medida y el concepto de unidad de medida.

Sin embargo, hasta llegar a este nivel de comprensión, el desarrollo del sentido de la medida ha de pasar, especialmente en la etapa de Educación Infantil, por: comprender cuáles de los atributos de un objeto son susceptibles de ser medidos; establecer comparaciones entre los objetos para decidir “cuál es más largo o más corto”, “cuál pesa más”, “cuál es más grande”,…; comprender como medir o estimar medidas con medidas no estándar y estándar; o saber elegir el instrumento y la unidad apropiados para medir.

Mediante la manipulación y la experimentación, que son actividades habituales en esta etapa, y partiendo de la comprensión intuitiva que las experiencias previas de medir proporcionan, se construye el significado de la medida.

La enseñanza de la medida en Educación Infantil

Los estándares que plantea el NCTM (2003) para la medida indican que todo el alumnado debería: comprender los atributos mensurables de los objetos, y las unidades, sistemas y procesos de medida; y aplicar técnicas, instrumentos y fórmulas apropiados para obtener medidas. La concreción de estos estándares coincide con las recomendaciones del Comité Español de matemáticas (CeMat, 2021) al plantear que en Educación Infantil todo el alumnado debería: reconocer los atributos mensurables de los objetos (volumen, longitud, masa, capacidad, grosor, tiempo); componer y descomponer atributos mensurables de un objeto; clasificar, ordenar y establecer correspondencias entre objetos según sus atributos mensurables.

Así mismo, la nueva ordenación curricular contempla la inclusión de determinados aspectos del sentido de la medida en las tres áreas en las que se organiza: crecimiento en armonía, descubrimiento y exploración del entorno, y comunicación y representación de la realidad, si bien es en la segunda en la que más se mencionan. Concretamente, la primera de las competencias específicas asociadas a esta área consiste en:

> Identificar las características de materiales, objetos y colecciones y establecer relaciones entre ellos, mediante la exploración, la manipulación sensorial, el manejo de herramientas sencillas y el desarrollo de destrezas lógico-matemáticas para descubrir y crear una idea cada vez más compleja del mundo.

Más específicamente, tanto en el primer ciclo como en el segundo, aparece mención expresa a establecer relaciones entre los objetos atendiendo a sus cualidades o atributos (entre los que podemos considerar el tamaño), ubicarse en los espacios habituales (relacionado con nociones de proximidad o lejanía), o identificar situaciones en las que es preciso medir, utilizando el cuerpo u otros materiales y herramientas.

Atendiendo a las ya mencionadas recomendaciones de NAEYC y NCTM (2002) y el propio currículum de Educación Infantil establecido en el Real Decreto 95/2022, se sugiere el desarrollo de una metodología activa, articulada en torno a situaciones de aprendizaje.

Para el diseño de estas situaciones de aprendizaje que favorezcan el desarrollo adecuado del sentido numérico podemos basarnos en las trayectorias de aprendizaje de Sarama y Clemens (2009), que describen no solamente los conceptos matemáticos que niños y niñas son capaces de comprender sino el proceso que siguen en su comprensión y las acciones de la persona adulta que les acompaña en el aprendizaje que pueden favorecerlo.

Una secuencia de enseñanza debe contemplar:

- Identificación de la magnitud: reconocimiento de la magnitud. La descripción de los objetos, y las preguntas que se les planteen, permite fijar su atención en determinada característica del objeto y no en otras (haciendo énfasis por ejemplo en la longitud y no en el color).
- Comparación de magnitudes. Comparación directa, con o sin desplazamiento de los objetos, comparación indirecta, con objetos intermedios, partes del propio cuerpo o con objetos auxiliares.
- Ordenación de cantidades de magnitud.
- Medida de magnitudes con unidades no estándar y estándar, identificación de un valor numérico con la magnitud medida.

El uso y la comprensión del sistema de medida decimal y los cambios de unidades, así como las cuestiones relativas a la precisión en la medida, quedan para niveles educativos superiores.

La magnitud que primero se hace evidente para los niños y niñas de educación infantil es la longitud. Son propensos a realizar comparaciones entre sus alturas, ordenarse de mayor a menor, colocarse los altos atrás, y querer ponerse “más cerca”. Esto nos permite tomar en consideración dos aspectos de la longitud como dimensión de un objeto y como distancia entre dos objetos, este último más difícil de comprender.

Un ejemplo de aparición de la idea de longitud se puede observar en la secuencia siguiente. Se había pedido a los niños y niñas que llevaran a clase almuerzos naranjas durante la semana. Partiendo de una situación inicial en la que el objetivo era clasificar los distintos almuerzos en función de sus características geométricas y contar cuántos había de cada clase, del grupo surgió la idea de organizarlos en fila. Para saber si había “muchos o pocos” se les ocurrió comparar “¿cuantos de largo somos?” y se tumbaron sobre las mesas para hacer una comparación directa. La siguiente pregunta que se plantearon es “si los ponemos en una fila en el suelo ¿cabe en la clase? ¿hasta dónde llegará?”. La maestra se pregunta si es fácil poner todos los almuerzos en fila en el suelo o si es conveniente, y si no habrá otra forma de responder a las preguntas. Mediante una lana colocada a lo largo de la fila se puede transportar la longitud y hacer comparaciones con el largo de la clase o la altura de la maestra. El resultado de la actividad se registra individualmente (Figura 9).

Figura 9. Desarrollo de actividad de longitud en 3 años

Una secuencia similar podemos plantear para trabajar el volumen. Partiendo de un obsequio traído a clase por el padre de un niño, un recipiente de dulce de membrillo elaborado por él, se presenta en asamblea y se pregunta ¿cuánto hay? ¿hay mucho? ¿hay poco? ¿cómo podemos representar cuánto hay? Surge la idea de utilizar los multicubos encajables para "hacer un trozo igual". Esta idea es aprovechada por la maestra para plantear preguntas como "¿igual en qué? ¿de color? ¿de forma?" "noooo, de grande". Se facilitan cubos suficientes para que cada persona pueda construir su "pieza de membrillo" y a medida que lo van construyendo pueden acercarse al modelo las veces que necesiten (Figura 10).

Figura 10. Desarrollo de actividad de volumen en 4 años

Para favorecer la comprensión del peso planteamos preguntas relativas a objetos cotidianos como la bolsa de la compra, la mochila del cole "¿pesa mucho? ¿es fácil de levantar?" para continuar con comparaciones "¿qué cuesta más levantar, el balón o la sandía?". Para ordenar la cantidad de peso podemos estimar la cantidad de agua que hay en una colección de botellas. La primera aproximación permite a los niños y niñas levantar cada botella y comparar unas con otras para hacer una ordenación. El uso de un peso les permite asignar un valor numérico a cada recipiente, que dependerá de la cantidad de agua que contiene, y les llevará a una ordenación que puede coincidir, o no, con la estimada previamente (Figura 11).

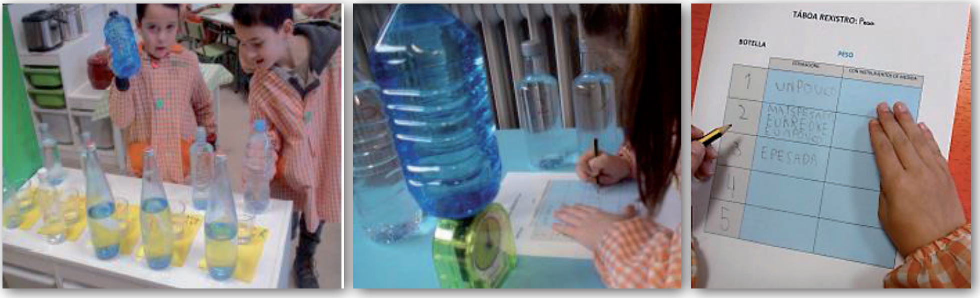


Figura 11. Desarrollo de actividad de peso en 5 años

Sentido estocástico

La incorporación de la enseñanza de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil es reciente. A principios del siglo XXI, por ejemplo, el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2003) propone estándares de contenido de "Análisis de datos y probabilidad" a partir de los 3 años. Desde entonces, algunos países han empezado a incluir la estadística y la probabilidad de forma explícita en los currículos de Infantil, a medida que han reconocido la importancia de que se empiecen a desarrollar progresivamente los primeros conocimientos para interpretar los datos de manera crítica y tomar decisiones en situaciones de incertidumbre, que son habilidades imprescindibles para los ciudadanos del siglo XXI (Alsina, 2022).

Considerando estos antecedentes, este apartado se organiza en torno a las tres dimensiones para caracterizar la enseñanza de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil propuestas por Alsina (2021): las finalidades (¿para qué se enseña? y ¿por qué se enseña?), la organización de la enseñanza (¿qué se enseña? y ¿cuándo se enseña?) y las prácticas de enseñanza (¿cómo se enseña?).

Finalidades de la enseñanza de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil

Alsina (2017) señala que la presencia explícita de contenidos de estadística y probabilidad en las primeras edades trata de dar respuesta a una necesidad social, ya que la ciudadanía se ve enfrentada constantemente a una gran cantidad de datos recibidos a través de diversos medios. Desde esta perspectiva, la primera finalidad es iniciar el desarrollo de la alfabetización estadística y probabilística que se refieren, respectivamente, a la capacidad de las personas para interpretar datos, evaluarlos críticamente y, cuando sea pertinente, expresar sus opiniones respecto a la información estadística, los argumentos relacionados con los datos o fenómenos estocásticos (Gal, 2002); y a la capacidad de acceder, utilizar, interpretar y comunicar información e ideas relacionadas con la probabilidad, con el fin de participar y gestionar eficazmente las demandas de las funciones y tareas que implican incertidumbre y riesgo del mundo real (Gal, 2005).

Otra finalidad relevante es poner de manifiesto, desde los primeros niveles, que la estadística y la probabilidad mantienen estrechas conexiones en el marco de la estocástica (Alsina, 2021), que incluye lo que está sometido al azar y que es objeto de análisis estadístico. Así, cuando tenemos un experimento aleatorio con resultados equiprobables, podemos intentar predecir el resultado con cierto grado de certidumbre, por ejemplo, al lanzar un dado. Después de realizar el experimento, el resultado se habrá producido o no, pero una sola repetición no respalda ni refuta el grado de certidumbre. En consecuencia, sería necesario tener un gran número de repeticiones para poder revisar dicha probabilidad, y ahí es donde interviene la estadística descriptiva para recopilar, organizar y analizar los datos del resultado de ese experimento cuantas veces haya sido realizado. De este modo, en el ejemplo indicado, el hecho de sacar un cinco no implica que siempre se obtenga este mismo valor al lanzar un dado, por lo que se puede estudiar el comportamiento del azar mediante una investigación estadística (p. ej., al lanzar 30 veces un dado).

Organización de la enseñanza de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil

El NCTM (2003) tiene el mérito de haber explicitado los conocimientos en estadística y probabilidad que deberían aprender los niños a partir de los 3 años, como se ha indicado. Estos conocimientos se organizan alrededor de tres estándares de contenido: formular preguntas que puedan abordarse con datos y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas; seleccionar y utilizar métodos estadísticos apropiados para analizar datos; desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en datos; y comprender y aplicar conceptos básicos de probabilidad. Más en concreto, para las primeras edades recomiendan proponer preguntas y recoger datos relativos a ellos y su entorno; ordenar y clasificar datos de acuerdo con sus atributos y organizar datos relativos a aquellos; representar datos mediante objetos concretos, dibujos y gráficos; describir parte de los datos y el conjunto total de los mismos para determinar lo que muestran los datos; y, finalmente, discutir sucesos probables e improbables relacionados con las experiencias del alumnado.

A partir de estos estándares, principalmente, (Alsina, 2022) hace una propuesta de organización de los contenidos de estadística y probabilidad para el 2º ciclo de Educación Infantil (3-6 años), alrededor de dos tipos de actividades: identificación y comparación de datos y hechos. Siguiendo el ciclo de investigación estadística propuesto por Wild y Pfannkuch (1999), estas actividades se refieren a la recogida y la organización de datos (p. ej., a través de tablas de recuento y de frecuencias), junto con la representación a través de gráficos concretos (con materiales manipulativos) y su posterior interpretación. Se trata de datos cercanos a la propia experiencia, que pueden ser propuestos por el profesorado o bien por el alumnado.

Con relación a la probabilidad, diversos autores (e. g., Alsina, 2021, 2022; Batanero et al., 2021) proponen que las niñas y los niños menores de 6 años establezcan un primer contacto con el significado intuitivo de la probabilidad y empiecen a usar de forma comprensiva lenguaje probabilístico elemental en el marco de una escala cualitativa que vaya desde "imposible" hasta "seguro", en situaciones de incertidumbre que forman parte de su entorno y que permitan ir desarrollando progresivamente el razonamiento probabilístico.

Prácticas de enseñanza de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil

El NCTM (2003), por ejemplo, recomienda presentar un enfoque experimental que permita proporcionar una experiencia estocástica desde Infantil. También el Proyecto GAISE (Bargagliotti, 2020; GAISE College Report ASA Revision Committee, 2016; Franklin et al. 2005), aunque no se centra en Infantil, recomienda enseñar el pensamiento estadístico como un proceso investigativo de resolución de problemas y toma de decisiones, centrarse en la comprensión conceptual, integrar datos reales con un contexto y propósito, fomentar el aprendizaje activo o usar tecnología para explorar conceptos y analizar datos.

Batanero y Díaz (2011) ubican estos planteamientos en el enfoque del trabajo con proyectos, que pretende que el alumnado sea capaz de aplicar sus conocimientos a la resolución de problemas que sean significativos para ellos, para su entorno, siguiendo los pasos de un ciclo de investigación estadística (Wild y Pfannkuch, 1999). Estos proyectos otorgan protagonismo al alumnado, además de "favorecer el aprendizaje significativo, promueven el trabajo en grupo y desarrollan capacidades como la reflexión y la autonomía del alumno" (Anasagasti y Berciano, 2016, p. 33). De forma complementaria al trabajo con proyectos, Godino et al. (1987) promueven también el uso de materiales manipulativos y otros recursos para la enseñanza de la estadística y la probabilidad desde Educación Primaria.

Considerando estas distintas estrategias y recursos didácticos, las actividades que planteemos desde Educación Infantil en estadística y en probabilidad, atendiendo a los conocimientos que se pueden movilizar, deben estar encaminadas a la argumentación y a la toma de decisiones en ambientes de incertidumbre de contextos próximos a los niños y las niñas, que les permitan manejarse progresivamente con cierta soltura respecto a qué información se maneja en cada caso, antes o después de realizar un experimento aleatorio (Alsina et al., 2021).

Así, tomando como referencia el ejemplo anterior del dado, una práctica de aula con alumnado de 3, 4 o 5 años podría seguir la siguiente secuencia:

1) Contexto asociado a una rutina cercana al alumnado, por ejemplo, la cocina: “imaginad que colocamos un dado en una sartén, la movemos y tras un par de vueltas la cara superior del dado ha cambiado, esto es, la parte de arriba del dado… ¿qué cantidad de puntos aparece ahora? (Figura 12, izda.).
2) Todo el alumnado interactúa con los dados y la sartén y a partir de la observación de lo que ocurre en cada lanzamiento gracias a las preguntas de la maestra (¿qué veis?, ¿puntos?, ¿cantidad?), se observan varias caras del dado y se establece una relación entre los puntos de cada una y la cantidad que representan. A partir de la observación y comparación de elementos concretos, se trata de abstraer y representar la cantidad (Figura 12, centro).
3) Posteriormente, la maestra guía por medio de preguntas la secuencia asociada a la repetición de los lanzamientos (¿qué número te ha salido?, ¿cuál es mayor?, ¿cuál es menor?, ¿cuánto mayor es?, ¿cuánto menor?, etc.).
4) Finalmente, todo el alumnado registra y observa los resultados extraídos tras cada lanzamiento, recogiendo así la información en tablas de recuento (Hoong et al., 2015; Rodríguez-Muñiz et al., 2021); para, posteriormente, establecer una conversación con la maestra que invita a hablar de casos posibles, imposibles, qué es el azar, etc. (Figura 12, derecha).

Figura 12. Detección e identificación de las características de las caras del dado (izdo.). Correspondencia entre la cantidad y sus representaciones (centro). Recolección de datos en una tabla de recuento (dcha.)

Recursos y aspectos metodológicos. ¿Dónde, cuándo y cómo aprender matemáticas en Infantil?

Empezamos afirmando que en la Educación Infantil se puede aprender matemáticas *en y de* cualquier situación. Sólo es necesario que las maestras y maestros dominen los contenidos matemáticos, detecte la presencia de estos en cualquier situación, escoja posibles objetivos de aprendizaje para sus alumnos, y comparta preguntas, reflexiones, retos y actividades con su grupo para conocer mejor algún tema, resolver alguna pregunta u organizar algún evento, entre otros.

Actualmente, existe una gran diversidad de situaciones didácticas escolares para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en Educación Infantil, por ejemplo: proyectos, rincones, sesiones en gran grupo, talleres, ambientes, espacios, microespacios, provocaciones, rutinas, el día a día del aula, la gamificación, etc. Además, a menudo no se define cada una de estas dinámicas de la misma forma, por ejemplo, en un centro proponen una serie de actividades concretas en los 'rincones' y en otro centro planten las mimas propuestas en sus 'espacios'. Así que, vamos a intentar hacer un recorrido por distintas situaciones didácticas de Infantil, aunque no focalicemos en los nombres en concreto.

Los aspectos que nos ayudaran a presentar y discriminar estas situaciones didácticas son: las características de la propuesta y el tipo de participación de las personas implicadas, es decir, el rol del maestro y el tipo de participación del alumnado.

Rutinas

Las rutinas son actividades que se repiten de forma regular en el aula, independientemente del resto de situaciones didácticas que se hayan seleccionado (Edo y Revelles, 2004). Las rutinas cumplen funciones de organización del grupo con la intención de ayudar a conocer la secuencia de dinámicas en el aula, poder anticipar qué va a pasar y así aumentar la seguridad y la autonomía del alumnado. En Infantil, estas son actividades de aprendizaje y enseñanza y varias de ellas tienen gran relación con contenidos matemáticos curriculares. Ejemplos de estas actividades son: Pasar lista y recuento de los compañeros ausentes. Señalar el día en el calendario y escribir la fecha. Señalar días especiales en el calendario. Repartir, distribuir y reponer materiales. Organizar los alumnos en filas o grupos. Organizar y distribuir mesas y sillas en el aula o en los rincones. Registrar y comparar el tiempo meteorológico, etc. En estas actividades los maestros conducen las dinámicas y con el tiempo, van cediendo el control de las mismas a los alumnos (Coll et al., 1999) El uso regular del calendario puede ser una poderosa herramienta para aprender a leer y nombrar números, para situarse y estructurar conceptos temporales, para aplicar pequeños cálculos, resolver interrogantes, comparar cantidades, etc. (ejemplo en Edo, 2005).

Hechos puntuales en el día a día escolar

En este caso nos referimos a aprovechar alguna situación imprevista para compartirla, estudiarla o resolverla conjuntamente con el grupo. Por ejemplo, una niña ha encontrado un 'bicho palo' en el patio, animal que suscita interés y desean conocerlo más. Así que buscan información y descubren que es un insecto, que tienen 6 patas, 3 a cada lado, que es simétrico, que tiene 2 antenas, que suelen medir de 7 a 10 centímetros, que las hembras ponen 3 o 4 huevos cada día, etc. Otro ejemplo, hay un día que desean cambiar la disposición de las mesas en el aula, la maestra invita a los alumnos a estudiar posibles composiciones: ¿Cómo las colocaríais vosotros? A medida que los niños y niñas van representando y mostrando arreglos de mesas van apareciendo los 'condicionantes'. Si las colocamos así ¿todo el mundo podrá ver la pizarra? ¿Podremos pasar entre las mesas? Si tocan a la pared ¿podremos sentarnos todos?, etc. (Carbó y Gracia, 2009). En estas situaciones, es realmente importante que la decisión final sea por votación de todo el grupo y que esta se lleve a cabo. Implicar el alumnado en la toma de decisiones que les afectan es muy interesante y productivo pero los maestros deben estar dispuestos a ceder, al grupo, la última decisión y a aplicar lo que el grupo elija.

Sesiones en gran grupo

Hay centros que organizan el trabajo matemático (siguiendo alguna editorial, o no), realizando sesiones (una o más por semana) de forma regular. Estas sesiones en gran grupo focalizan principalmente en algún contenido matemático concreto. En este caso existe una programación *a priori* y ésta asegura que se presentan todos los contenidos curriculares a lo largo del curso. El rol del maestro es el de diseñar un conjunto de actividades, preparar los materiales y guiar el desarrollo de la sesión. El alumnado sigue las consignas del maestro. Esta dinámica puede ser constructiva si, durante el desarrollo de la sesión, se alternan actividades en las que el adulto expone, pregunta o guía un dialogo con otras en las que el alumnado debe enfrentarse, en pequeños grupos o individualmente, a retos o propuestas que deben llevar a cabo sin prácticamente ayuda del maestro. Una buena secuencia de actividades para estas sesiones sería: se inicia la sesión con un dialogo, sigue una actividad en pequeño grupo, a continuación, se realiza una actividad de representación individual y aparece un nuevo dialogo conjunto como conclusión final. Veamos un ejemplo de I4: La maestra desea que los alumnos practiquen pequeños cálculos (+1, +2, +0) y la composición de pequeños números (entre 0 y seis). Les presenta el juego 'cuadrado y ángulo' (Figura 13). Para ello se dibuja en el suelo un cuadrado de 1,5m. de lado y un cuadrado más pequeño (40cm.) concéntrico al primero. Se marca también una zona en cada uno de los 4 ángulos. Cada jugador, en su turno, se coloca en el cuadrado central y dispone de 3 piedras o chapas que lanzará haciendo puntería. Si la piedra va dentro de la zona del ángulo vale 2 puntos, dentro del cuadrado grande 1 punto y si va fuera 0 puntos. A continuación, los niños y niñas juegan, practican e intentan llevar los cálculos de su puntuación. En un momento determinado la maestra ofrece una hoja para que anoten sus puntuaciones de la última partida. Al volver a clase se pide a los alumnos que realicen una representación gráfica siguiendo las pautas de 'la página en blanco' (Edo, 2021).

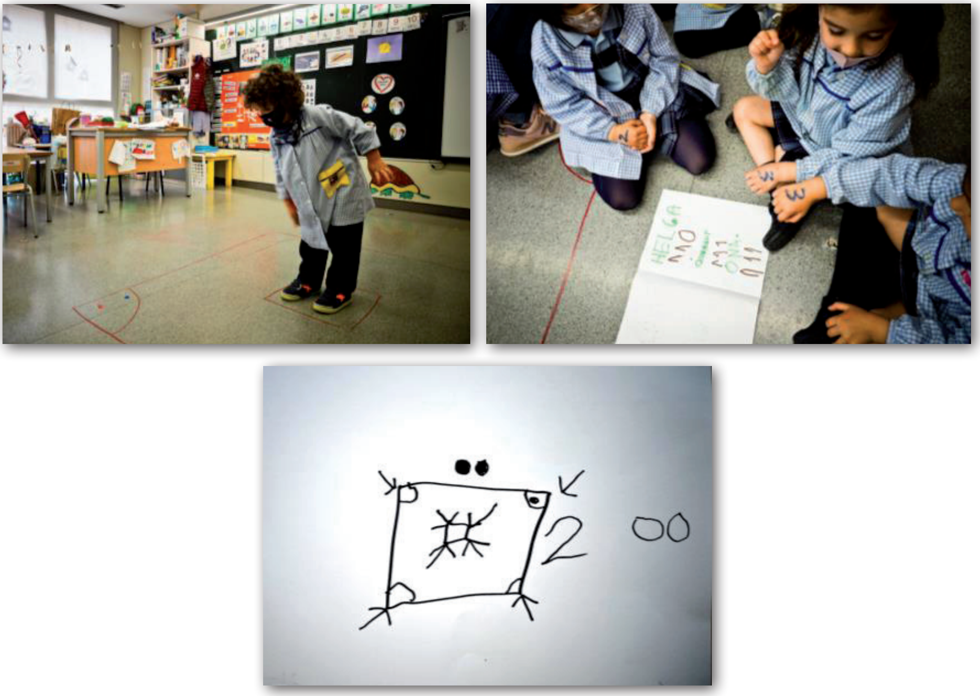


Figura 13. Vemos a un niño jugando a cuadrado y ángulo. Vemos la hoja donde han anotado las puntuaciones de cada tiro y el total escrito en el dorso de su mano. Vemos una hoja en blanco donde interpretamos que este jugador obtiene un total de dos puntos por haber colocado una piedra en la zona de un ángulo y dos ceros (escritos con el numeral) y representados con dos piedras fuera del cuadrado

El trabajo por proyectos

Los proyectos se crean para saber más sobre algún tema que ha elegido el grupo y son necesariamente interdisciplinares. Los alumnos deben escoger, pensar, investigar, proponer, discutir, argumentar, rectificar y consensuar… competencias que les ayudan a ser más autónomos y críticos. Suele hacerse un dialogo inicial sobre ¿Qué sabemos? del tema elegido y ¿qué queremos saber? A partir de aquí, se busca información que se va compartiendo con los demás compañeros para llegar a consensos. En esta dinámica los maestros: guían los alumnos en sus descubrimientos, proporcionan recursos para que sean los ellos los que construyan sus conocimientos. Los alumnos buscan y aportan datos y conocimientos que comparten, discuten con los demás. (Serrano, 2012). Muchos centros aprovechan la elección del nombre de la clase para realizar un proyecto de estas características, que a grandes rasgos contiene estas fases: elección del tema de estudio, ¿Qué sabemos y qué debemos saber? Comunicación y recogida de las ideas previas. Búsqueda de fuentes de información. Organización y puesta en marcha del trabajo. Desarrollo de propuestas. Dialogo de conclusión. En Educación Infantil suelen aparecer temas, como: las ballenas, los volcanes, las mariquitas, el bicho palo, los planetas y el universo, etc. En cualquiera de estos temas, y otros que podamos nombrar, siempre hay algún aspecto del tema que conecta con el contenido de número y cantidad (cuantas aletas, patas…); también aparecen aspectos de medida (cuánto pesa, mide de longitud, de altura....); también intervienen contenidos de relación y cambio como agrupar y clasificar por categorías universales (mamífero - no mamífero, insecto – no insecto, estrellas - planteas, etc.); en ocasiones contenidos geométricos de forma o de posición (el volcán tienen forma cónica; el bicho palo es simétrico; los planetas tienen forma de esfera). Así que, solo podemos invitar a los maestros a estar atentos, al realizar un proyecto, y evidenciar y compartir los contenidos matemáticos que nos ayudan a conocer mejor cualquier tema.

Rincones y talleres

El trabajo por rincones consiste en organizar el aula en varios espacios donde los alumnos, distribuidos en pequeños grupos, realizan actividades simultáneas de manera autónoma. Esta organización posibilita que cada pequeño grupo realice una tarea determinada y distinta a las demás. Según el tipo de actividad algunos rincones pueden requerir la presencia de la maestra; en otros los niños actúan con gran autonomía. Los rincones crean una dinámica que favorecen el aprendizaje de todos los niños ya que, se respeta el ritmo de cada uno, se basan en la exploración directa de materiales, potencian la autonomía y la seguridad en uno mismo, y los niños adquieren responsabilidades como, por ejemplo, el cuidado de los materiales. El maestro decide el número de rincones simultáneos, los contenidos y objetivos de aprendizaje de cada uno, prepara los espacios y los materiales, decide la forma que los alumnos escogerán los rincones y cuando y como se cambia de rincón. La rotación de cada alumno por los distintos rincones varía según el centro, desde la permanencia de cada alumno a un único rincón por sesión hasta los centros en los que la maestra marca los momentos de cambio de forma regular, cada 15 minutos. Para promover realmente la iniciativa y la autonomía sería recomendable que los niños y niñas pudieran escoger algo, el rincón al cual ir, la tarea que desean realizar o cuando quieren cambiar.

Figura 14. Una de las propuestas de un rincón. Hay varias plantillas y piezas de colores. Los niños pueden cubrir y reproducir un modelo, pueden cubrir y completar o construir la imagen en otra cuadricula de distinto tamaño (homotecia)

Ambientes, espacios, microespacios, provocaciones

Los ambientes son espacios de aprendizaje, de relación y de comunicación preparados por los adultos, con materiales bien seleccionados, bien dispuestos y pensados para satisfacer las necesidades evolutivas de los niños (Silvente, 2017). Cada ambiente cuenta con una serie de propuestas que ofrecen nuevos retos a los niños. La característica fundamental de los ambientes, espacios o provocaciones es que la actividad que realiza cada alumno es autónoma y se permite la libre circulación entre espacios o ambientes. Son actividades no directivas y que responden al interés genuino de cada alumno. En estos ambientes los alumnos realizan sus actividades a partir de su motivación intrínseca (sin necesidad de ningún incentivo externo ni esperar ninguna recompensa). Esta motivación, la que surge de su interés natural, es la que produce mayores aprendizajes al dar respuesta a las necesidades reales de cada individuo. La función de los maestros es preparar bien los materiales y los espacios y hacer de organizadoras, de mediadoras que faciliten el proceso de aprendizaje. Los niños disponen de un tiempo de experiencia activa, no directiva; preparada por el adulto, pero reconstruida por ellos mismos, donde se reúnen para explorar diversas posibilidades de juego y de los materiales.

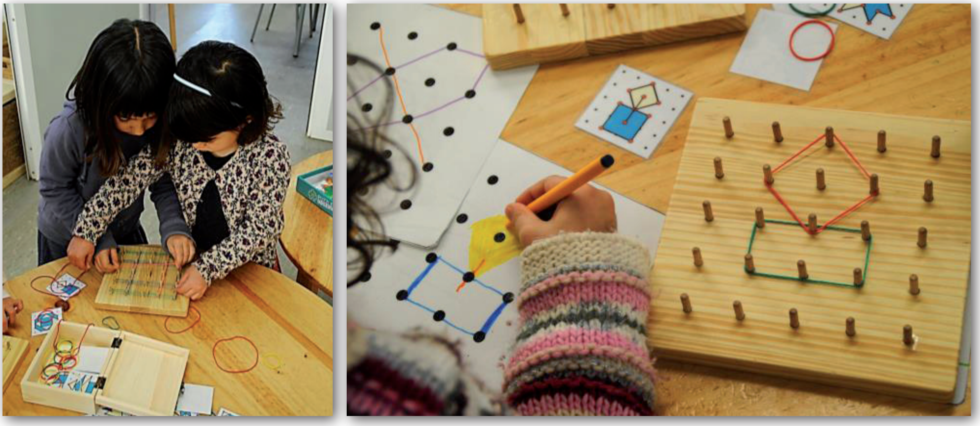


Figura 15. Ambiente con geoplanos, gomas, tarjetas y papel pautado. Acceso libre -si no supera el número máximo de participantes- y cada cual decide qué desea hacer

Gamificación, ludificación

La gamificación en el aprendizaje consiste en la incorporación de elementos y dinámicas propias de los juegos en entornos de aprendizaje, todo ello con el objetivo de potenciar la motivación, promover el esfuerzo e inspirar al alumnado a través del juego y del compromiso. Sin embargo, debemos vigilar porqué entre los elementos propios del juego a menudo se destacan la competitividad y los premios, aspectos que no serían muy adecuados en Infantil. Por otra parte, el 'juego' puede y debe estar presente en cualquiera de las otras dinámicas enunciadas hasta ahora, así que, no creemos necesario diseñar dinámicas de 'gamificación' extra. Por el contrario, recomendamos vivamente el uso de juegos en sesiones de gran grupo, en el trabajo por rincones, en los ambientes, e incluso en las rutinas.

Hasta aquí un breve repaso a las dinámicas más frecuentes. A estas deberíamos añadir los espacios de juego simbólico, los espacios de construcción, las propuestas relacionadas con arte, cuentos, danzas, canciones, psicomotricidad, etc. Al ser imposible ser exhaustivo pasamos a las recomendaciones finales.

Reflexiones y recomendaciones sobre la pregunta inicial

Luego … ¿Dónde, cuándo y cómo aprender matemáticas escolares? Una vez revisadas las dinámicas más frecuentes, recomendaríamos:

- No centrarnos en una sola dinámica. Diversificar las situaciones didácticas con contenidos matemáticos. Procurar alternar propuestas más guiadas con otras con alto grado de autonomía infantil.
- Cuanto más pequeños son los alumnos más presencia de tareas abiertas, exploratorias y no directivas. Las sesiones en gran grupo funcionan mejor con los alumnos mayores (I4 y I5).
- No preocuparse mucho del 'nombre' de la dinámica escogida y reflexionar sobre aspectos metodológicos como:
  - Diversificar las agrupaciones de los alumnos (individual, parejas, pequeño grupo, media clase, gran grupo).
  - Ofrecer retos y resolución de problemas en cualquiera de las dinámicas.
  - Crear espacios y propuestas autónomas y no directivas donde pueda aflorar la motivación intrínseca.
  - Aprovechar las rutinas, los imprevistos, los proyectos para evidenciar las matemáticas y compartirlas con los pequeños.
- Usar 'el juego' como recurso inestimable, en cualquiera de sus variaciones: exploratorio, reglado de motricidad gruesa, juegos de mesa, juegos verbales, etc.

Referencias

Alsina, Á. (2006). *Como desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años.* Editorial Octaedro-Eumo.

Alsina, A. (2011). Consideraciones didácticas para la enseñanza de los números escritos en las primeras edades. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 67*, 21-26.

Alsina, Á. (2013). Early Childhood Mathematics Education: Research, Curriculum, and Educational Practice. *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(1), 100-153.

Alsina, Á. (2015). *Matemáticas intuitivas e informales de 0 a 3 años. Elementos para empezar bien.* Narcea, S.A. de Ediciones.

Alsina, Á. (2017). Contextos y propuestas para la enseñanza de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil: un itinerario didáctico. *Épsilon, 95*, 25-48.

Alsina, Á. (2019a). Del razonamiento lógico-matemático al álgebra temprana en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 8*(1), 1-19. https://doi.org/10.24197/edmain.1.2019.1-19

Alsina, Á. (2019b). La educación matemática infantil en España: ¿qué falta por hacer? *Números, 100,* 85-108.

Alsina, Á. (2020). Revisando la educación matemática infantil: una contribución al Libro Blanco de las Matemáticas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 9*(2), 1-20. https://doi.org/10.24197/edmain.2.2020.1-20

Alsina, Á. (2020). Itinerario de enseñanza para el álgebra temprana. *Revista Chilena de Educación Matemática, 12*(1), 5-20. https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i1.16

Alsina, Á. (2021). "Ça commence aujourd'hui": alfabetización estadística y probabilística en la educación matemática infantil. *PNA, 15*(4), 243-266. https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.21357

Alsina, Á. (2022). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (3-6 años)*. Graó.

Alsina, Á. y Berciano, A. (2020). Developing informal mathematics in Early Childhood Education. *Early Child Development and Care, 190*(13), 2013-2031. https://doi.org/10.1080/03004430.2018.1555823

Alsina, Á. y Delgado, R. (en prensa). ¿Qué conocimientos necesita el profesorado de Educación Infantil para enseñar matemáticas? *Matemáticas, Educación y Sociedad*.

Alsina, Á. y León, N. (2016). Acciones matemáticas de 0 a 3 años a partir de instalaciones artísticas. *Educatio Siglo XXI, 34*(2), 33-62. https://doi.org/10.6018/j/263801

Alsina, Á., Salgado M., Toalongo-Guamba, X. y Trelles-Zambrano, C. (2021). Estadística en Educación Infantil: recomendaciones previas a la representación de datos. *RIDEMA, Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática, 5*(1), 1-21. https://doi.org/10.34019/2594-4673

Anasagasti, J. y Berciano, A. (2016). El aprendizaje de la estadística a través de PBL con futuros profesores de primaria. *Contextos Educativos, 1* (extraordinario), 31-43. https://doi.org/10.18172/con.2699

Asociación Australiana de Profesores de Matemáticas e Infancia en Australia (2012). Declaración de posición sobre las matemáticas en la primera infancia. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 1*(2), 1-4. https://doi.org/10.24197/edmain.2.2012.1-4

Bargagliotti, B. (Ed.) (2020). *Pre-K–12 guidelines for assessment and instruction in statistics education II (GAISE II)*. American Statistical Association. Recuperado de: https://www.amstat.org/asa/files/pdfs/GAISE/GAISEIIPreK-12_Full.pdf

Baroody, A.J. (2005). *El pensamiento matemático de los niños: Un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial (6ª ed.)*. Madrid: A. Machado Libros S.A.

Batanero, C. y Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.

Canals, M. (1997). Geometría en las primeras edades escolares. *Suma: Revista para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, *25*, 31-44.

Canals, M.A. (1989). *Per una didàctica de la matemàtica a l'escola. I. Parvulari*. Eumo.

Castro, E. y Castro, E. (Eds.) (2016). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil*. Pirámide.

Carlsen, M., Erfjord, I. y Sigurd, P. (2020). *Mathematics Education in the Early Years*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-34776-5

CeMat (2021). *Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria*. Comité Español de Matemáticas.

Chamorro, M. (2005). *Didáctica de las Matemáticas para Educación Infantil*. Pearson- Prentice Hall.

Clements, D. (2004). Geometric and spatial thinking in early childhood education. In D. Clements, J. Sarama y A.M. DiBaise (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. (pp. 267-297). Lawrence Erlbaum Associates.

Clements, H.D. y Sarama J. (2015). *El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. El enfoque de las Trayectorias de Aprendizaje*. Learning Tools LLC.

Clements, D., Sarama, J., Swaminathan, S., Weber, D. y Trawick-Smith, J. (2018). Teaching and learning Geometry: early foundations. *Quadrante*, *25*(2), 7-31.

Coll, C., Martín, H., Mauri, T., Miras, M., Onrubia, J., Solé, I. y Zabala A. (1999). *El Constructivismo en el aula*. Novena edición. Barcelona: Graó.

Carbó, L. y Gracia, V. (2009). *El mundo a través de los números*. Lleida: Milenio.

Dacey, L., Schulman, L. y Eston, R. (1999). *Growing mathematical ideas in kindergarten*. Sausalito, CA: Math Solutions Publications.

De Castro, C. (2011). Buscando el origen de la actividad matemática: Estudio exploratorio sobre el juego de construcción Infantil. *EA, Escuela Abierta, 14*, 47-65.

De Castro, C. y Bosch, A. (2016). Representaciones gráficas de cantidades discretas en contextos de comunicación y resolución de problemas en educación infantil. En E. Castro, E. Castro, J.L. Lupiáñez, J.F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 227-236). Granada: Comares.

De Castro, C. y Flecha, G. (2018). Provocación de intuiciones matemáticas a través del juego infantil de cero a tres años. *Educación y Futuro: Revista de investigación aplicada y experiencias educativas, 39*, 117-146.

De Castro, C., Flecha, G. y Ramírez, M. (2015). Matemáticas con dos años: Buscando teorías para interpretar la actividad infantil y las prácticas docentes. *Tendencias Pedagógicas, 26*, 89-108.

De Castro, C. y Hernández, E. (2014). Problemas verbales de descomposición multiplicativa de cantidades en educación infantil. *PNA, 8*(3), 99-114. https://doi.org/10.30827/pna.v8i3.6114

De Castro, C. y Quiles, O. (2014). Construcciones simétricas con 2 y 3 años: La actividad matemática emergente del juego infantil. *Aula de Infantil, 77*, 32-36.

Edo, M. (2005). Educación matemática versus Instrucción matemática en Infantil. En A P. Pequito.; A. Pinheiro (eds.), *Proceeding of the First International Congress on Learning in Childhood Education* (pp. 125-137). Porto, Portugal: Gailivro.

Edo, M. (2012). Ahí empieza todo. Las matemáticas de cero a tres años. *Números, 80,* 71-84.

Edo, M. (2016). Emergencia de la Investigación en Educación Matemática Infantil. Juego y Matemáticas. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 53-66). Málaga: SEIEM.

Edo, M. (2021). *Educación Infantil. La página en blanco*. fórMATe. Innovamat. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=jURZjUpYAcY

Edo, M. y Revelles, S. (2004). Situaciones matemáticas potencialmente significativas. En M. Anton, B. Moll (eds.) *Educación Infantil. Orientaciones y Recursos (0-6 años)* (pp.103-179). Barcelona: Praxis.

Elia, I., Baccaglini-Frank, A. Levenson, E., Matsuo, N. y Feza, N. (2021). Survey on Early Childhood Mathematics Education at ICME-14. *European Mathematical Society Magazine, 120,* 59-61. https://doi.org/10.4171/MAG-32

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics. An educational approach.* Holland Reidel Pub.

Franklin, C.A. y Garfield, J. (2006). The GAISE project: Developing statistics education guidelines for grades pre-K-12 and college courses. En G. Burrill, y P. Elliott (eds.), *Thinking and reasoning with data and chance (68th Yearbook)* (pp. 345–376). NCTM.

Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En D. C. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 243-275). Nueva York, NY: Macmillan.

GAISE College Report ASA Revision Committee (2016). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education College Report 2016*. Recuperado de: https://www.amstat.org/education/guidelines-for-assessment-and-instruction-in-statistics-education-(gaise)-reports

Gal, I. (2002). Adults' Statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review, 70*(1), 1-25. https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2002.tb00336.x

Gal, I. (2005). Towards 'probability literacy' for all citizens. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 43-71). Springer.

Geist, E. (2014). *Children are born mathematicians: supporting mathematical development, birth to age 8*. Pearson.

Giménez, J. y Vanegas, Y. (2007). Vivir el espacio fomentando competencias geométricas, *Novedades Educativas*, *195*, 80-87.

Ginsburg, H. P., Klein, A. y Starkey, P. (1998). The development of children's mathematical thinking: Connecting research with practice. En I.E. Siegel y K.A. Renninger (Eds.), *Handbook of child psychology: Vol. 4. Children Psychology in practice (5th ed.)*(pp. 401-476). Wiley.

Ginsburg, H.P. y Baroody, A.J. (2007). *Tema-3: Test de Competencia Matemática Básica*. TEA Ediciones.

Godino, J.D., Batanero, C. y Cañizares, M.J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares.* Síntesis.

Goldschmied, E. (2000). *La educación infantil de 0 a 3 años.* Morata.

Gura, P. (Ed.) (1992). *Exploring learning: Young children and blockplay*. London, Paul Chapman Publishing.

Hoong, L.Y., Kin, H.W. y Pien, C.L. (2015). Concrete-Pictorial-Abstract: Surveying its Origins and Charting its Future. *The Mathematics Educator, 16*(1), 1-18.

Lee, S. (2012). La historia de Emma: Estudio de caso sobre el desarrollo de la resolución de problemas desde los 8 meses a los 2 años. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 1*(2), 64-71. https://doi.org/10.24197/edmain.2.2012.64-71

Lüken M.M. (2020). Patterning as a mathematical activity: An analysis of young children's strategies when working with repeating patterns. En M. Carlsen, I. Erfjord, y P. Hundeland (Eds.) *Mathematics Education in the Early Years* (pp. 79-92). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-34776-5_5

Moss, J., Burce, C., Caswell, B., Flynn, T. y Hawes, Z. (2016). *Taking Shape*. Pearson.

Muñoz-Catalán, C. y Carrillo, J. (Eds.) (2018). *Didáctica de las matemáticas: para maestros de Educación Infantil*. Madrid: Paraninfo.

NAEYC y NCTM (2013). Matemáticas en la Educación Infantil: Facilitando un buen inicio. Declaración conjunta de posición. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 1-23. https://doi.org/10.24197/edmain.1.2013.1-23

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* National Council of Teachers of Mathematics (traducción de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES).

Newcombe, N. y Frick, A. (2010). Early education for spatial intelligence: Why, what, and how. *Mind, Brain, and Education*, *4*(3), 102-111. https://doi.org/10.1111/j.1751-228X.2010.01089.x

Pincheira, N. y Alsina, Á. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Educación Matemática, 33*(1), 153-180. https://doi.org/10.24844/EM3301.06

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E.R., Loehr, A. M. y Miller, M.R. (2015). Beyond numeracy in preschool: Adding patterns to the equation. *Early Childhood Research Quarterly, 31,* 101-112. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2015.01.005

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E.R., McLean, L.E. y McEldoon, K. L. (2013). Emerging understanding of patterning in 4-year-olds. *Journal of Cognition and Development, 14*(3), 376–396. https://doi.org/10.1080/15248372.2012.689897

Rodríguez-Muñiz, L.J., Muñiz-Rodríguez, L. y Aguilar, Á. (2021). El recuento y las representaciones manipulativas: los primeros pasos de la alfabetización estadística. *PNA, 15*(4)*, 311-338*. https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.22511

Salinas, M.J. (2016). Investigación en Educación Matemática Infantil. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M.T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 17-18). Málaga: SEIEM.

Sarama, J. y Clements, D.H. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research. Learning Trajectories for Young Children*. Nueva York: Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203883785

Serrano, A.I. (2012). Trabajar por proyectos en infantil. *Temas para la educación. Revista digital para profesionales de la enseñanza*, 21, 1-8.

Silvente, J. (2017). *Diseñar espacios educativos "calidad, estética y amabilidad en el diseño"*. Madrid: Proyectos Editoriales de Arquitectur.

Stocco, K., Ignez, M. y Cándido, P. (2003). *Figuras e formas. Matemática de 0 a 6*. Artmed Editora.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. y Buys, K. (2008). *Young children learn measurement and geometry: A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for the lower grades in primary school.* Brill Sense. https://doi.org/10.1163/9789087903985

Vanegas, Y. (2018). Percepción, interpretación y representación del espacio. En M.C. Muñoz-Catalán y J. Carrillo (Coords.), *Didáctica de las matemáticas: para maestros de Educación Infantil* (pp. 213-242). Paraninfo.

Vanegas, Y., Giménez, J, Prat, M. y Edo, M. (2021). Professional tasks in early childhood education teacher education: promoting reasoning at 0-3. *Acta Scientiae 23*(7), 60-90. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6307

Wijns, N., Torbeyns, J., Bakker, M., De Smedt B. y Verschaffel, L. (2019). Four-year olds' understanding of repeating and growing patterns and its association with early numerical ability. *Early Childhood Research Quarterly, 49*, 152-163. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2019.06.004

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (with discussion). International Statistical Review, 67(3), 223–265. https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.1999.tb00442.x

Matemáticas en la Educación Primaria

Mathematics in Primary Education

Molina, M.[a], Adamuz-Povedano, N.[b]; Cañadas, M.C.[c]; Fernández-Ahumada, E.[b];
García Pérez, M.T.[b]; Moreno, A., Sánchez-Matamoros García, G.[d]; Ramírez-Uclés, R.[c]; y Serradó, A.[e]
[a] *Universidad de Salamanca,*
[b] *CEIP Al-Ándalus,*
[c] *Universidad de Granada,*
[d] *Universidad de Sevilla,*
[e] *Colegio La Salle-Buen Consejo.*

Resumen

En este capítulo se concretan las definiciones de los diferentes sentidos, algebraico, espacial, estocástico, de medida y numérico, expuestas en capítulos previos, a la etapa de educación primaria. Se identifican y describen las principales componentes de estos sentidos cuyo desarrollo puede abordarse en esta etapa, dándose ejemplos de tipos de tareas y de recursos que pueden ser útiles. En algunos casos nos apoyamos en investigaciones previas para dar ejemplos de posibles dificultades que puede manifestar el alumnado.

Palabras clave: Sentido matemático, Primaria, Tareas matemáticas, Currículo.

Abstract

In this chapter we specify the definitions of the different senses, algebraic, spacial, estocastic, measurement and numeric, in the case of primary education. We identify and describe the main component of these senses whose development can be addressed at this stage and provide examples of type of tasks and resources that can be of use. In some cases we use previous studies to give examples of posible difficulties that students can encounter.

Keywords: Mathematical sense, Primary, Mathematical tasks, Curriculum.

Introducción

En este capítulo retomamos la idea de sentido matemático desarrollada en capítulos previos, considerando cada uno de los diferentes sentidos previamente definidos: algebraico, espacial, estocástico de medida y numérico. El objetivo es ejemplificar el trabajo de cada uno de estos sentidos en el aula de primaria explicitando sus principales componentes y dando sugerencias de tareas a considerar. En todos los casos la propuesta es trabajar de forma contextualizada, favoreciendo la experimentación, apoyándose en recursos concretos y representaciones pictóricas, y explicitando la funcionalidad que ha de caracterizar los aprendizajes matemáticos de esta etapa.

Sentido algebraico

En línea con la definición de sentido algebraico propuesta en este libro, el desarrollo de pensamiento algebraico requiere (Kaput, 2008):

- Pensar y operar en términos de cantidades desconocidas (como si fueran conocidas) y sus relaciones. En este contexto las cantidades indeterminadas pueden tener el significado de incógnitas, variables, parámetros, constantes o números generalizados, y pueden ser representadas de muy diversas formas (ej., un material físico como una caja, lenguaje verbal, letras, representaciones pictóricas como una mancha o una nube).
- Generalizar (reconocer estructura) y expresarlo a través de representaciones que van ganando en formalismo. Esta dimensión del trabajo algebraico es la más relevante para abordar el desarrollo del sentido algebraico en educación primaria. Tareas de tipo numérico, geométrico o de medida pueden enriquecerse al preguntar por otros casos similares y buscar la generalidad.
- Razonar y manipular expresiones simbólicas de forma sintácticamente guiada. No solo se considera la notación algebraica, también otros sistemas de símbolos como gráficos, rectas numéricas, tablas y lenguaje natural. La tecnología ha logrado un desarrollo del lenguaje simbólico accesible y eficiente. Las hojas de cálculo, las calculadoras gráficas o las aplicaciones de geometría dinámica proporcionan métodos más accesibles para la manipulación simbólica.

Para hacer recomendaciones para su trabajo en el aula de primaria, retomamos aquí las cuatro componentes identificadas en el capítulo del Sentido Matemático Escolar que nos permiten diferenciar enfoques para abordar el desarrollo del sentido algebraico en el aula: Generalización de patrones numéricos, geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas; Resolución de problemas; Situaciones funcionales; Modelización de fenómenos físicos y matemáticos.

Generalización de patrones numéricos, geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas

Este componente se refiere a tareas dónde hay una estructura desconocida que el alumnado debe identificar y representar. Las siguientes recomendaciones de la CEMAT (2021) para el desarrollo de sentido algebraico conectan con este enfoque:

– Identificar las características variantes e invariantes en una colección de objetos.
– Describir regularidades (entre ellas, las propiedades de las operaciones aritméticas) de manera generalizada con palabras, gráficos o tablas.
– Crear patrones.
– Extender regularidades determinando un elemento concreto de una sucesión (patrones de repetición, de crecimiento ...): el elemento siguiente, uno lejano, uno genérico ...

En Primaria, el alumnado debería investigar patrones numéricos y geométricos y expresarlos matemáticamente con palabras o símbolos. Los aspectos de la simbología algebraica tradicional no deberían ser una limitación en esta etapa para el trabajo del desarrollo del pensamiento algebraico.

Se pueden realizar trabajos con patrones geométricos donde tengan que analizar su estructura y el modo en que cambia. Pidiéndoles posteriormente que describan los patrones que observan. Por ejemplo, el alumnado podría identificar el patrón subyacente al ejemplo de la figura 1.

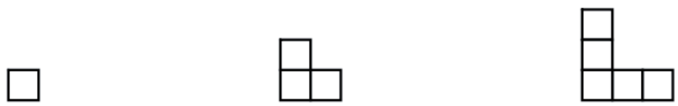


Figura 1. Patrón geométrico

Para encontrar la estructura de los patrones geométricos, es interesante copiar el siguiente elemento a uno dado y observar físicamente lo que se hace con el cuerpo. Es decir, expresar qué hacía tu cuerpo para establecer la regla de cómo crecen los cuadrados de la figura en filas y columnas (Mason, 2017).

En el trabajo con patrones ofrecer siempre los primeros términos impide el desarrollo de todas las capacidades de los estudiantes (Mason, 2017). Es conveniente considerar también términos intermedios o términos no secuenciales.

En el contexto de la aritmética, el propio cálculo es un contexto muy rico para trabajar la percepción de una estructura al dirigir la atención hacia propiedades aritméticas (ej., compensación, asociativa, elemento opuesto) cuyo uso es habitual en estrategias de cálculo pensando (ej., 28+ 46 = 30 + 44 = 30 + 40 + 4 = 70 + 4 = 74). Compartir estrategias diferentes y pedir su justificación permite hacer explícitas las propiedades aritméticas que dan estructura a la aritmética y al álgebra y alejarse del foco del cálculo aritmético.

Resolución de problemas

La naturaleza aritmética o algebraica de un problema depende de cómo este se resuelva. En la etapa de primaria podemos considerar diversos tipos de problemas verbales relativos a relaciones cuantitativas. La propuesta desde este enfoque del álgebra es centrar la atención en representar las relaciones descritas en el problema, provocando así pensar y representar cantidades desconocidas, y también traducir entre representaciones de relaciones cuantitativas. Ante problemas como "He comprado una caja de lápices de colores. En casa tenía 15 lápices. Ahora tengo 20 en total. ¿Cuántos lápices hay en la caja?" y "Tengo una cesta con manzanas. Dentro de la cesta hay 20 manzanas verdes y otras rojas, ¿Cuántas manzanas hay en la cesta?", el alumnado puede representar el enunciado mediante representaciones pictóricas o mediante ecuaciones sencillas (haciendo uso de una letra o algún otro símbolo para representar la cantidad desconocida). La comparación de expresiones diferentes propuestas por el alumnado permitirá abordar la noción de equivalencia y centrar la atención en las relaciones cuantitativas que describe el problema en vez de en los cálculos necesarios para su resolución. Si bien no es un objetivo de esta etapa, la propuesta de uso de letras para representar cantidades desconocidas es accesible al alumnado en este contexto. En su caso pueden escribir ecuaciones sencillas (ej., $y+15=20$ y $15+x=20$; $20 + a = ?$ y $20 + y = b$) y mediante su comparación iniciarse en las normas sintácticas que regulan el simbolismo algebraico (ej., cantidades diferentes han de estar representadas mediante diferentes letras). La resolución de los problemas en esta etapa no ha de requerir operar con representaciones simbólicas, siendo más adecuado utilizar recursos como el modelo de barras, estrategias de conteo o métodos de cálculo.

Situaciones funcionales

Esta perspectiva del álgebra supone reconocer y describir una relación funcional. En esta etapa, el trabajo con funciones depende (de) y promueve la comprensión de variables, el establecimiento de relaciones y el uso de diversas representaciones para expresar esas relaciones.

En el aula de primaria podrían plantearse situaciones como la siguiente. Dibujamos un punto en el centro de una hoja de papel o en papel cuadriculado. Luego, y cada minuto, dibujamos 4 puntos más alrededor del primer punto. Esta imagen crece cada minuto. ¿Cuántos puntos crece la figura cada minuto? Si continuamos dibujando puntos correspondientes a los minutos 2 y 3: ¿Cómo es esta imagen?

¿Qué está pasando en esta imagen? ¿Cómo está pasando? ¿Cómo lo sabes? ¿Ves un patrón? ¿Cuántos puntos crece cada vez? ¿Cómo se relacionan estos puntos entre sí?

El alumnado propondrá diferentes interpretaciones. Cuando sea apropiado, se puede dibujar un cuadro que conecte los cuatro puntos para cada minuto. Después de un minuto, la imagen crece hasta tener 5 puntos. Después de dos minutos, tiene 9 puntos, etc. Es el momento de proponer al alumnado la construcción de una tabla con dos columnas, una para los minutos y otra para el número total de puntos. Esta es una herramienta útil para que establezcan posteriormente una relación funcional.

El trabajo finaliza cuando después de discutir las respuestas que proporciona la clase para explicar cómo ellos obtienen la relación entre las dos variables, responden a la siguiente cuestión: ¿Cómo podríamos averiguar la cantidad de puntos que habría para cualquier cantidad de minutos? Es el momento de guiar al alumnado para que expresen la relación entre los minutos y los puntos.

Una función puede ser representada de múltiples formas. El lenguaje verbal es el punto de partida para la comprensión de las funciones y permite hacer una descripción generalmente cualitativa. Una representación tabular permite organizar los pares de elementos que relaciona la función y ayuda a identificar y describir los cambios entre las variables (Blanton, 2008). Las representaciones simbólicas brindan una visión cualitativa y cuantitativa general de la función, permitiendo hacer un análisis del comportamiento de la función de manera abstracta.

Para representar la indeterminación y las relaciones identificadas entre las variables, el alumnado puede recurrir a diversos tipos de representaciones tales como lenguaje natural, representaciones visuales (e.g. dibujos y material manipulativo), símbolos matemáticos e incluso gestos. La profundidad de la comprensión de las funciones dependerá de cómo ellos desarrollen la habilidad de usar variedad de representaciones y sean capaces de relacionarlas.

Modelización de fenómenos físicos y matemáticos

En esta etapa educativa se pretende modelar situaciones cotidianas o representables con objetos y usar representaciones como gráficas, tablas, expresiones numéricas e incluso ecuaciones sencillas, para extraer conclusiones. El alumnado de primaria puede formular enunciados generales sobre cómo se relacionan una variable con otra. Por ejemplo, puede estudiarse el dinero gastado en un parque de atracciones y el número de viajes disfrutados (asumiendo que todas las atracciones tienen el mismo coste y pudiéndose añadir un coste fijo de entrada) o entre el número de paradas de un tren y el número de personas a bordo suponiendo que en cada parada suben dos pasajeros (puede añadirse personal fijo en el tren como el conductor y algún revisor).

Para ayudar al alumnado a modelizar la situación se puede iniciar preguntando por casos particulares (¿Cuánto dinero necesito para 3 viajes en las atracciones? ¿Y para 5 viajes?) sugiriéndoles organizar los datos en una tabla. Posteriormente se puede dar mayor generalidad a las cuestiones preguntando por el caso de muchas personas: ¿Cómo puedes saber cuánto dinero necesitas para muchos viajes en las atracciones? ¿Cómo le explicarías a un amigo cuánto dinero se necesita para muchos viajes? El trabajo puede ampliarse considerando la relación inversa: si me he gastado una determinada cantidad de dinero ¿cuántos viajes he realizado?

Sentido espacial

Las ideas que se presentan para desarrollar en los escolares el sentido espacial a lo largo de los diferentes niveles se basan en dos ideas principales. Por un lado, el diseño de tareas que favorezcan la conexión entre las componentes, trabajando todas ellas desde una visión global. Por otro lado, el enfoque funcional que resalte la resolución de problemas en contextos de utilidad en el mundo real. Se presentan distintas tareas relativas al concepto de cuadrado y cómo se va enriqueciendo a lo largo de las etapas. Se plantean como reflexión al lector para analizar las componentes, su conexión y aplicabilidad a la resolución de problemas. Ejemplificaremos también como la visualización conecta distintas componentes.

Conectando los conceptos geométricos (propiedades y relaciones)

Imagina que estás jugando al tabú. El juego consiste en describir a tus compañeros de equipo unas tarjetas en la que aparece la palabra a definir y unas cuantas palabras prohibidas que no puedes utilizar. Además no puedes dibujar nada ni hacer gestos. ¿Cómo podrías describir "cuadrado" sin utilizar las palabras cuatro, lados, iguales o ángulos?

En este juego no podríamos describir el cuadrado a partir de la definición (polígono regular de cuatro lados y cuatro ángulos iguales) puesto que utilizaríamos palabras prohibidas. Las distintas posibles respuestas ponen de manifiesto distintas componentes del sentido espacial.

Es interesante reflexionar con el alumnado sobre la diferencia entre la definición de un objeto geométrico y la descripción a través de propiedades que se observan y pueden caracterizar a un cuadrado. Por ejemplo, ¿se podría utilizar la definición "cuadrilátero con las dos diagonales iguales y perpendiculares"? o ¿El único rectángulo que es a su vez un rombo? Este tipo de tareas conecta las componentes relativas al conocimiento de las propiedades y el reconocimiento de relaciones geométricas, principalmente a través de la habilidad de percepción de relaciones espaciales (viendo dos o más objetos relacionados con otro o entre sí).

Las definiciones de cuadrado que conoce el alumnado han podido variar desde las distintas etapas, pero el reconocimiento de propiedades se ha ido enriqueciendo al incrementarse su manejo de conceptos geométricos. En Educación Infantil se suelen presentar ejemplos de cuadrados con representaciones manipulables y a partir de ellas se describen las propiedades: la cantidad de lados, que sean iguales y que los ángulos sean rectos. En Educación Primaria, al conocer otros tipos de cuadriláteros, se pueden matizar las diferencias del cuadrado con el rectángulo (no todos los lados son iguales) o con el rombo (no todos los ángulos son iguales), así como analizar caracterizaciones de los cuadriláteros atendiendo a sus diagonales.

Para conectar las distintas componentes relativas a conceptos geométricos, juega un papel relevante la visualización, tanto por la riqueza de representaciones con las que el estudiante pueda explorar las propiedades, como por la variedad de habilidades de visualización que son necesarias. Por ejemplo, el estudiante debe percibir las relaciones espaciales en un cuadrado (igualdad de longitudes, paralelismo, perpendicularidad…) y discriminar visualmente las características que lo diferencian de otras figuras geométricas. En las distintas representaciones, especialmente en los cursos inferiores, conviene desarrollar la habilidad de coordinación ojo motor (coordinar la visión con el movimiento del cuerpo), presentando y construyendo diferentes representaciones como pueden ser distintas perspectivas o desarrollos planos.

Es importante resaltar que la caracterización de cuadrado ha de ir más allá de una imagen estereotipada. Por ejemplo, en una investigación con estudiantes de 6º de Primaria y Primer ciclo de ESO (Ureña et al., 2022), se detectó que eran minoritarios los estudiantes que reconocían los cuadrados cuando no estaban apoyados sobre la base. En un contexto de siembra de semillas, al pedirles que identificaran cuadrados en los 15 puntos marcados en la Figura 2, mostraban la habilidad de percepción de la figura-contexto para reconocer los 8 cuadrados pequeños de área 1 y los 3 grandes de área 4. Sin embargo, muy pocos estudiantes contabilizaron los otros tres que no se apoyaban en la base y cuya área es 2. Incluso al percibirlos, hubo estudiantes que no los contabilizaron justificando que eran rombos y no cuadrados.

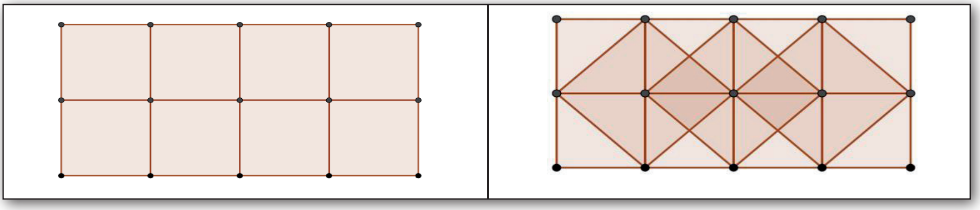


Figura 2. Determinar cuadrados en el problema de las semillas (Ureña et al., 2022)

Si además se pretende que el manejo de conceptos geométricos sea funcional para la resolución de problemas, conviene que se favorezcan los aspectos fenomenológicos, identificando situaciones en las que se utilizan cuadrados. Cuando se utiliza un cuadrado en el mundo real, ¿qué propiedad se está utilizando? Y del mismo modo, en otras situaciones en las que no se utilicen cuadrados, pero sí otros tipos de cuadriláteros: ¿Por qué las baldosas son cuadradas? ¿Y las caras de un dado? ¿Por qué las televisiones y los móviles son rectangulares y no cuadrados? ¿Y los folios?

Para la identificación de cuadrados en el entorno se ponen en juego habilidades como la percepción de la figura-contexto (reconociéndolos en un fondo complejo) y la discriminación visual de los elementos que lo caracterizan (identificando diferencias y similitudes). Se puede analizar la funcionalidad de tener ángulos rectos, que implica la propiedad de teselación del plano. Esta propiedad la cumplen tanto los rectángulos como los cuadrados, para diferenciarlos es necesario añadir las propiedades relativas a la igualdad de lados, que pueden aportar funcionalidades relativas al mayor número de simetrías del cuadrado o las invarianzas por giros. Interviene así la componente relativa a movimientos, por ejemplo, al identificar los giros, simetrías o traslaciones en un suelo enlosado con cuadrados.

Retomando el juego de las palabras prohibidas, podríamos proponer a los estudiantes que verifiquen las siguientes descripciones del cuadrado: "la forma geométrica de las caras de un cubo", "cuadrilátero con cuatro ejes de simetría", "es un cuadrilátero que al unir los puntos medios de sus lados, se vuelve a obtener la misma figura".

Conectando los conceptos geométricos: movimientos y orientación

En la trama cuadrada de un geoplano se plantean las siguientes cuestiones: ¿Se pueden construir dos rectángulos diferentes con perímetro 16 unidades de medida? En caso afirmativo, ¿tienen la misma área? ¿Cuál de ellos tiene mayor área? ¿De todos los rectángulos de igual perímetro es el cuadrado el de mayor área?

En esta tarea es interesante profundizar en el concepto de área (conectando con el sentido de la medida), más allá de la utilización de fórmulas, utilizando medidas directas a partir de los propios cuadrados determinados por los puntos del geoplano. Es decir, si consideramos como unidad de medida el área del cuadrado base de la trama cuadrada del geoplano, podemos calcular el área de los distintos cuadrados a partir de descomposiciones (ver Figura 3). Es importante que el estudiante manifieste habilidades como la conservación de la percepción o la percepción de las relaciones espaciales para reconocer que un objeto tiene propiedades invariantes como el tamaño y la forma; por ejemplo, comprobar que el área de un rectángulo se mantiene aunque cambie de posición o se aplique alguna isometría.

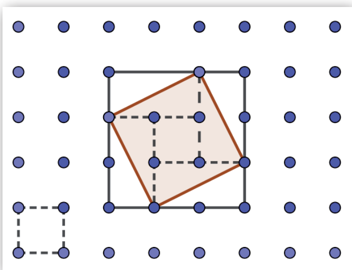


Figura 3. Cálculo de área del cuadrado mediante descomposición

De un nivel más avanzado se pueden plantear cuestiones relativas a la construcción de cuadrados de una determinada área. ¿Es posible construir cuadrados de área cualquier número natural? Es importante favorecer la construcción de cuadrados en posiciones giradas y contrastar el área obtenida mediante descomposición y mediante la fórmula a partir de la longitud de su lado. Nuevamente la componente de movimientos se ve reforzada por las habilidades relativas a la conservación de propiedades, como el área o la perpendicularidad, al realizar isometrías.

En esta tarea se aporta un elemento fenomenológico del cuadrado en su utilización como unidad de medida y al generarse conexiones con elementos del sentido de la medida. ¿Qué significa que una figura tenga de área 7 metros cuadrados? En el geoplano se ve la utilidad de esta unidad de medida al "rellenar de cuadrados" la superficie de la figura. ¿Qué ocurre si en vez de un geoplano de trama cuadrada se utiliza una trama isométrica utilizando como unidad de medida de superficie el área de un triángulo equilátero? En este caso, se puede cuestionar al alumnado sobre la conveniencia de usar esta medida triangular para comprobar que todos los polígonos construidos en el geoplano de la Figura 4 tienen la misma área y perímetro sin necesidad de utilizar fórmulas ni medidas basadas en cuadrados.

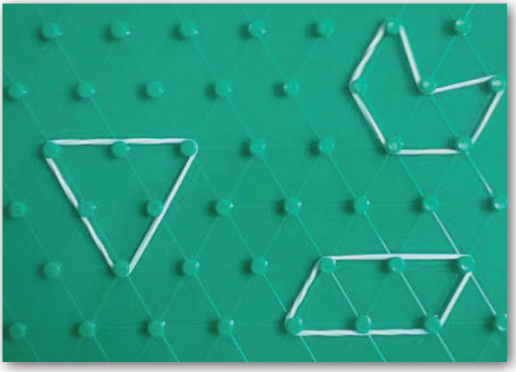


Figura 4. Polígonos con igual área y perímetro en la trama isométrica del geoplano

El propio geoplano admite el uso de coordenadas para identificar puntos. Por ejemplo, se pueden construir figuras geométricas y comunicar a los compañeros las coordenadas de los vértices para que los reproduzcan. Si les pedimos que determinen las coordenadas de un mismo objeto desde cuatro puntos de vista diferentes atendiendo a los cuatro lados del geoplano, se favorecen las habilidades asociadas a la orientación espacial, como la percepción de la posición en el espacio (determinar la relación de un objeto con otro objeto o con el observador). Una estrategia para reconocer la perspectiva del compañero puede ser aplicar un movimiento que lleve un observador al otro, así se conectan las componentes de visualización, orientación y movimientos.

Conectando el sentido espacial con otros sentidos

Como se ha evidenciado en tareas anteriores, el sentido espacial está estrechamente relacionado con el sentido de la medida. También se pueden establecer conexiones con el sentido numérico o con determinadas propiedades geométricas y gráficas asociadas al sentido estocástico. A lo largo de las etapas educativas, en la resolución de problemas geométricos va adquiriendo un papel protagonista la utilización de fórmulas, ecuaciones y notación algebraica y pueden perder valor los razonamientos más visuales, especialmente cuando se tratan de tareas de generalización o argumentación. Así, es importante mostrar tareas en las que la conexión del sentido espacial con el sentido algebraico aporta un enriquecimiento a la resolución de problemas. Lo ejemplificaremos con la tarea de la siembra de semillas. Esa tarea describe un contexto en el que un agricultor siembra cada día tres semillas en línea recta, en una línea paralela a la del día anterior y distante un metro. Se pregunta por el número de cuadrados que pueden construirse de forma que las semillas sean sus vérticesy por el área de estos. Tras trabajar con algunos casos particulares (ej., día 3 o día 5), se puede estudiar el caso del día 100. La cuantificación de patrones geométricos como el caso de estos cuadrados, permite dirigir la atención hacia la relación entre las variables cuantificadas implicadas (ej. en este caso el número de día y el número de cuadrados) y nos traslada a un problema de modelización.

Sentido estocástico

Las actividades propuestas para esta etapa deben permitir que el alumnado empiece a desarrollar el sentido estocástico a partir de estudiar datos en contextos cotidianos, interpretarlos dentro de él, dar sentido a los procedimientos de análisis de los datos, y reconocer la incertidumbre inherente cuando se estima una población mediante una muestra. Desde una perspectiva investigadora, el alumnado deberá interpretar información procedente de diferentes fuentes y relativa a diferentes contextos con el fin de elaborar inferencias, hacer predicciones y tomar decisiones fundamentadas en los datos.

Las primeras actividades pueden enunciarse como pequeñas cuestiones de investigación relativas a experiencias cotidianas sobre las cuales el alumnado carece de datos para poder darles respuesta, por ejemplo: *¡Me duele la espalda! ¿Pesa demasiado mi mochila?*

Esta actividad, adaptada de Mintz et al. (2002), tiene como objetivo estudiar cómo la rutina diaria de llevar la mochila cargada con mucho peso conlleva problemas serios de salud en la espalda, dolor de cabeza y dolor de hombros. La secuencia didáctica para dar respuesta a la pregunta puede iniciarse con el estudio documental sobre qué relación existe entre el dolor de espalda y el peso de la mochila y cuál el peso adecuado de una mochila para el alumnado de primaria. Ello debe permitir identificar las primeras situaciones de aleatoriedad al valorar que la respuesta a la misma no está determinada para toda la población española, ni tan solo para cada uno de los alumnos o alumnas de la clase. También permitirá identificar que las dos cuestiones básicas a responder son: ¿cuánto pesamos? y ¿cuál es el peso de nuestras mochilas? Además, supone la identificación de dos variables: peso de cada uno y peso de la mochila.

Tal y como indica Konold (2007) el estudio de dichos datos (recogida, organización en tablas y presentación mediante gráficos) usando medios tecnológicos es suficiente para que el alumnado empiece a desarrollar las capacidades de razonamiento e interpretación de datos. Si en dicha recogida de datos se añade la variable género, el alumnado puede enfrentarse a realizar las primeras comparaciones, interpretar las cuestiones previas del estudio en función del género y, así, realizar las primeras inferencias informales. Sin embargo, el alumnado se puede enfrentar al dilema de no saber si están razonando sobre los datos como si fueran toda la población o sobre una población subyacente de la que los datos son una muestra (Pratt y Ainley, 2008). Empezando, así, a percibir la variabilidad de la muestra y las fuentes que la producen. Es más, considerando la necesidad de un crecimiento a la par en la comprensión de los conceptos de variabilidad, distribución de los datos y muestreo, este tipo de estudios les ha de permitir reconocer la incertidumbre asociada a la muestra del alumnado que se estudie (Pfannkuch et al., 2015).

En una última fase, y sabiendo que la Asociación Española de Pediatría (AEP) indica que el peso de la mochila de los niños y niñas nunca debe superar el 10-15% del peso de los mismos, podrían tomarse decisiones individuales sobre qué objetos necesitamos llevar cada uno de nosotros en la mochila diariamente según nuestro género y peso, tomar decisiones conjuntas para el grupo clase, nivel educativo o centro escolar sobre cómo preparar la mochila diaria e incluso, en caso de sobrepeso de algunas mochilas, realizar predicciones sobre los problemas de espalda que puedan tener cuando vayan creciendo.

Siguiendo las recomendaciones de Ben-Zvi et al. (2015), se aconseja que en los primeros niveles de primaria la muestra se reduzca al alumnado del grupo clase. Posteriormente se puede ampliar la muestra al alumnado de un mismo nivel. Finalmente la muestra se puede ampliar a todo el colegio. La ampliación del tamaño de la muestra conlleva que el alumnado trabaje con la variable nivel educativo o edad además de las tres variables señaladas con anterioridad (género, peso del niño o niña, y peso de la mochila), que les permiten distinguir entre variables cualitativas y cuantitativas.

Los estudios de investigación sobre la lectura de gráficos indican la existencia de cuatro niveles de lectura de los gráficos (Diaz-Levicoy et al., 2015). La actividad de la mochila, u otras actividades diseñadas bajo los mismos principios, permiten que el alumnado se adentre en tres niveles de lectura de los gráficos: leer los datos (lectura literal), lectura dentro de los datos (leer para comparar, es decir, extraer información implícita en el gráfico mediante operaciones o comparaciones), leer más allá de los datos (leer para predecir). Sin embargo, se necesitan actividades de mayor complejidad que favorezcan una lectura detrás de los gráficos (análisis crítico de la información y del contexto al que refiere). Estas pueden surgir de la necesidad de usar el soporte gráfico para comparar distribuciones en función de su centro y su dispersión e iniciar así al cálculo de los primeros parámetros de centralización y posición. Para una lectura detrás de los datos, proponemos la siguiente actividad: *¿Cuál es el mejor diseño de un avión de papel 10x15 cm^2 o 20x30 cm^2?*

Fielding-Wells y Hillman (2018) proponen esta actividad auténtica para introducir al alumnado del tercer ciclo en la modelización de datos y provocar que razonen y piensen estadísticamente sobre el significado y el sentido que tiene el uso de medidas de centralización, posición y dispersión. La actividad se inicia mediante la introducción de la pregunta que guiará el proceso de modelización de cuál de esos dos es el mejor tamaño para fabricar aviones de papel. Para ello, el alumnado debe construir los aviones, probarlos, recolectar los datos del experimento asociados al tamaño del papel y la distancia que recorren y representar gráficamente los mismos.

La lectura de los datos del gráfico debe permitirles en un primer momento identificar los valores atípicos y cómo se distribuyen los datos en dicha representación. Se sugiere agrupar los datos según el tamaño del avión en diferentes intervalos de distancia recorrida, permitiéndoles distinguir dos tipos de variables: cualitativas (tipo de avión: 10x15 o 20x30) y cuantitativas continuas (distancia recorrida). Posteriormente puede analizarse gráficamente la dispersión de los datos para cada uno de los tipos de avión con el fin de intentar inferir cuál es el mejor diseño de avión. Sin embargo, el estudio de la dispersión en el gráfico no permitirá al alumnado tomar una decisión sobre el mejor modelo. Una lectura detrás de los datos permitirá valorar dónde hay más datos (densidad), qué valor tiene mayor frecuencia (moda), dónde están su centrados (media) o cuál es su punto medio (mediana). Posteriormente se pueden traducir numéricamente los intervalos de mayor densidad, la moda, mediana y media. Estos análisis del centro, la dispersión, la densidad y de la asimetría, favorecerán pasar del estudio de los valores individuales de los datos a la noción de distribución de los datos (Bakker y Gravemeijer, 2004). Finalmente, el alumnado puede responder al problema de modelización estadística tomando decisiones sobre cuál es el mejor diseño para el avión.

Desde un punto de vista probabilístico, el alumnado puede predecir la distancia a la que llegará un avión si se vuelve a lanzar. Pueden ir más allá y mediante el gráfico asignar probabilidades a los diferentes intervalos de lanzamiento usando palabras como seguro, imposible, poco probable, etc. Y, en consecuencia, realizar predicciones usando el lenguaje probabilístico. Los diferentes resultados de estas predicciones facilitarán la comprensión de la incertidumbre asociada, la aleatoriedad de la situación y de cómo el estudio estadístico favorece dicha predicción.

Así pues, la participación en el proceso de modelización de los aviones de papel, en el que se han establecido unas primeras hipótesis e inferencias, favorecerá la maduración cognitiva del pensamiento hipotético en un primer nivel descrito como las percepciones sobre qué ocurre en la realidad (Serradó, 2014). Pero, también surgirá el reto de conectar las primeras intuiciones cotidianas del alumnado sobre el azar, expresadas con su lenguaje natural, y el lenguaje académico de la probabilidad.

En este sentido, proponemos que las actividades se trabajen desde la progresión del conocimiento probabilístico informal al formal. Debido a la multiculturalidad de nuestras aulas, usar el lenguaje natural para expresar la idea de azar puede ser problematico ya que hay países que no tienen una palabra natural para expresar la idea de probabilidad o en otras culturas contextualizan esta idea utilizando palabras, frases y expresiones diferentes. Por ello, proponemos una actividad en que el alumnado debe explicar qué significan para ellos frases como las siguientes: a) Lo más probable es que mañana llueva; b) Ocho de cada diez veces lloverá mañana; c) La posibilidad de que llueva mañana es del 80%, d) La probabilidad de que llueva mañana es de 0,8.

Esta actividad adaptada de los trabajos de Dvořákova et al. (2017) favorecerá la evolución del lenguaje probabilístico informal al lenguaje académico, progresando desde el concepto de posibilidad expresada en porcentajes hasta el concepto de probabilidad usando la fracción o decimal. También permitirá que el alumnado razone sobre el papel de la probabilidad en relación con su medida de la incertidumbre en contextos cotidianos en los que no sea aplicable la regla de Laplace o no sea posible la repetición del experimento aleatorio.

Sentido de la medida

El desarrollo del sentido de la medida en esta etapa requiere, en primer lugar, identificar las características de los objetos que son susceptibles de ser cuantificables y establecer relaciones cualitativas y cuantitativas que permitan distinguir igual, menor y mayor cantidad de una misma magnitud en diferentes objetos. De este modo podrá provocarse la necesidad de medir. La construcción de la noción de unidad de medida permite dar paso al aprendizaje del proceso de medida, la selección y empleo de estrategias y de instrumentos adecuados para realizar mediciones y la realización de estimaciones, todo ello mediante procesos de experimentación en contextos cotidianos.

El aprendizaje de las magnitudes y su medida se desarrolla a lo largo de toda a etapa de primaria, continuándose en secundaria. Para describir su evolución se destacan 5 propiedades. La conservación y la composición aditiva hacen referencia a que la cantidad de magnitud permanece estable cuando el objeto se somete a movimientos isométricos o se fragmenta en partes. La transitividad implica que si un objeto es mayor que otro y este es mayor que un tercero, el primer es mayor que el tercero. Las restantes propiedades, iteración de la unidad e igualdad de tamaño de las unidades, hacen referencia a la unidad de medida, la cual debe ser igual cuando se reitera para cubrir por completo un objeto.

A continuación centramos la atención en las magnitudes geométricas longitud, superficie y volumen, las cuales pueden trabajarse en conexión con el sentido espacial. Para el caso del aprendizaje de la longitud y su medida, mostramos una propuesta basada en niveles de desarrollo identificados en investigaciones previas (Sarama y

Clements, 2009) y una selección de tareas que secuenciadas pretenden promover que el alumnado de un nivel concreto de comprensión construya habilidades y conceptos.

Proceso de aprendizaje de la magnitud longitud y su medida en Educación Primaria

Sarama y Clements (2009) describen un proceso de aprendizaje para la magnitud longitud y su medida a partir de 8 elementos: el reconocimiento de la longitud, la conservación, la transitividad, la equipartición, la unidad de medida y su unicidad, la iteración, la acumulación de la distancia y la aditividad, el origen y relación entre número y la unidad de medida. Partiendo de estos elementos Szilagyi, Clements y Sarama (2013) indican una secuencia a través de la cual el alumnado puede progresar en el aprendizaje de la longitud y su medida. Esta se muestra en la tabla 1.

Tabla 1[1]. Niveles de desarrollo de la comprensión de la magnitud longitud y su medida (adaptado de Sarama y Clements, 2009)

<table>
<tr><th>Nivel</th><th>Características</th><td rowspan="4">Del reconocimiento de la magnitud longitud como un atributo de los objetos hasta la propiedad transitiva</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Reconocen la magnitud longitud como un atributo de los objetos: identifican las cualidades de la magnitud longitud.

Realizan comparaciones directas considerando la longitud de forma intuitiva.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Reconocen la conservación de la longitud (comprenden que, si se mueve un objeto, su longitud no cambia, tampoco si modificamos su forma).

Realizan comparaciones directas por desplazamiento de los objetos para clasificar los objetos por su longitud (pero tienen dificultades para ordenar por longitud cuando hay más de dos objetos, lo que evidencia dificultades con la transitividad)</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Utilizan la propiedad transitiva para ordenar tres o más objetos por su longitud mediante comparaciones indirectas</td></tr>
</table>

1. Esta adaptación ha sido parcialmente publicada en: Sánchez-Matamoros García, G., Moreno Moreno, M., Pérez Tyteca, P., y Callejo de la Vega, M. L. (2018). Trayectoria de aprendizaje de la longitud y su medida como instrumento conceptual usado por futuros maestros de educación infantil. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *21*(2), 203-228.

Nivel	Características	
4	Identifican una única unidad de medida, como parte de la longitud de un objeto que se mide y son conscientes de que deben realizar iteraciones de la unidad a lo largo de la longitud sin superposiciones ni saltos, y reconocer la propiedad de acumulación: reconocer que cuando se itera una unidad a lo largo de la longitud de un objeto y se cuentan las iteraciones, la palabra-número significa el espacio cubierto por todas las unidades contadas desde ese punto.	
5	Reconocen la relación inversa entre las unidades (su medida) y el número de unidades medida, es decir, a mayor longitud de la unidad de medida, menor número de iteraciones de esta (**Relación entre número y medida**). Reconocen la necesidad de utilizar una única unidad de medida para medir y que debe ser universal (**universalidad de la unidad de medida**). Empiezan a realizar estimaciones de la longitud de objetos usando el metro como unidad de medida.	De la propiedad transitiva a la constitución de la idea de unidad de medida de longitud y su uso
6	Reconocen los submúltiplos del metro (decímetro, centímetro, milímetro). Miden longitudes usando como unidades de medida los submúltiplos del metro (decímetro, centímetro, milímetro). Establecen equivalencias entre los múltiplos y submúltiplos del sistema métrico decimal. Conocen y usan instrumentos de medida de longitud (regla, cinta métrica, etc.)	

Con el interés de que el alumnado progrese a lo largo de los citados niveles, se les han de proponer diferentes tipos de tareas secuenciadas tales como las siguientes:

- Comparación de dos objetos por desplazamiento (comparación directa).
- Comparación de tres o más objetos usando un intermediario (comparación indirecta).

- Clasificación de objetos.
- Ordenación de objetos según su longitud (con subdivisiones).
- Comparación de las longitudes de un objeto con la de otro que lo contiene un número exacto de veces (iteración).
- Iterar distintas unidades de medida sobre una misma longitud.
- Subdivisión de una longitud en partes iguales.
- Uso de una regla graduada que no tiene el cero para medir una longitud.
- Selección de la unidad de medida más adecuada.
- Estimación y comprobación de longitudes de objetos.
- Medición usando diferentes procedimientos.
- Manejo de instrumentos de medida: uso y lectura.
- Cálculo del error de la medida.

Algunas investigaciones indican que los niños no siempre desarrollan la conservación de la magnitud antes de aprender algunas ideas de medición (Sarama y Clements, 2009) y ello implica dificultades en el desarrollo de la noción de acumulación (Stephan et al., 2003), en entender la unicidad en la unidad de longitud (Ellis et al., 2003), en realizar inferencias sobre el largo de los objetos independientemente del tamaño de la unidad (Nunes y Bryant, 1996), y finalmente en relacionar un número con una longitud e indicar su significado (Skoumpourdi, 2015).

Este hecho hace que en algunas ocasiones proponer tareas que conllevan el uso de elementos tanto de la magnitud como de la medida puede ayudarnos a identificar diferentes dificultades de aprendizaje que pueden estar dándose en nuestros estudiantes. En el siguiente ejemplo se propone al alumnado hacer collares usando diferentes materiales (cuentas de colores y distintos tipos de macarrones) y cordones de varios tamaños (A, B y C) (ver figura 5, adaptado de Moreno et al., 2021).

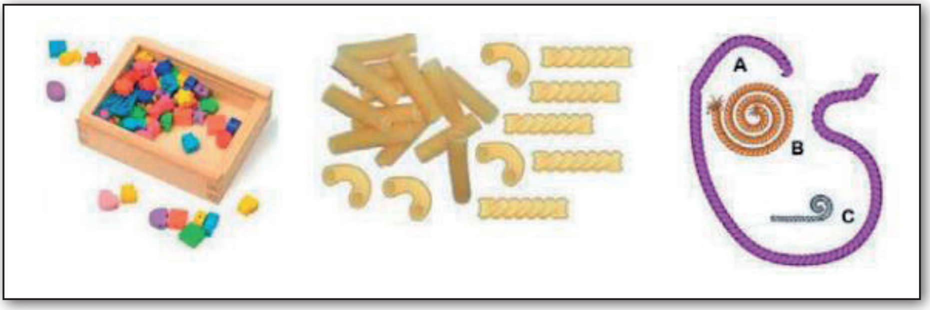


Figura 5. Accesorios para los collares en la tarea

Al preguntarles ¿quién ha hecho el collar más largo?, pueden partir de la longitud de la cuerda que elijan y emplear la propiedad de conservación al reconocer que la longitud de la cuerda no cambia, aunque esté doblada o estirada. También pueden decidir cuál es el más largo si todos han usado el mismo abalorio (misma unidad) y las iteraciones de la unidad realizadas no presentan huecos entre ellas, contando el número de abalorios utilizados para indicar la medida (largo) de este.

La resolución de la tarea por parte de los estudiantes nos permitirá interpretar diferentes características de la comprensión de estos. Por ejemplo, puede darse el siguiente diálogo entre dos estudiantes:

> Estudiante 1: El mío es más largo, tiene 12 macarrones [ha utilizado todos del mismo tipo] y he cogido la cuerda que tiene forma de ensaimada [cuerda B], pero es más largo que el de Mario [usa la cuerda C y 13 macarrones de distintos tipos] porque la cuerda es más larga.
> Estudiante 2: No, yo no estoy de acuerdo con Luis, porque el mío tiene más macarrones.

Por el diálogo entre ambos estudiantes, se puede inferir que el estudiante 2 no reconoce la conservación de la longitud al usar el número de abolorios de sus collares, en lugar de la forma de las cuerdas, para comparar la longitud de estos (nivel 1 de la Tabla 1), esto hace que el estudiante 2 muestre dificultades en relación con la medida de la longitud (unicidad de la unidad de medida). En cuanto al estudiante 1, se encuentran, al menos, en el nivel cuatro de desarrollo de la comprensión de la magnitud longitud y su medida (Tabla 1) porque dadas las características de la situación de enseñanza - aprendizaje hay evidencias, en relación con la magnitud, de que tiene adquirido el reconocimiento y la conservación de la longitud. En relación con la medida de longitud, este estudiante tiene adquirida la unicidad de medida, la iteración y la acumulación, dado que usa una única unidad de medida, macarrones del mismo tipo, la itera sin dejar huecos y ha utilizado el número de abalorios usados para indicar el largo del collar (acumulación).

Se debe tener en cuenta que, en función de los niveles de comprensión inferidos para cada estudiante, las decisiones instruccionales que debe plantear el docente para favorecer la progresión en el aprendizaje deben ser diferentes para cada estudiante. Así, para el estudiante 2 que se encuentran en el nivel uno de desarrollo de la comprensión de la magnitud longitud y su medida (Tabla 1), se debería plantear como objetivo de aprendizaje adquirir la conservación de la longitud y proponer como tarea, por ejemplo, comparar objetos con diferentes longitudes y formas. Para el estudiante 1, que se encuentran en el nivel cuatro de desarrollo de la comprensión de la magnitud longitud y su medida (Tabla 1), al no tener evidencia de si comprende la relación entre número y medida, se podría proponer como objetivo de aprendizaje adquirir esta relación y plantear, por ejemplo, la tarea de medir la longitud de un objeto primero con una unidad y después con otra de distinto tamaño.

Sobre el aprendizaje de las magnitudes superficie y volumen y su medida

Al igual que ocurre en el caso de la longitud, el alumnado percibe la idea de superficie manipulando objetos y comparándolos, primero de forma directa (superponiéndolos) y más adelante mediante un intermediario, lo que les ayuda a desarrollar la noción de transitividad. La comparación de objetos de diferente aspecto e igual superficie (ver ejemplo en Figura 6) contribuye a desarrollar la idea de conservación de la superficie y composición aditiva. Partiendo de estos conocimientos el alumnado podrá emplear la unidad cuadrada para medir por reiteración sobre los objetos. En este momento los geoplanos así como las mallas cuadriculadas en papel son de gran utilidad para contribuir a la comprensión de la unidad de medida cuadrada y del proceso de medida directa por iteración de la unidad. La consideración de figuras más complejas da lugar a la necesidad de descomponer la figura en otras cuyas áreas sean más fácilmente medibles (como se ha mostrado al referirnos al sentido espacial) o a razonar estableciendo relaciones entre áreas de figuras relacionadas. Por ejemplo, en la Figura 2 puede obtenerse el área del cuadrado sombreado a partir de su descomposición en un cuadrado de área 1 y cuatro triángulos de área 1 o, por el contrario, razonando a partir del cuadrado mayor que lo contiene cuya área es 9 y restándole las áreas de los cuatro triángulos de área 1 que se muestran en blanco.

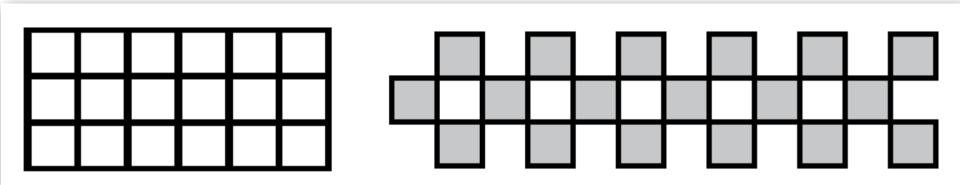


Figura 6. Figuras de diferente aspecto e igual superficie

El geoplano es también un recurso de gran utilidad para trabajar la relación entre perímetro y superficie y abordar las suposiciones erróneas que el alumnado tiende a desarrollar sobre la relación entre ambas magnitudes. Posteriormente será el momento de introducir las fórmulas del área cuya validez puede razonarse para casos sencillos como es el ejemplo del rectángulo o del romboide.

En lo que respecta a las magnitudes volumen y capacidad el proceso a seguir es similar siendo en este caso esencial la experimentación rellenando objetos con cubos o líquidos. La consideración de figuras tridimensionales compuestas por cubos favorece la comprensión de la unidad de medida cúbica y la comprensión de la medida del volumen y contribuirá a reducir dificultades relativas con la visualización de las unidades cúbicas que quedan dentro de la figura.

Sentido numérico

En los primeros cursos es fundamental poner la atención en una buena alfabetización numérica que lleve al alumnado a tomar conciencia de cada número natural en sí mismo como representación de una cantidad, del lugar que ocupa en la secuencia numérica y de las relaciones que mantiene con el resto de números. En este proceso debemos utilizar modelos cardinales que acojan las cantidades reales y modelos ordinales que muestren la serie ordenada de símbolos. Ambos modelos han de estar en constante conexión, ser muy estructurados y orientarse a la emergencia de estrategias eficaces para el cálculo.

En el trabajo con las cantidades, la caja de numeración u otros materiales similares como los bloques de base diez (preferiblemente encajables), son recursos imprescindibles para construir los números, apreciar su tamaño y comprender las leyes del Sistema de Numeración Decimal (Ver Figura 7). De uno en uno, el alumnado va construyendo los nueve primeros números, la decena, la centena y las cantidades hasta el novecientos noventa y nueve. El trabajo con los citados recursos produce un salto cualitativo en la comprensión del número, ya que proporciona un modelo concreto y fiel a la realidad visible, que da sentido al uso de los símbolos escritos y a los conceptos relativos al valor posicional. En este contexto se trabaja con facilidad y de forma significativa el conteo y la comprensión del número como cantidad.

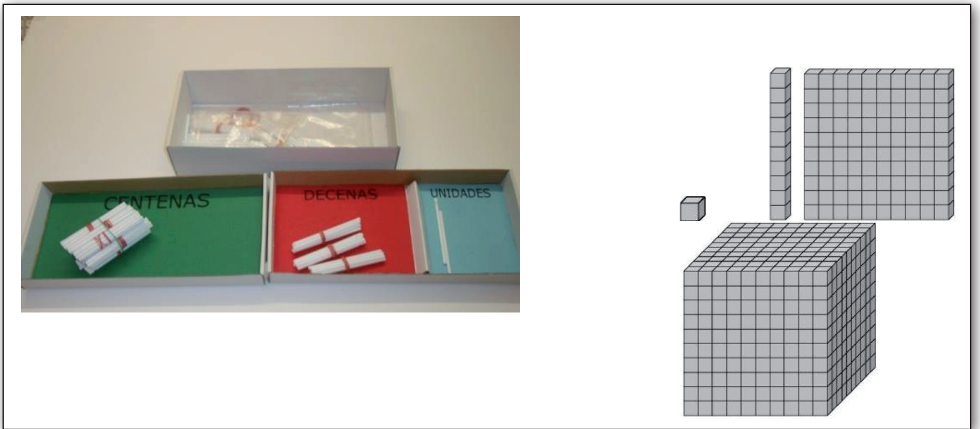


Figura 7. Caja de numeración y bloques de base diez

En lo que respecta al cálculo, se debe evitar el uso del algoritmo estándar en los primeros años de aprendizaje. El desarrollo del sentido numérico se favorece apoyando el cálculo en el uso de la caja de numeración o los bloques de base diez ya que conecta directamente con estrategias por descomposición y facilita la transcripción gráfica que se deriva de la manipulación de las cantidades. En la Figura 8 se muestran ejemplos de cálculo haciendo uso de la caja de numeración en los que el alumno expresa numéricamente cómo ha resuelto la operación.

63 - 24 = 63-3-20-1=39	45+29 45+10+10+5+4=74
Pone seis decenas y tres unidades (63); quita de ella las tres unidades sueltas (-3) y dos decenas (-20); deshace una decena para tomar una unidad (-1) y pone en su lugar las nueve unidades restantes; hace recuento y comprueba que quedan tres decenas y nueve unidades (39).	Añade una decena (+10), otra decena (+10) y cinco unidades (+5) con las que forma una nueva decena que deberá agrupar y llevar a su lugar. Por último, añade las cuatro unidades restantes (+4), hace recuento y escribe el resultado (74).

Figura 8. Cálculos resueltos con la caja de numeración

Más adelante, en ausencia de la caja, el alumno recrea mentalmente la actividad manipulativa y expresa cada paso. Cuando el cálculo le resulta difícil une las cantidades que corresponden a cada cálculo parcial, como puede verse en la Figura 9.

45+32=77
45+30+2=77
75

587+396=
887+96=
887+3+10+83=983
890
900

Figura 9. Operaciones realizadas sin la caja de numeración

El empleo de las centenas, decenas y unidades fuera de la caja de numeración o con los bloques de base diez permite un conocimiento aún más flexible de las cantidades. Por ejemplo se pueden realizar descomposiciones de una cantidad (ej., descomposición del 58 como 40+18, 11+47, 10+20+28, 2+50+6) o representaciones de la suma repetida de cantidades para conectarla con la multiplicación (Figura 10).

Cuatro veces 222:
4x222=
4x200=800
4x20=80
4x2=8

Figura 10. Representación de la multiplicación

La cinta numérica y la tabla 100 (ver Figura 11) son otros dos recursos a destacar por su utilidad para conectar las representaciones concretas de cantidades con el símbolo que les corresponde.

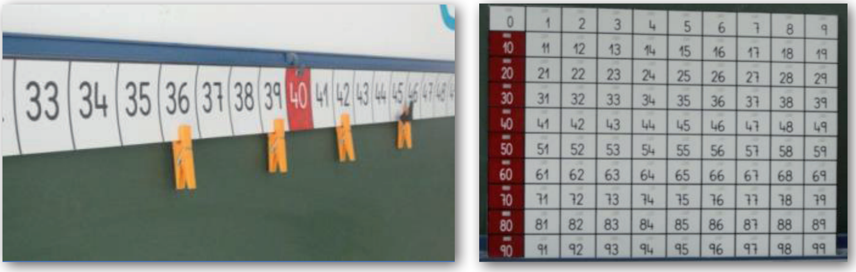


Figura 11. Cinta numérica y panel numérico

La cinta numérica facilita la apropiación de los números del cero al cien como una secuencia linealmente ordenada, continua y ampliable. Para el alumnado, la cinta se asemeja a los juegos de recorrido tradicionales en los que el cero es el punto de partida y cada número tiene su lugar ocupando una casilla. Siempre podemos verla y recurrir a ella para consultar dudas o efectuar comprobaciones. Además, contribuye a enriquecer el contexto de aprendizaje, ya que cada número aporta información sobre sí mismo en relación con los demás: vemos los que le anteceden y le siguen, si está situado al principio, en la parte central o al final de la serie, podemos compararlo con la posición que ocupan otros y cuantificar la distancia entre ambos. También es un excelente soporte para recoger información numérica de sucesos, situaciones o acontecimientos que afecten al aula, o para representar datos referidos a problemas que debamos resolver.

Apoyándonos en este "mapa lineal", cada niño y niña podrá ir construyendo su propia línea mental para pensar y operar con los números. En este aspecto, la cinta conecta directamente con estrategias secuenciales (a saltos) para el cálculo pensado (Figura 12) y con representaciones gráficas como la Línea Numérica Vacía (Figura 13). Es un recurso muy eficaz para aplicar las primeras estrategias de cálculo basadas en desplazamientos convenientes.

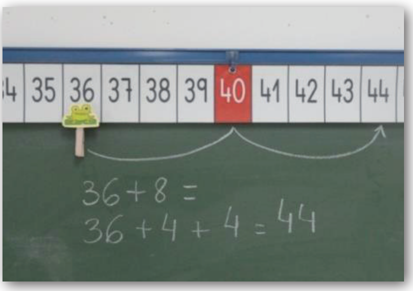


Figura 12. Conexión entre la cinta numérica y el cálculo simbólico

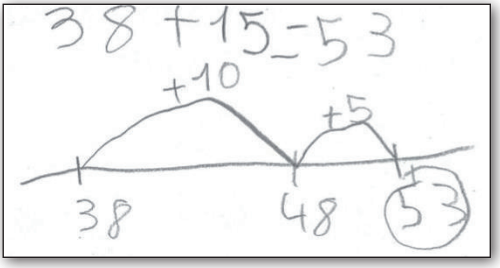


Figura 13. Cálculo en la línea numérica vacía

La tabla 100 o panel numérico permite trabajar las operaciones de suma y resta como desplazamientos por las filas y las columnas (ver Figura 14). Es de utilidad para poner de manifiesto distintas formas de resolver una misma operación (Ver Figura 15). Se deben realizar muchas actividades para conocer y asimilar este mapa hasta que constituya un soporte fiable para el cálculo mental.

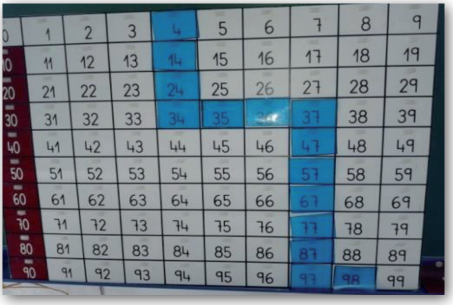


Figura 14. Representación del recorrido 4 + 30 + 3 + 60 + 1= 98 en el panel

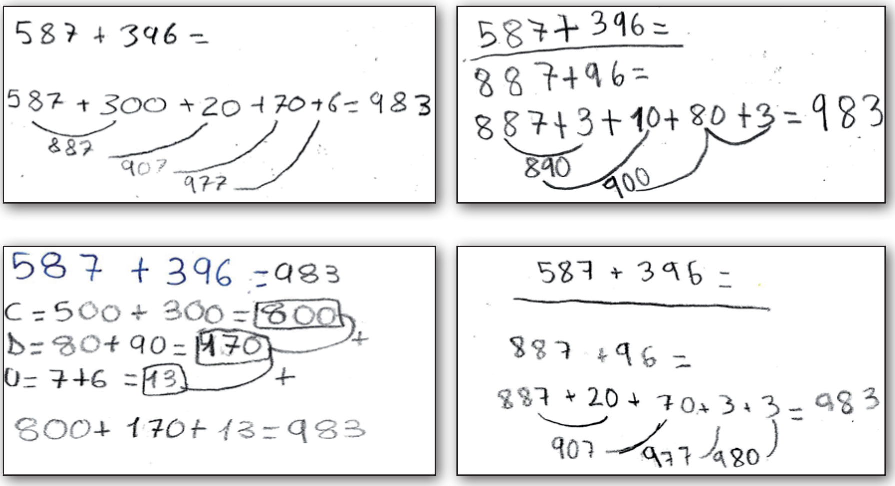


Figura 15. Operación 587+396 usando diferentes estrategias

El trabajo con los patrones aritméticos en el contexto de cálculos que comparten cierta estructura (ej., 10000-143, 10000-9143, 5000-4143) también favorece el desarrollo del sentido numérico.

Referencias

Bakker, A. y Gravemeijer, K. (2004). Learning to reason about distribution. En D. Ben-Zvi y J. Garfield, *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 147-168). Kluwer Academic Publishers.

Ben-Zvi, D., Bakker, A. y Makar, K. (2015). Learning to reason from samples. *Educational Studies in Mathematics, 88*(3), 291-303. DOI:10.1007/s10649-015-9593-3.

Blanton, M. (2008). A*lgebra and the elementary classroom. Transforming thinking to practice.* NH: Heinemann.

Diaz-Levicoy, D., Arteaga, P. y Batanero, C. (2015). Gráficos estadísticos y niveles de lectura propuestos en textos chilenos de Educación Primaria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 229-238). SEIEM.

Comité Español de Matemáticas (CeMat). (2021). *Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria.* https://matematicas.uclm.es/cemat/wp-content/uploads/bases2021.pdf.

Dvořáková, B., Gimenez, J., Guzón, A.F. H., Hao, L., Inekwe, I., Mejía B., Sánchez, M., Scott, P., Serradó, A., Spevák, J. y Teague, D. (2017). The importance of teaching probability. A Brief produced at the Park City International SeminarPark City Mathematics Institute July 3-8, 2017.

Ellis, S., Siegler, R. S. y Van Voorhis, F. E. (2003). *Developmental changes in children's understanding of measurement procedures and principles.* Presentado en Society for Research in Child Development, Tampa, FL, USA.

Fielding-Wells, J. y Hillman, J. (2018). Supporting young students emerging understandings of centre through modelling. En M. A. Sorto, A. White y L. Guyot (Eds.), *Looking back, looking forward. Proceedings of the Tenth International Conference on Teaching Statistics* (ICOTS10). International Statistical Institute.

Kaput, J. (2008). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). University of Massachusetts.

Konold, C. (2007). Designing a data analysis tool for learners. En M. Lovett y P. Shah (Eds.), *Thinking with data: The 33rd Annual Carnegie Symposium on Cognition* (pp. 267-291). Lawrence Erlbaum Associates.

Mason, J. (2017). Overcoming the algebra barrier: Being particular about the general, and generally looking beyond the particular, in homage to Mary Boole. En S. Stewart (Ed.), *And the rest is just algebra* (pp. 97-117). Springer.

Mintz, J., Mintz, J., Moore, K. y Schuh, K. (2002). "Oh, My aching back! A statistical analysis of backpack weights". *STATS: The magazine for Students of Statistics* (32), 1719-1720.

Moreno, M., Sánchez-Matamoros, G., Callejo, M. L., Pérez-Tyteca, P. y Llinares, S. (2021). How prospective kindergarten teachers develop their noticing skills: the instrumentation of a learning trajectory. *ZDM–Mathematics Education, 53*(1), 57-72.

Nunes, T. y Bryant, P. E. (1996). *Children doing mathematics*. Blackwell.

Pfannkuch, M., Arnold, P. y Wild, C. (2015). What I see is not quite the way it really is: students' emergent reasoning about sampling variability. *Educational Studies in Mathematics* (88), 343–360. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9539-1

Pratt, D. y Ainley, J. (2008). Introducing the special issue on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal, 7*(2), 3-4.

Sarama, J. y Clements D. (2009). *Early childhood mathematics education research. learning trajectories for young children*. Routledge.

Serradó, A. (2014). Developing hipothetical thinking through four cycles of informal stocastical modelling. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)* (24), 173-178.

Skoumpourdi, C. (2015). Kindergartners measuring length. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 9)* (pp. 89-1995). Charles University

Stephan, M., Bowers, J., Cobb, P. y Gravemeijer, K. P. E. (2003). *Supporting students' development of measuring conceptions: Analyzing students' learning in social context* (Vol. 12). National Council of Teachers of Mathematics.

Szilagyi, J., Clements, D. H. y Sarama, J. (2013). Young children's understanding of length measurement: Evaluating a learning trajectory. *Journal for Research in Mathematics Education, 44* (3), 581-620. https://dx.doi.org/10.5951/jresematheduc.44.3.0581

Ureña, J., Ramírez-Uclés. R., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2022), *Generalisation strategies and representations used by last-year elementary school students*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.
https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2058429

Matemáticas en la Enseñanza Secundaria Obligatoria

Mathematics in Compulsory Secondary Education

Moreno, A.[a]; Adamuz-Povedano, N.[b]; Cañadas, MC.[a]; Fernández-Ahumada, E.[b]; García Pérez, M.T.[b]; Sánchez-Matamoros García, G.[c]; Ramírez-Uclés, R.[a]; Serradó, A.[d]
[a] *Universidad de Granada,*
[b] *CEIP Al-Ándalus,*
[c] *Universidad de Sevilla,*
[d] *Colegio La Salle-Buen Consejo.*

Resumen

El desarrollo de la competencia matemática a lo largo de la etapa de Secundaria se lleva a cabo mediante la movilización de contenidos que integran conceptos, procedimientos y actitudes. Estos contenidos se van a organizar en este capítulo en torno a la idea cognitiva de sentido matemático que a lo largo del libro se ha venido interpretando como el conjunto de destrezas relacionadas con el dominio en contexto de contenidos métricos, numéricos, algebraicos, geométricos y estocásticos. Esta idea de sentido matemático subraya el carácter funcional del aprendizaje de las matemáticas y las posibilidades de establecer conexiones entre los diferentes contenidos de los sentidos matemáticos. A lo largo del capítulo se ofrecen propuestas de tareas para el desarrollo de cada uno de los sentidos para orientar al profesorado de esta etapa a desarrollar las propuestas curriculares.

Palabras clave: Sentido matemático, Secundaria, Tareas matemáticas, Currículo.

Abstract

The development of mathematical competence throughout this stage is carried out through the mobilization of content that integrates concepts, procedures and attitudes. These contents are going to be organized in this chapter around the cognitive idea of mathematical sense that throughout the book has been interpreted as the set of skills related to mastery in the context of metric, numerical, algebraic, geometric and stochastic contents. This idea of mathematical sense underlines the functional nature of learning mathematics at this educational stage and the possibilities of establishing connections between the different contents of the mathematical senses. Throughout the chapter, proposals for tasks are offered for the development of each of the senses to guide the teachers at this stage to develop the curricular proposals.

Keywords: Mathematical sense, Secondary, Mathematical tasks, Curriculum.

Las matemáticas en la Enseñanza Secundaria Obligatoria

El aprendizaje de las matemáticas en la Enseñanza Secundaria Obligatoria se caracteriza por ser competencial, autónomo, significativo y reflexivo. El desarrollo de la competencia matemática a lo largo de esta etapa se lleva a cabo mediante la movilización de contenidos que integran conceptos, procedimientos y actitudes. Estos contenidos se van a organizar en este capítulo en torno a la idea cognitiva de sentido matemático que a lo largo del libro se ha venido interpretando como el conjunto de destrezas relacionadas con el dominio en contexto de contenidos métricos, numéricos, algebraicos, geométricos y estocásticos. Esta idea de sentido matemático subraya el carácter funcional del aprendizaje de las matemáticas en esta etapa educativa y las posibilidades de establecer conexiones entre los diferentes sentidos matemáticos.

El profesorado es el intermediario entre los planteamientos curriculares y su aula. Por tanto, todo cambio debe contar con la responsabilidad del profesorado. Su participación, bien como participante del proceso de cambio curricular o como usuario del currículo final, demanda la comprensión de los procesos de cambio que tiene lugar en él. A continuación, se resaltan aspectos clave sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en Secundaria Obligatoria relacionados con los distintos sentidos matemáticos.

Sentido Algebraico

El álgebra escolar se ha venido introduciendo en los currículos de muchos países como manipulación de símbolos y su enseñanza se ha reservado para las etapas de Secundaria y Bachillerato (Kaput, 2008; NCTM, 2003). El álgebra, así entendida, ha sido tradicionalmente introducida como generalización de la aritmética y las representaciones algebraicas tratadas como representaciones de las operaciones aritméticas (Kieran, 1992).

Sin embargo, el profesorado es consciente de que buena parte del alumnado posee una escasa comprensión de las relaciones y estructuras matemáticas y muestran una falta de relación entre sus conocimientos aritméticos y sus conocimientos algebraicos.

El álgebra tiene sus raíces históricas en el estudio de métodos de resolución de ecuaciones. Incluso antes de la introducción de los símbolos alfanuméricos, como señala Sessa (2005), las construcciones geométricas de Euclides tuvieron una influencia perdurable en el álgebra. En esa convivencia del álgebra y la geometría escolar, "pensar la geometría como herramienta para validar las leyes y resolver problemas algebraicos y concebir al álgebra como herramienta para resolver problemas geométricos constituyen dos facetas de una misma problemática que permitiría a los alumnos la construcción de sentidos potentes para ambos campos" (Sessa, 2005, p. 63).

El sentido algebraico, estudia las relaciones entre cantidades, la generalización de propiedades y la representación de las relaciones matemáticas. La caracterización del sentido algebraico desarrollada en este libro nos lleva a mirar el álgebra escolar desde tres perspectivas: álgebra como el estudio de estructuras y sistemas abstraídos de los cálculos y las relaciones; álgebra como el estudio de funciones, relaciones y variación conjunta; y, álgebra como la aplicación de un grupo de lenguajes de modelización para expresar y apoyar el razonamiento sobre las situaciones que se modelan.

El álgebra como el estudio de estructuras y sistemas abstraídos de los cálculos y las relaciones

Esta perspectiva del álgebra considera los aspectos simbólicos y su manipulación. Es decir, la identificación de situaciones donde usar los símbolos, la ejecución de cálculos simbólicos con fluidez y de diversas maneras, la conexión del álgebra con la geometría y la elección de símbolos de manera eficiente.

Un ejemplo de esta forma de abordar el álgebra se muestra en la siguiente tarea tomada de Mason (2017). *Escribe cuatro números en una tabla de dos por dos:*

5	*3*
7	*4*

Escribe el producto de las filas y el de las columnas y ahora suma la suma de las columnas y réstale la suma de las filas

35+12-15-28 = 4

En una nueva tabla y siguiendo las mismas instrucciones elige números para que el resultado sea 3 (o el número que se elija previamente)

La propiedad que se esconde tras esas operaciones es el producto de las diferencias de las diagonales y la identificación de esa estructura, aunque difícil de reconocer de inmediato, permitirá resolver la tarea para cualquier resultado que asignemos previamente. Evidentemente, si el alumnado está familiarizado con el uso de letras, pueden hacerlo utilizando el álgebra simbólica, pero no es una condición imprescindible, ya que pueden desarrollar el pensamiento algebraico con esta actividad sin lenguaje simbólico y empleando otras representaciones. Lo que sí necesitarán es estar familiarizados con propiedades de la aritmética como la conmutatividad, la asociatividad y la propiedad distributiva.

Esta tarea se enriquece si planteamos dos variantes para practicar la búsqueda de la propiedad desconocida. Esta propuesta se presenta como paso intermedio entre el uso de la aritmética con números concretos y el uso del simbolismo con letras. La primera de las variantes sería: *¿por qué el resultado sigue siendo el mismo si se elige dos números más, sumo el primer número a las celdas superior izquierda e inferior derecha y resto el segundo número a los números inferior izquierdo y superior derecho?*

La otra variante sería: *Leyendo en el sentido de las agujas del reloj desde la esquina superior izquierda, forme dos números de dos dígitos. En nuestro caso obtenemos 53 y 47. Haz lo mismo en sentido antihorario para obtener 57 y 43. Ahora haz la diferencia de los productos: 53 x 47 – 57 x 43 = 40.*

Modifiquemos la cuadrícula restando 1 a los números de la diagonal principal y sumando 2 a los números fuera de la diagonal. Se obtiene la cuadrícula que se muestra a continuación, y $45 \times 39 - 49 \times 35 = 40$ *también. ¿Podría ser esto una coincidencia?*

4	5
9	3

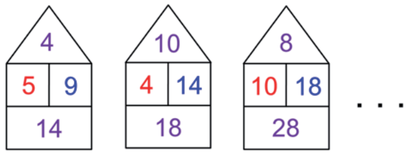
En definitiva, se trata de tareas donde hay una estructura desconocida que el alumnado debe identificar y representar. El camino hacia la representación alfanumérica cada vez más compleja puede transitar por las representaciones disponibles en el alumnado.

Álgebra como el estudio de funciones, relaciones y variación conjunta

Esta perspectiva del álgebra desarrolla habilidades como generalizar patrones, relacionar las propiedades de los números con la manipulación algebraica, relacionar las familias de funciones con determinadas expresiones algebraicas y analizar el efecto de los parámetros en las expresiones algebraicas.

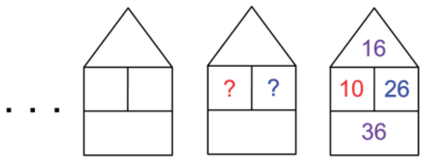
La siguiente tarea[1] y sus posibles extensiones permiten el desarrollo del sentido algebraico con la perspectiva anterior:

El profesor presenta las siguientes casitas con números y pide a los estudiantes que averigüen qué está sucediendo.



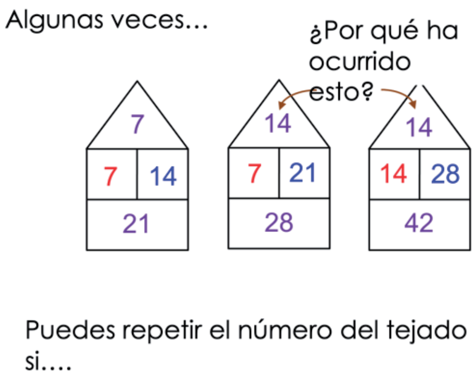
Esta tarea incluye varias relaciones numéricas que pueden ser identificadas por el estudiantado y formalizadas con lenguaje simbólico o no según lo familiarizados que estén con el uso de letras. Sin embargo, sea cual sea la estrategia de representación que se emplee, se potenciará el sentido algebraico porque estarán generalizando patrones y estableciendo las propiedades numéricas desconocidas en la tarea.

Esta tarea puede enriquecerse si planteamos variantes como la siguiente donde el estudiantado tendrá que deducir los términos precedentes a uno dado conociendo la ley de transformación:



1 http://www.mrbartonmaths.com/index.html

Incluso podemos desarrollar la capacidad de justificar argumentos si preguntamos:



Álgebra para expresar y apoyar las situaciones de modelización

Las matemáticas que principalmente se trabajan hoy tienen como objetivo modelizar situaciones del mundo real para hacer predicciones futuras y para explicar acontecimientos pasados. La modelización incluye la identificación de patrones, situaciones del mundo real y experimentos científicos (NCTM, 2003).

Tareas (Schmittau, 1993) como la siguiente son especialmente interesantes en este nivel educativo:

> A las 8.00 de la mañana del domingo, un niño se fija en una pequeña planta que crece cerca de su casa. Decide medirla y descubre que mide 3 cm de alto. La mide de nuevo el lunes por la mañana a las 8:00 y encuentra que mide 9 cm de alto. Decide medirla a la misma hora en las mañanas siguientes. La medida del martes es 27 cm y la del miércoles 81 cm. Suponiendo que este patrón de crecimiento es descriptivo de todo el historial de crecimiento de la planta:
>
> 1. ¿Qué altura tenía el sábado anterior a las 8:00? ¿Por qué no se fijó?
> 2. ¿Qué altura tenía el viernes anterior a las 8:00 am? ¿El jueves anterior a las 8 am?
> 3. Si etiquetamos el domingo como el Día 1, el primer día en que el niño midió la planta y quiere ser coherente con nuestro esquema de numeración, ¿cómo deberíamos numerar los siguientes días: sábado, viernes, jueves? Si denotamos la altura de la planta el domingo a las 8.00 a.m. como 31 cm, ¿cómo podríamos expresar las alturas de la planta los otros días?
> 4. ¿Qué altura tenía la planta a las 8:00 de la noche del sábado anterior? ¿A las 8:00 de la noche del domingo? ¿A las 4:00 pm del sábado? (¿Encontraste la altura en otro día u hora?)
> 5. ¿Cuándo tendrá la planta 46,765 cm de altura?

El contexto de esta tarea ofrece un modelo matemático para su resolución que se introduce inicialmente mediante la reflexión sobre lo que ocurre en el contexto real (pregunta 1 y 2) y se va formalizando en la cuestión 3 para terminar con su expresión algebraica. Especialmente interesante es la cuestión 4 porque permite que el alumnado reflexione sobre la necesidad de trabajar con valores no positivos y no enteros de la variable independiente. Finalmente, la cuestión 5 anima a trabajar con la relación inversa entre las variables.

Más que reflejar la realidad botánica, Schmittau (1993) dice que esta tarea, que sugiere introducir después de potencias con números enteros positivos, implica el movimiento entre secuencias aritméticas y geométricas (situando los datos en ejes de día y altura) a través del desarrollo de la función exponencial $y=3^x$, y se desarrollan soluciones para x en varios intervalos, no solo para números enteros positivos, sino también exponentes cero, negativos y fraccionarios. Debido a la naturaleza continua del crecimiento de las plantas, se puede ver como posible, en determinados intervalos de tiempo, que las alturas de estas involucren exponentes irracionales.

Sentido espacial

En el capítulo 3 de este libro se describe que el sentido espacial se organiza alrededor de dos componentes y sus respectivas habilidades, que lejos de ser independientes, están íntimamente enlazadas: manejo de conceptos geométricos y visualización.

El desarrollo de las destrezas asociadas a este sentido se consigue con la propuesta de tareas escolares que fomenten tres acciones básicas: construir, representar y describir objetos geométricos. Estas acciones se han de realizar tanto con objetos formales como con variedad de objetos manipulables, donde la tecnología adquiere un papel fundamental en la enseñanza de la geometría. Las herramientas de geometría dinámica proporcionan una modelización de gran diversidad de figuras de dos y tres dimensiones y permiten una manipulación sencilla, facilitando entornos de trabajo e infinidad de ejemplos para enunciar y probar conjeturas, lo que favorece el aprendizaje de la generalización y demostración (NCTM, 2001).

Conectando los conceptos geométricos

En este sentido, y para resaltar la funcionalidad de las descripciones geométricas para comunicar información sobre las formas del espacio, se pueden utilizar tareas como la presentada en el trabajo de Gutiérrez et al. (2018) que se describe a continuación.

La tarea consistía en ubicar unos determinados edificios en la plantilla de la Figura 4. Los estudiantes trabajaban colaborativamente por parejas. El jugador A tenía la información de la Figura 5, correspondiente a dos perspectivas de los edificios y algunas pistas. Del mismo modo el jugador B disponía de la información de otras dos perspectivas y otras pistas diferentes (Figura 6). Los jugadores podían intercambiar todo tipo de información verbalmente, pero no podían enseñar al compañero sus perspectivas. El objetivo era colocar los edificios en la cuadrícula y justificar la existencia y unicidad de la solución.

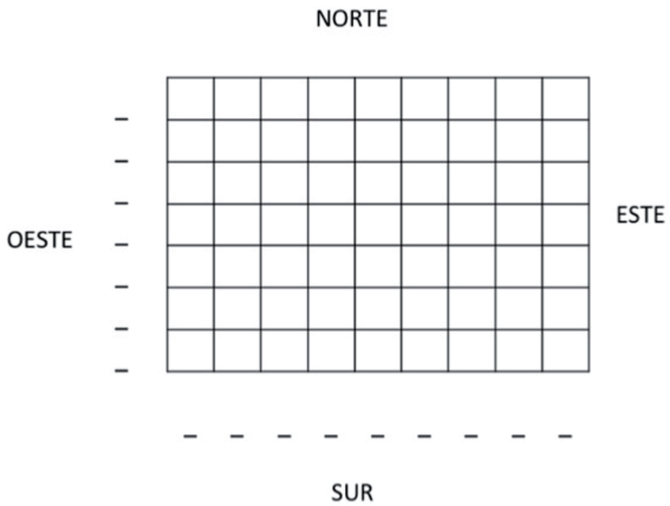
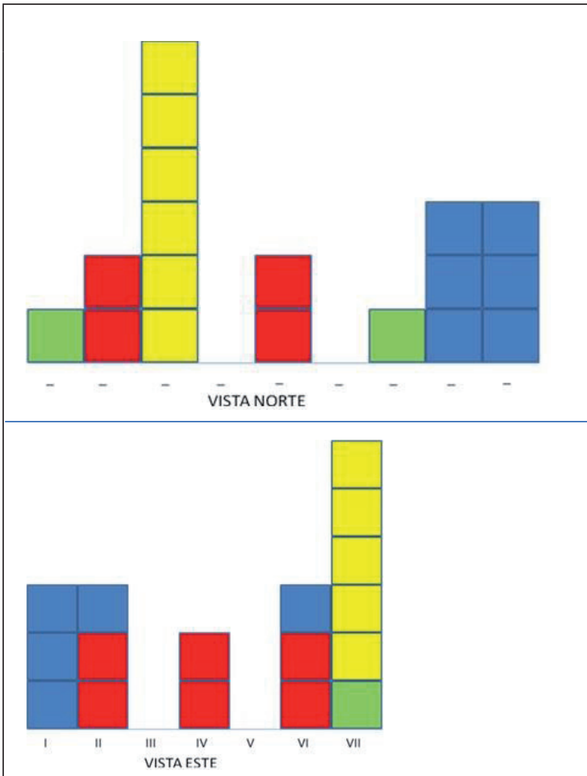


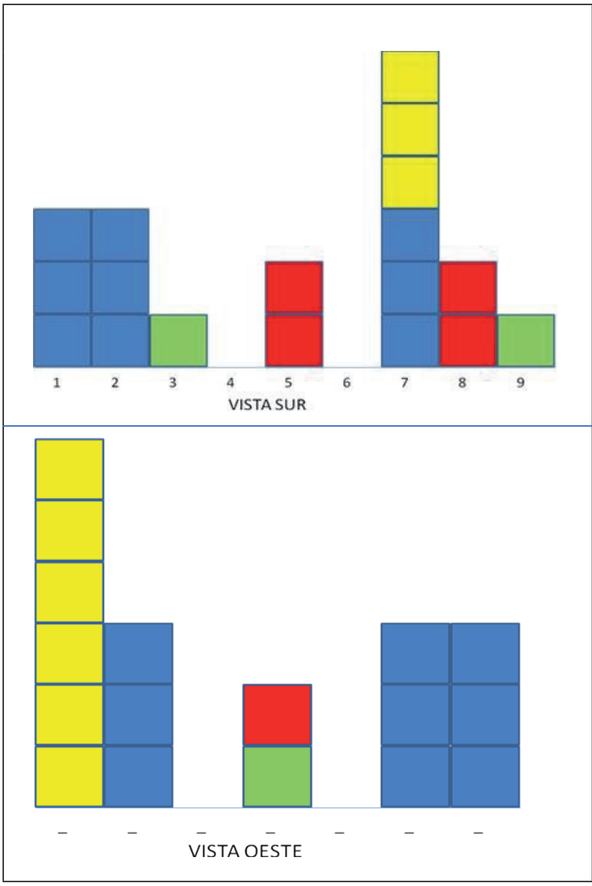
Figura 4. Plantilla para ubicar los edificios (Gutiérrez et al. 2018)



El nombre de las calles horizontales (las que van en dirección oeste-este) son números romanos desde el I hasta el VII, ordenadas de manera creciente desde el sur hasta el norte.
Cuando un edificio ocupa un cuadrito, no hay otro edificio en ningún cuadrito que tenga un lado o un vértice en común con él.

Hay un total de 9 edificios.
Los azules tienen tres plantas
Conoces las perspectivas de los edificios desde el norte y desde el este

Figura 5. Información del Jugador A en el problema de los edificios (Gutiérrez et al., 2018)



El nombre de las calles verticales (las que van en dirección norte-sur) son números desde el 1 hasta el 9, ordenadas de manera creciente desde el oeste hasta el este.
Los edificios coinciden con cuadrados de la cuadrícula. Están separados, no se tocan en ningún punto y los edificios de la misma altura tienen el mismo color.
Hay edificios de cuatro colores:
Tú sabes que hay un edificio amarillo, dos verdes y tres rojos
Conoces las perspectivas de los edificios desde el sur y desde el oeste

Figura 6. Información del Jugador B en el problema de los edificios (Gutiérrez et al., 2018)

Las respuestas de los estudiantes mostraron distintas habilidades de visualización según varias fases como la colocación de los edificios, la comunicación de la información o la comprobación de las vistas. Los estudiantes de mejor rendimiento manifestaron importantes elementos de la visualización como los procesos para transformar información de representaciones visuales en verbales y viceversa, sistemas de referencia y habilidades de visualización y orientación.

Conectando el sentido espacial con otros sentidos

Para ejemplificar cómo conectar el sentido espacial con otros sentidos presentamos la siguiente tarea: ¿Qué polígonos regulares pueden obtenerse al cortar un cubo por un plano?

En niveles inferiores se pueden abordar versiones simplificadas de esta pregunta, como trabajar secciones de diferentes objetos utilizando bloques de plastilina y secciones de objetos familiares (rebanadas de pan, rodajas de embutido…). En Educación Primaria se puede trabajar secciones de cuadrados y rectángulos e identificar los cortes de las caras en el desarrollo plano. En esta tarea intervienen las habilidades de visualización para percibir la figura-contexto y las relaciones espaciales. Estas habilidades conectan los conocimientos geométricos relativos a los conceptos con las propiedades que se visualizan. Además de razonar con las representaciones obtenidas, se puede favorecer la conexión con otros sentidos al pedirles que justifiquen más allá de lo obtenido empíricamente e intentar argumentar para el caso general. Por ejemplo, ¿Qué sección rectangular tiene mayor área? En la Figura 7 pueden argumentar sobre la mayor longitud de los lados en los rectángulos obtenidos, comparándolos con la longitud de la diagonal de la cara del cubo e incluso compararlos aplicando movimientos.

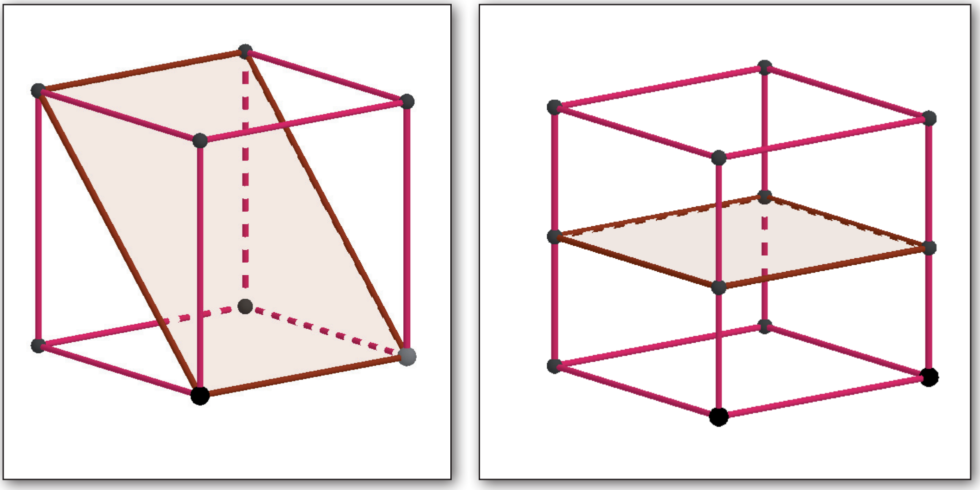


Figura 7. Comparaciones de áreas de rectángulos obtenidos por secciones planas de un cubo

En cursos superiores se pueden plantear cuestiones relativas a justificaciones, por ejemplo, ¿cuándo la sección es el rectángulo con mayor área? ¿Es posible obtener un paralelogramo que no sea un rectángulo? Para abordarlas el estudiante puede utilizar distintas representaciones, como dibujos en perspectiva o desarrollos planos, además de modelos físicos que les permita explorar y visualizar propiedades empíricamente. Los argumentos analíticos y la notación algebraica pueden apoyarse en las representaciones visuales y aportar generalidad.

En Educación Secundaria se pueden utilizar distintas representaciones para reconocer las propiedades de las secciones. Para motivar que es posible obtener un hexágono regular, se pueden marcar los puntos (Figura 8) y pedirles que justifiquen si están en un mismo plano. Los argumentos pueden ser variados, desde los más visuales a los más algebraicos: ver que todos los puntos se obtienen girando uno de ellos respecto al centro del cubo y un eje perpendicular al plano, aplicando simetrías u obteniendo las coordenadas de los puntos. La imposibilidad de obtener pentágonos regulares conjuga la visualización con razonamientos analíticos sobre las propiedades de las secciones planas de un cubo como que los lados en caras paralelas son paralelos, y por tanto no pueden ser los lados de un pentágono regular. Además, el hecho de que no puede tener más de seis lados, imposibilita la obtención de polígonos de más de seis lados.

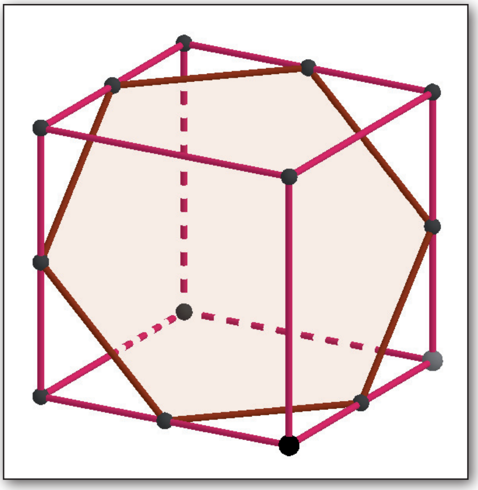


Figura 8. Hexágono regular como sección plana de un cubo

Sentido estocástico

Las actividades que deben favorecer el desarrollo del sentido estocástico en secundaria tienen que anclarse en los aprendizajes previos del alumnado que le habría capacitado para iniciarse en el estudio de datos contextualizados y reconocer la incertidumbre inherente cuando se estima una población mediante una muestra significativa y cercana a sus intereses que les permita realizar las primeras inferencias, predicciones o tomas de decisiones. En esta etapa, deberán avanzar en el desarrollo de dichas capacidades a partir de la reflexión sobre cómo las investigaciones estocásticas aportan sentido a la variabilidad, predictibilidad e incertidumbre a la muestra de datos estudiada. Particularmente, la necesidad actual de formar ciudadanos críticos que dispongan conocimientos que les permitan interpretar, seleccionar y comunicar información, requiere un desarrollo y manejo de conocimientos estocásticos, esto implica la necesidad de una comprensión de los principios del proceso inferencial y una concientización de los riesgos de ignorar la variabilidad (Behar y Grima Cintas, 2003).

El alumnado debe desarrollar, a través de las actividades, actitudes de curiosidad por el mundo que le rodea y que lleva a las personas a hacerse preguntas que permiten desarrollar las competencias globales, como el pensamiento creativo y crítico.

Por ejemplo:

> Un grupo de alumnos decide iniciar una campaña de sensibilización ambiental acerca de las maneras que contribuye su centro a la gestión de residuos y la contaminación a escala local y global (OECD, 2018).

El inicio de la campaña podría partir del estudio: *¿cómo se gestionan los residuos en el centro?*

Aunque esta pregunta está contextualizada, no es una "buena pregunta de investigación". Una buena pregunta de investigación es aquella que permita una rica exploración de los datos en cuestión, el descubrimiento y el pensamiento estadístico (Arnold y Pfannkuch, 2018).

Por ello, en los primeros niveles de la etapa, el profesorado debe orientar al alumnado para que plantee preguntas de investigación ricas. Es decir, preguntas en las que las variables de interés son claras y están disponibles, la población (o muestra) de interés es clara, la intención de la pregunta es clara, la pregunta puede responderse con los datos, la pregunta merece la pena ser investigada, tiene un propósito y la pregunta permite hacer un análisis de toda la muestra.

Es decir, un primer acercamiento a la respuesta de la pregunta anterior podría ser la elaboración de una encuesta a realizar en el centro con preguntas como:

> ¿Tiras al suelo desperdicios, envoltorios o basura?
> ¿Tiras al contenedor adecuado los envases, papeles, vidrio, pilas, ...?
> ¿Traes el desayuno en un envase de usar y tirar?

El alumnado a la par que desarrolla la capacidad de interrogar se ve involucrado en diferentes ciclos de investigación que permite desarrollar la capacidad de formular preguntas, reconocer la necesidad de los datos, la variabilidad de los mismos y la incertidumbre inherente. En los últimos años de la etapa de secundaria deben ser capaces de reflexionar sobre la idoneidad de las preguntas que se plantean. Por ejemplo, participando en actividades como:

Para cada una de las preguntas, razona si es rica para llevar a cabo una investigación estadística:

a) ¿Tienen las chicas brazos más largos que los chicos?
b) ¿Quién tiene el peroné más largo?
c) ¿Cuáles son las longitudes típicas del cuello del alumnado?
d) ¿Cuál es el deporte más popular que se practica?

La actividad, adaptada de la investigación llevada a cabo por Arnold y Pfannkuch (2018) sobre el estudio de preguntas de investigación, debe permitir identificar que: no está definida la población (o muestra) que se estudia, que las preguntas tienen diferentes propósitos (el estudio de la anatomía y los deportes que se practican), que la respuesta de la pregunta b solo incluye un individuo, etc.

El diálogo sobre la adecuación de dichas preguntas, les permitirá pensar como estadísticos al plantearse cuestiones de carácter teórico. Por ejemplo:

> ¿cómo los diferentes elementos de un ciclo de interrogación (generar, buscar, interpretar, criticar y juzgar) inciden en el desarrollo del ciclo de investigación (problema, plan, datos, análisis, conclusiones)?

Por ello, Gould et al. (2017) sugieren que el planteamiento y análisis de preguntas de investigación es fundamental para el éxito en el análisis, la interpretación y la extracción de conclusiones de los datos. Si bien el alumnado de primaria ya debe haberse iniciado en el estudio de datos, se propone que las actividades de secundaria favorezcan el análisis exploratorio de la distribuición de los datos a partir de la visualización y representación de gráficos y el cálculo de medidas de centralización y dispersión para comparar variables. Sin embargo, este análisis exploratorio no debe reducir la estadística al cálculo de las medidas de centralización y dispersión descontextualizadas del proceso de investigación (CeMAT, 2021). Así pues, proponemos actividades que capaciten al alumnado para calcular y otorgar sentido a los paràmentros de posición, centralización y dispersión, mediante situaciones como:

> El I.E.S. Antonio Muro premia cada curso escolar al mejor alumno o alumna de 4º de secundaria en función de las calificaciones de sus asignaturas. Por ello, desde dirección les han solicitado a los representantes de las cinco clases que establezcan los criterios para elegir cuál es el/la mejor, tomen la decisión de cuál es el mejor candidato en función de estos criterios y redacten el acta de concesión de un premio.
> Si solo saben las calificaciones de cinco candidatos, ¡ayúdales a realizar el encargo de dirección!
> Candidato 1: 9,5; 9,5; 9,5; 9,5; 9,5; 9,5; 9,5; 9,5; 9,5; 9,5
> Candidato 2: 9,0; 9,1; 9,2; 9,3; 9,4 ;9,6; 9,7; 9,8; 9,9; 10
> Candidato 3: 9,0; 9,0; 9,1; 9,2; 9,3; 9,7; 9,8; 9,9; 10; 10
> Candidato 4: 9,0; 9,1; 9,2; 9,4; 9,4; 9,6; 9,6; 9,8; 9,9; 10
> Candidato 5: 9,0; 9,1; 9,2; 9,2; 9,4; 9,6; 9,8; 9,8; 9,9; 10

La actividad está propuesta para que el alumnado deba plantearse cuestiones que guíen su toma de decisiones. En su inicio, pueden calcular los parámetros de centralización y posición. Pero, los datos están preparados para que: (a) si proceden a un análisis de la centralización de los datos todos tengan la misma media; (b) del análisis de los parámetros de posición concluyan que todos tienen la misma mediana y cuatro de ellos tienen la misma calificación mínima y máxima. Al no poder concluir y tomar decisiones con estos parámetros, el alumnado debe plantearse el análisis de la densidad de los datos, concluyendo que cuatro de ellos tienen la mayoría de calificaciones entre el segundo y tercer cuartil. Al no poder tomar decisiones, deben formular preguntas e hipótesis asociadas a la dispersión de los datos y a la consideración académica de quién es el mejor alumno o alumna (el que tenga las calificaciones más o menos dispersas). Si abogan por la constancia del alumnado entonces tomarán la decisión de que la mejor opción es la 1, ya que su rango, desviación media y típica es cero. Por el contrario, si abogan por alumnos o alumnas con una mayor dispersión y mayor valor en el tercer cuartil, entonces tomarán la decisión de que la mejor opción es la número 2. En este caso, sugerimos que el alumnado use *GeoGebra* para construir un diagrama de cajas y bigotes que le permitirá comparar las cinco distribuciones de datos a la par que valoran cómo la forma de la distribución está influenciada por diferentes aspectos y, a su vez, sintetiza la información de los parámetros de centralización, posición, dispersión y los intervalos de mayor densidad. Es más, debe permitir que el alumnado construya la idea de la distribución como entidad conceptual que surge de la integración de los conceptos de centro, distribución, densidad y simetría (Bakker y Gravemeijer, 2004).

Este tipo de actividades favorece que el alumnado se inicie en la realización de inferencias informales sobre cuál es la mejor candidatura ya que se encuentran bajo dos hipótesis para tomar la decisión: dispersión nula o máxima dispersión de calificaciones. Sin embargo, no podemos hablar de inferencia en sentido estricto, dado que la inferencia a una población contiene elementos de incertidumbre, las inferencias estadísticas deben contener un lenguaje probabilístico que implique una tendencia estadística y/o un nivel de confianza o incertidumbre en una predicción. Así pues, es interesante que en este proceso de crecimiento que supone la etapa de secundaria el alumnado realice predicciones con muestras grandes de datos que permitan concluir sobre la población en cuestión. Un ejemplo, sería plantear la investigación:

> ¿Está envejeciendo la población europea?

El uso de la base de datos *EuroStat* proveerá de tablas y gráficos para analizar las tendencias de crecimiento de la población y las predicciones que realiza dicho organismo. Este problema, se podría reducir a investigar:

> ¿Cuáles son las tendencias de proyección de la población europea en función de las variables edad y género?

Las tablas de datos, los gráficos y mapas europeos se pueden encontrar en la base de datos de *EuroStat* (https://ec.europa.eu/eurostat/data/database), y facilitarán la interpretación y conclusiones de las mismas para dar respuesta al interrogante. El trabajo con estas bases de datos reforzará la comprensión de la utilidad de los censos de población y los procesos de muestreo estratificado y aleatorio. Es más, este tipo de actividades es una herramienta pedagógica útil para sensibilizar e introducir lentamente al alumnado en la variabilidad decreciente de las señales aparentes de las distribuciones en muestras de tamaño creciente (Ben-Zvi et.al., 2012). El software permite realizar diferentes tipos de predicciones asociadas a otras variables como la baja o alta tasa de natalidad, la alta o baja tasa de mortalidad. Así pues, el alumnado puede asociar ciertas tendencias de proyección a otras variables. Esta asociación puede ser un motivador a la necesidad de analizar la correlación existente entre variables. En este mismo problema de investigación sobre si está envejeciendo la población europea, se pueden responder preguntas como:

> Considerando los condicionantes de salud en el envejecimiento de la población europea, ¿existe alguna correlación entre la salud auto-percibida del sujeto a cierta edad y la esperanza de vida saludable que tenga?

El diagrama de dispersión como el gráfico de burbujas que se pueda construir son muy útiles para interpretar la relación entre las variables en estudio, ya que permite visualizar su intensidad (a través de la mayor o menor dispersión de la nube de puntos), su sentido (si la relación es directa o inversa) y el tipo (lineal o no), observando su tendencia (Gea et al., 2014).

Podríamos ir más allá y, con el fin de profundizar en los modelos matemáticos, otorgar al mismo tiempo sentido matemático y algebraico a dicha investigación y ver cuál es la mejor modelización funcional. Ejemplos de estas actividades, ya sugeridas en los marcos teóricos PISA2018 para el desarrollo de la competencia globalizada (OCDE, 2018), son:

> ¿Son las funciones lineales o las exponenciales las que ajustan mejor a los datos de crecimiento de la población europea?
> ¿Cuál es el mejor modelo de regresión que ajuste la edad y las tasas de fecundidad por edad en Europa?

La variabilidad aleatoria se manifiesta mediante la dispersión de la nube de puntos respecto al modelo de regresión. Así pues, el modelo de regresión tendrá como principal finalidad la predicción de una de las variables en función de la otra, y la evaluación de la variabilidad latente en los datos. Posteriormente, esta "variabilidad" de los puntos alrededor del modelo se medirá mediante la covarianza y el coeficiente de correlación (Gea et al., 2014). Permitiendo así que el alumnado identifique una nueva fuente de aleatoriedad y no reducir exclusivamente su estudio en contextos de juegos.

El contexto de los juegos de azar ha sido tradicionalmente una fuente de experiencias para reconocer la naturaleza aleatoria de la situación y la medición de la incertidumbre mediante la asignación de probabilidades. El GAISE II report (Bargagliotti et al., 2020) propone dos actividades:

1. *Asume que el dado no está trucado. Si lanzamos el dado 10 veces, ¿cuántas veces veremos el número 2 en la cara superior?*
2. *Asume que el dado no está trucado. Si lanzamos el dado 10 veces, ¿cuál es la probabilidad de que en cada lanzamiento el valor de la cara superior sea el número 2?*
3. *Coge un dado, ¿está trucado? Es decir, ¿tiene cada cara la misma probabilidad de aparición?*

La respuesta a la pregunta 1 tiene un acercamiento meramente matemático en el sentido que parte de la afirmación que el dado no está trucado y podemos asumir que salir cada uno de los posibles valores de un dado es equiprobable. Es cierto que tal y como está enunciado el problema su respuesta se reduce a la determinación del espacio muestral y la contabilización del número de sucesos que sea dos en la cara superior.

El espacio muestral determinado en el problema 1, permite resolver el problema 2 calculando la probabilidad aplicando la regla de Laplace al considerar que todos los sucesos elementales son equiprobables al ser un dado justo. Si en lugar de considerar las actividades como una secuencia de aprendizaje, el problema 2 se presenta de forma aislada dicho problema se resuelve considerando la independencia de los sucesos correspondientes a cada uno de los lanzamientos y la equiprobabilidad de los sucesos elementales correspondientes al lanzamiento de un único dado.

Sin embargo, el problema 3 es un problema con un acercamiento estadístico, en que llegamos a las conclusiones pertinentes a través de resultados experimentales. La solución del problema comienza con un dado desconocido, del que no sabemos si está trucado o no. La búsqueda de una respuesta experimental debería pasar por varias fases: (a) se tira el dado, se ve lo que ocurre para examinar los datos resultantes para ver si parecen proceder de un dado trucado o no. Este análisis es interesante ya que el alumnado puede desarrollar el sentido de la aleatoriedad pero caer en la tentación de pensar en patrones reiterados asociados a una muestra inadecuada, (b) se tira el dado 10 veces, para elaborar las primeras hipótesis que guiarán el estudio inferencial de las tendencias (H0: el dado está trucado, H1: el dado no está trucado), (c) repetir el proceso de lanzar el dado, ahora 100 veces, y notar las frecuencias relativas de las tiradas con números pares para cada una de estas 100 pruebas, (d) comparar los resultados de estas frecuencias relativas con las frecuencias predichas por el modelo matemático que se ha trabajado en el problema 1 para la hipótesis H1 y, (e) si las frecuencias relativas empíricas son bastante diferentes de las probabilidades numéricas para un dado no trucado y no es probable que se deba a la variabilidad azarosa, entonces podemos concluir que el dado está trucado (Bargagliotti et al., 2020).

Estas dos actividades permiten que el alumno se enfrente a la comprensión de la probabilidad desde un punto de vista frecuencial y el clásico. Es más, en el significado frecuencial, la probabilidad se estima a partir de la frecuencia relativa de aparición del suceso, apoyándose en la ley de los grandes números. Las ideas de representatividad y variabilidad muestral están implícitas en este significado, y la precisión de la estimación de la probabilidad depende del tamaño de la muestra (Begué et al., 2018)

Se da por sentado, que el experimento del lanzamiento del dado se puede dar exactamente en las mismas condiciones. Sin embargo, en la mayoría de situaciones a modelizar el alumnado se debe enfrentar a situaciones en que el experimento no es repetible o no se puede repetir en las mismas condiciones. Pensemos en la actividad:

> Estamos organizando en el centro escolar una salida al campo para el próximo mes, ¿debemos poner un paraguas o impermeable en la mochila?

La cuestión que plantea una situación cotidiana que responde a un fenómeno aleatorio que tiene por finalidad que el alumnado trabaje la predictibilidad, analice la incertidumbre asociada al fenómeno meteorológico y realice inferencias para que pueda tomar la decisión de poner o no un paraguas o impermeable en la mochila. Para su resolución, podemos partir del estudio del grado de creencia que el día previsto para la salida al campo llueva. El recuento entre todo el alumnado nos permitiría dar una aproximación a la probabilidad subjetiva. En un segundo momento, se podrían investigar diferentes fuentes de datos (servicios meteorológicos, apps, ...). El hecho que puedan aportar datos diferentes puede ser un motivo para analizar la calidad y cantidad de datos para realizar dichas predicciones. Así como, las diferentes variables que estudian para realizar dichas predicciones. En particular, los datos que aportan sobre la "probabilidad de lluvia". Los datos observados de años anteriores permitirían un estudio de la distribución de los mismos y realizar estimaciones sobre la proporción de días lluviosos y no lluviosos. Además, se podría realizar el estudio de las tendencias en intervalos de tiempo y reflexionar sobre si la estimación a través de la observación de estas tendencias tiene una fiabilidad alta o no.

En resumen, esta pregunta tan simple por su cotidianeidad, permite que el alumnado realice inferencias estocásticas no formales, consistentes en: (1) la generalización, incluyendo predicciones, estimaciones de parámetros y conclusiones, que van más allá de la descripción de los datos; (2) el uso de los datos como prueba de estas generalizaciones; y, (3) el empleo de un lenguaje probabilístico de la generalización, incluida la referencia informal a los niveles de certeza sobre las conclusiones extraídas (Makar y Rubin, 2028).

Sentido de la medida

El aprendizaje de una magnitud y su medida sigue resultando difícil para el alumnado de educación secundaria, por ello debemos prestarle especial atención a lo largo de toda la enseñanza obligatoria, por las dificultades que este aprendizaje conlleva y por la importancia que la magnitud y su medida tiene en la vida cotidiana.

El aprendizaje de la medida implica ir más allá de la mera medida de una magnitud, del uso de fórmulas o de la utilización mecánica del sistema métrico decimal. Según Piaget en el caso de las magnitudes y de su medida el alumnado debe superar diferentes estadios que le llevará a conocer y manejar estas nociones de forma correcta. Estos estadios y su relación se muestran en el esquema que presentamos a continuación (Figura 9).

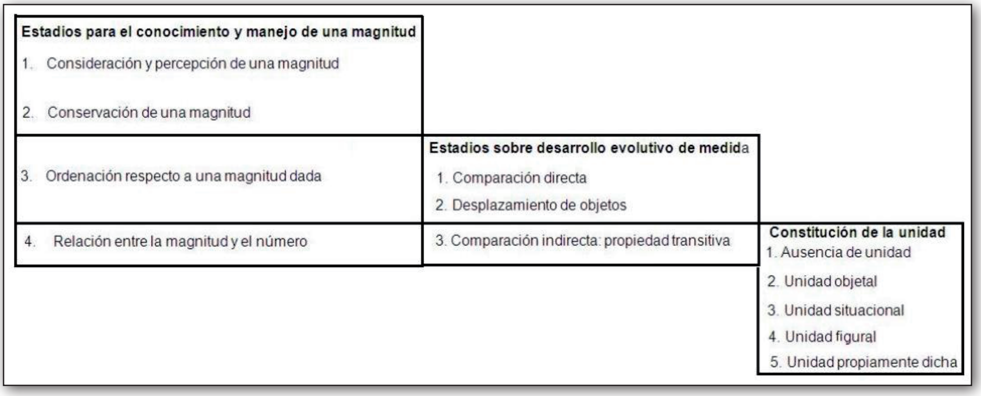


Figura 9. Adaptación de los Estadios de Piaget para el conocimiento de una magnitud y su medida (Sánchez-Matamoros, et. al., 2016)

También deben conocer y dominar técnicas e instrumentos de medida que se pueden emplear para medir de manera directa (longitud, superficie, amplitud, masa, volumen, capacidad y tiempo) o bien de manera indirecta (medidas basadas en proporcionalidad, en las relaciones entre magnitudes y en estrategias de estimación).

Proceso de enseñanza y de aprendizaje de una magnitud y su medida en educación secundaria

El proceso de enseñanza y de aprendizaje debe apoyarse en la idea de una trayectoria de aprendizaje de la magnitud y su medida, es decir, conocer cómo se desarrolla la comprensión de la magnitud y su medida para poder tomar decisiones de enseñanza adecuadas a los objetivos de aprendizaje. Apoyarse en una trayectoria de aprendizaje en la planificación e implementación de una lección facilitará al profesorado la interpretación y diagnóstico de posibles dificultades del alumnado en la adquisición de un determinado contenido matemático (Wilson, Mojica y Confrey, 2013), en nuestro caso, la noción de magnitud y su medida.

Una trayectoria de aprendizaje tiene tres componentes (Clements y Sarama, 2004):

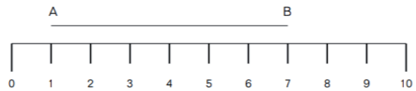
– Un objetivo de aprendizaje.
– La descripción de un proceso de aprendizaje: niveles de desarrollo de la comprensión, obstáculos que deben ser superados.
– Un conjunto de tareas.

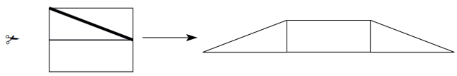
En el aprendizaje de una magnitud y su medida, el alumnado debe distinguir entre magnitud y medida. La magnitud es considerada como una característica de un objeto que puede ser cuantificable, y medir es asignar un valor numérico a un atributo de un objeto, por ejemplo, a la duración de un suceso, a la longitud de un lápiz o a la capacidad de una piscina. Medir una magnitud conlleva reconocer una unidad de medida (Freudenthal, 1983).

El aprendizaje de una magnitud y su medida comienza realizando comparaciones cualitativas y ordenando objetos según la magnitud considerada. El siguiente logro implica cuantificar la magnitud mediante la asignación de un valor numérico, y luego utilizar instrumentos de medición, por ejemplo, la regla en el caso de la magnitud de longitud.

Sin embargo, debemos ser conscientes de que algunas investigaciones (Tabla I) indican que el alumnado de educación secundaria muestra dificultades en el aprendizaje de diferentes magnitudes y su medida, como en el uso de la regla en la medida de la magnitud longitud o en la conservación de las áreas en figuras con distintas formas (Hart et al., 1981).

Tabla I. Ejemplos de tareas de medidas de las magnitudes longitud y superficie de la investigación de Hart et al. (1981) y posibles respuestas de estudiantes mostrando diferentes características de comprensión

<table>
<tr><td colspan="2">Tipo de tarea: De Manejo de instrumentos de medida (regla): uso y lectura</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td>Respuesta del estudiante 1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">¿Cuánto mide el segmento AB?
</td><td>El segmento AB mide 6 cm. Porque el extremo A del segmento está situado en 1cm de la regla graduada, y el extremo B en 7cm de la regla graduada</td></tr>
<tr><td>Respuesta del estudiante 2</td></tr>
<tr><td>El segmento AB mide 7 cm., porque el extremo B del segmento está sobre el 7 de la regla graduada</td></tr>
<tr><td colspan="2">Análisis de las respuestas: dificultades de los estudiantes</td></tr>
<tr><td colspan="2">El estudiante 1, hace un uso correcto del instrumento de medida de la longitud (regla) al considerar que el extremo derecho del segmento (B) se encuentra en los 7 cm. de la regla, y el extremo izquierdo del segmento (A) se encuentra en 1 cm. de la regla. Esto le ha permitido percibir la medida de la longitud del segmento AB y dar una respuesta correcta.
El estudiante 2, tiene dificultades para hacer un uso correcto del instrumento de medida de la longitud (regla) al considerar sólo que el extremo derecho del segmento (B) se encuentra en los 7 cm. para responder.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Tipo de tarea: De comparación de superficie de objetos (Reconocimiento de la equivalencia de superficies)</td></tr>
<tr><td>Ejemplo 1</td><td>Respuesta del estudiante 1</td></tr>
<tr><td rowspan="4">¿Tiene la figura inicial y final la misma cantidad de superficie (área)?
</td><td>Si, porque he obtenido la figura final cortando la figura inicial por la mitad y a continuación una de las dos mitades en las que he dividido la figura, la he vuelto a cortar, ahora por la diagonal, y los dos triángulos que he obtenido los he pegado uno a cada lado de la otra mitad que dejé sin cortar.
Porque dos superficies son equivalentes si una superficie puede descomponerse en los mismos trozos que la otra.</td></tr>
<tr><td>Respuesta del estudiante 2</td></tr>
<tr><td>No, porque la figura inicial es más alta, y la figura final es más larga y estrecha.</td></tr>
<tr></tr>
<tr><td colspan="2">Análisis de las respuestas: dificultades de los estudiantes</td></tr>
<tr><td colspan="2">El estudiante 1 hace transformaciones del tipo cortar mover y pegar que le permiten percibir que la cantidad de superficie (área) de la figura inicial y final es la misma (Conservación de la magnitud superficie) y dar una respuesta correcta.
El estudiante 2 tiene dificultades para establecer que figuras de formas diferentes pueden ser equivalentes en cantidad de superficie (área).</td></tr>
</table>

Las dificultades mostradas por los estudiantes en estas tareas deben ser tenidas en cuenta en la planificación de la enseñanza pues un mal uso en el instrumento de medida de la longitud puede conllevar dificultades en áreas y volúmenes en figuras planas y tridimensionales, en las representaciones planas de objetos tridimensionales para su visualización y resolución de problemas de áreas, o en las representaciones de objetos geométricos con propiedades fijadas, como las longitudes de los lados o las medidas de los ángulos (España, Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022 Pág. 41733). Y dificultades similares a la mostradas por el estudiante en la comparación de superficies en las que le influye la forma de la figura para apreciar la equivalencia de cantidad de superficie pueden darse en relación con otras magnitudes como, por ejemplo, la capacidad en las que la forma del recipiente puede influir. Además, el hecho de saber descomponer figuras planas, como en este caso un trapecio isósceles, en figuras de áreas conocidas como rectángulo y triángulos podrán favorecer que los estudiantes sean capaces de deducir cuál es el área de la figura inicial (trapecio) y aplicarlo en nuevas situaciones.

Para finalizar, indicar que las diferentes magnitudes y su medida aparecen frecuentemente cuando se aborda en el aula de Matemáticas problemas realistas, o en trabajos interdisciplinares. Por ello, se puede considerar el sentido de la medida como un contexto excepcional para apreciar la utilidad de las Matemáticas.

Así, en el currículo de educación secundaria en la materia de Física y Química se menciona la predicción y comprobación, utilizando la experimentación y el razonamiento matemático, de las principales magnitudes, ecuaciones y gráficas que describen el movimiento de un cuerpo, relacionándolo con situaciones cotidianas (España, Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022 Pág. 88-89). Analizando la relación existente entre las Matemáticas y la Física, observamos que problemas concretos de Física, como pueden ser aquellos de Cinemática (rama de la Física que estudia el movimiento, sin tener en cuenta las causas que lo produce), han sido cruciales en el desarrollo histórico de las Matemáticas (Azcárate, 1984).

Generalmente, las dificultades de las Matemáticas en los contextos de Física se suelen vincular a la falta de habilidades para transferir el conocimiento de Matemáticas a las clases de Física (Redish y Kuo, 2015). Sin embargo, también es cierto que nuestro sistema educativo tampoco favorece que el estudiante pueda llegar a establecer dicha relación. Así, conceptos de Cinemática como son velocidad media (vinculado a la Tasa de Variación Media (TVM) en Matemáticas), velocidad instantánea (vinculado a la Tasa de Variación Instantánea (TVI) y a la derivada de una función en Matemáticas) o la aceleración (vinculado a la segunda derivada de una función en Matemáticas) comienzan a estudiarse en la Educación Secundaria Obligatoria (13-14 años) en la asignatura de Física. Sin embargo, el concepto de Derivada no se introduce en la asignatura de Matemáticas hasta primero de Bachillerato (16- 17 años). Esto conlleva, que a los estudiantes les resulte muy complejo establecer la relación de los conceptos de velocidad y aceleración con los de espacio y tiempo, y esto los lleva a tener problemas a la hora de enfrentar enunciados de Mecánica (Azcárate, 1984). Este hecho se pone de manifiesto, en algunas ocasiones, cuando los estudiantes tienen dificultades en las medidas basadas en las relaciones entre magnitudes como espacio y tiempo o en estrategias de estimación.

Sin embargo, y si tenemos en cuenta lo que recoge el Real Decreto 217/202, de 29 de marzo por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria, en Matemáticas se debe prestar atención al estudio gráfico de funciones en contextos de la vida cotidiana y a las tasas de variación absoluta, relativa y media (España, Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022 Pág. 41738). Por tanto, la posibilidad de que en clase de Matemáticas se planteen problemas contextualizados en Cinemática, facilitará que el estudiante empiece a establecer relaciones entre Matemáticas y Física desde la Educación Secundaria Obligatoria. Así, un ejemplo de problemas que se podrían abordar en clase de Matemáticas son los relativos a la tasa de variación media (T.V.M.) contextualizada en Física en la velocidad media en diferentes modos de representación analítico y gráfico (Figura 10). Las relaciones que se establecen entre las Matemáticas y la Física en la resolución de este tipo de problemas pueden observarse en la medida en la que los estudiantes identifican las dos magnitudes covariantes e interpretan el significado físico de lo que le piden, es decir, de la velocidad media. Además, los estudiantes deben mostrar que son capaces de trabajar con las tres magnitudes (posición, tiempo y velocidad) haciendo uso de las unidades de medida correspondientes a estas magnitudes.

Así, en la resolución de las dos tareas de la figura 10 el estudiante deberá asociar la velocidad media pedida (contexto físico) con la T.VM. (contexto matemático) en cada intervalo en la tarea 1, o con la pendiente de la línea secante en la tarea 2. El estudiante usará la tabla de valores del enunciado (posición-tiempo), en la tarea 1, o los puntos de la gráfica, en la tarea 2, para resolver el problema, dando como resultado el valor numérico de la velocidad media expresada en "m/s" como unidad de magnitud en cada uno de los intervalos de tiempo que aparecen en los enunciados de estas tareas. Además, tanto los datos de la tarea 1 como los de la tarea 2, no se corresponde con un movimiento rectilíneo uniforme ni con un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, que son los tipos de movimientos estudiados en Física por estos estudiantes, por lo que estos no podrán usar ninguna de las fórmulas aprendidas para resolverlos, teniendo que hacer uso del significado de TVM en el modo de representación analítico (tarea 1) o gráfico (tarea 2) en el contexto de Cinemática.

TAREA 1:

Indica la velocidad media de un móvil que se mueve en una única dimensión en los intervalos temporales [0,10], [10,20], [20,30] y [0,40] a partir de su posición en los distintos momentos:

Tiempo [s]	0	1 0	20	30	40
Posición [m]	0	33	41	56	100

TAREA 2:

A) *Indica la velocidad media de un móvil que se mueve en una única dimensión en los siguientes intervalos temporales:*

De 0 a 17 segundos.

De 0 a 11 segundos.

De 0 a 5 segundos.

De 0 a 2 segundos.

B)

a) *¿Hay algún intervalo dónde la velocidad media es nula? Si lo hubiera dibújalo sobre la gráfica. Justifica tu respuesta.*

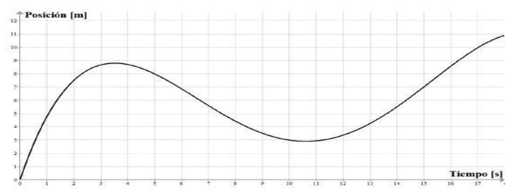


Figura 10[2]. Tareas relativas a la tasa de variación media contextualizadas en Física (Bermejo-Luna y Sánchez-Matamoros, 2021)

2. Estas tareas analizadas han sido publicadas en: Bermejo-Luna, M.V., y Sánchez-Matamoros García, G. (2021). Evidencias de conocimiento entre Matemáticas y Física sobre velocidad media. *Revista Chilena de Educación Matemática, 13*(1), 5-16.

En la gestión de aula, el uso del Geogebra como recurso informático para resolver diferentes tipos de tareas puede ser de gran utilidad, al facilitar a los estudiantes la coordinación entre los modos de representación (analítico y gráfico).

Sentido Numérico

El sentido numérico tiene la base teórica en las siguientes capacidades generales:

– Comprender los números, sus representaciones, relaciones entre números y las propiedades del sistema de numeración.
– Conocer los significados de las operaciones y cómo se relacionan.
– Realizar cálculos con fluidez y realizar estimaciones razonables.

Estas capacidades al interpretarse en los saberes que se integran en el currículo pueden trabajarse como se sugiere a continuación.

Habilidad para realizar cálculos mentales con estrategias "inventadas"

La habilidad para realizar cálculos mentales puede abordarse en el aula presentando, en primer lugar, las operaciones de fracciones y a continuación se le pide al alumnado que dé una respuesta en el tiempo indicado. Posteriormente, se les pide que razonen cómo han llegado a su respuesta. Esta segunda parte da pie a que afloren las estrategias inventadas por los estudiantes y que el docente proponga otras.

¡Estimaciones en 5 segundos!	¡Estimaciones en 10 segundos!
$\frac{7}{8}+\frac{1}{10}$ $>$ ó $<$ 1?	$\frac{3}{2}-\frac{3}{4}$ $>$ ó $<$ 1?
$\frac{1}{4}+\frac{4}{5}$ $>$ ó $<$ 1?	$\frac{3}{4}-\frac{1}{3}$ $>$ ó $<$ $\frac{1}{2}$?

Discernir en qué ocasiones se ha de dar un valor exacto y cuándo es posible dar un valor aproximado. Actividades que favorezcan el uso de referentes para realizar estimaciones

Se plantea una actividad para que estimen cantidades de diversa índole. Posteriormente, se les pide que indaguen e investiguen para conocer el valor exacto de la cantidad previamente estimada. Se finaliza con un debate para que discutan cuándo es necesario el valor exacto o cuándo una aproximación es un valor más útil.

- Población de España.
- Población de Madrid/Barcelona/Valencia/Bilbao/Sevilla.
- Número de estudiantes matriculados en tu centro educativo.
- Número de estudiantes que han elegido la asignatura optativa de Robótica.
- Peso de un elefante.
- Peso de un loro.
- Peso de una hormiga.

Representar números reales en la recta numérica

Para abordar la representación de los números reales en la recta numérica se pueden plantear las siguientes tareas:

Representa en la recta numérica $\sqrt{3}$ y $\sqrt{4}$. ¿Cuántos números hay entre $\sqrt{3}$ y $\sqrt{4}$? Justifica tu respuesta

Representa en la recta numérica los siguientes números: $-\frac{7}{8}, -2{,}3, -\sqrt{2}$. Explica cómo lo has hecho.

Las justificaciones dadas por el alumnado nos permitirán observar las estrategias usadas.

Comprensión de las operaciones

Para poder observar la comprensión de las operaciones por parte del alumnado, nos será útil plantear cuestiones como las siguiente

María está resolviendo un problema en el que tiene que hacer una multiplicación de dos números decimales, pero se le ha olvidado poner la coma en el resultado final, ¿podrías ponérsela? Explica por qué decides ponerla en el lugar que has elegido.

$$237{,}23 \times 1{,}23 = 2917929$$

Las justificaciones dadas por los estudiantes, nos va a permitir observar las estrategias usadas.

Conocer distintas representaciones de los números

El juego puede ser un recurso para que el alumnado conozca diferentes representaciones de los números. Un ejemplo de ello lo tenemos en el blog de Ana García

Azcárate (Figura 11). En él se proponen plantillas para diseñar dominós que podrían ser interesantes para el trabajo con las diferentes representaciones de los números. A continuación, describimos la dinámica de un dominó para trabajar la representación de fracciones decimales que se encuentra disponible en el blog citado.

El objetivo de este juego es que el alumnado maneje las fracciones decimales, con denominadores 10 y 100 y traduzca a su expresión decimal. Su construcción se basa en la estructura de los dominós clásicos, 8 veces el 0, 8 veces el 1, etc., hasta 8 veces el 6, obteniéndose las 28 fichas del dominó mediante todas las posibles combinaciones de 7 resultados, tomados de dos en dos, más las siete fichas de dobles, se ha reproducido en las 28 fichas que se presentan, cambiando las cifras de un dominó clásico por fracciones decimales y sus equivalencias.

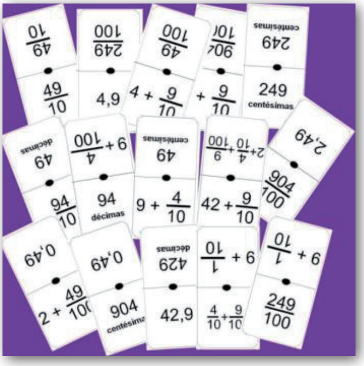


Figura 11. Dominó de representación de fracciones y decimales. Fuente: Blog de Ana García Azcárate

Los siete decimales que se han utilizado para las fichas del juego son: 0,49; 2,49; 4,9; 9,04; 9,1; 9,4; 42,9. Estos números no están escogidos aleatoriamente, sino que comparten las mismas cifras para dificultar algo más la identificación de los valores. Cada fracción se representa como aparece en la figura siguiente (Figura 12).

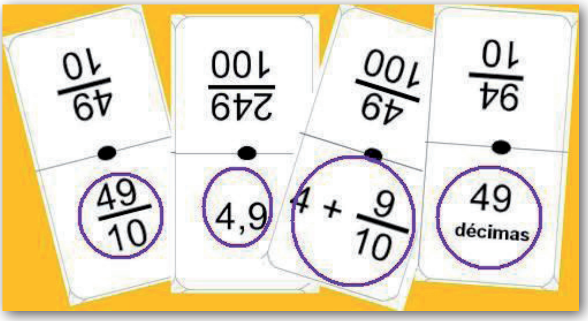


Figura 12. Representación de cada fracción.
Fuente: Blog de Ana García Azcárate

Reflexión final

El desarrollo competencial de las matemáticas requiere del trabajo de las conexiones entre sentidos matemáticos. Como hemos visto en el capítulo se pueden conectar el sentido numérico y algebraico, éste con el sentido espacial y con el estocástico. De tal manera que las diversas perspectivas a una misma situación desde los diferentes sentidos matemáticos, enriquezca el desarrollo de la competencia matemática.

El trabajo desde los sentidos matemáticos permite apreciar que la matemática es una ciencia cultural, que permite pensar, entender y actuar en los problemas del entorno que tienen que ver con la cantidad, la forma, el tamaño y la incertidumbre aleatoria. Esta idea es fundamental para transitar de manera coherente y continua de la Educación Primaria a la Educación Secundaria.

Por otro lado, cobra especial importancia la resolución de problemas y el trabajo con tareas contextualizadas porque permite desarrollar una enseñanza funcional de las matemáticas que hará predominar y dar sentido a los conceptos frente al aprendizaje de destrezas o algoritmos en situaciones descontextualizadas.

El paso de una situación real, contextualizada, a un problema matemático bien definido exigirá el desarrollo del razonamiento matemático. En las propuestas presentadas en este capítulo se ha insistido en a necesidad de conectar los diferentes sentidos, realizar preguntas pertinentes que inviten y apoyen la reflexión del alumnado y el uso de software y otras herramientas que le permitan el aprendizaje y la investigación autónoma.

REFERENCIAS

Arnold, P. y Pfannkuch, M. (2018). Critiquing investigative questions. En M. Sorto, A. White, y L. Guyot (Edits.), *Looking back, looking forward. Proceedings of the Tenth International Conference on Teaching Statistics* (ICOTS10, July, 2018), Kyoto, Japan (págs. iase-web.org). International Statistical Institute.

Azcárate, C. (1984). La nueva ciencia del movimiento de Galileo: una génesis difícil. *Enseñanza de las Ciencias, 2*(3), 203-208.

Bakker, A. y Gravemeijer, K. (2004). Learning to reason about distribution. En D. Ben-Zvi, y J. Garfield, *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (págs. 147-168). Kluwer Academic Publishers.

Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L. y Spangler, D. (2020). *Pre-K-12 Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education II (GAISE II). A Framework for Statistics and Data Science Education.* American Statistics Education y National Council of Teachers of Mathematics.

Begué, N., Batanero, C. y Gea, M. M. (2018). Comprensión del valor esperado y variabilidad de la proporción muestral por estudantes de secundaria obligatoria. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(2), 63-79, https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2256.

Behar, R. y Grima Cintas, P. (2004). La Estadística en la Educación Superior ¿Formamos Pensamiento Estadístico? *Ingeniería y Competitividad. 5* (2). 84-90.

Ben-Zvi, D., Aridor, K., Makar, K. y Bakker, A. (2012). Students' emergent articulations of uncertainty while making informal statistical inferences. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 44*(7), 913-925.

Bermejo-Luna, M.V. y Sánchez-Matamoros García, G. (2021). Evidencias de conocimiento entre Matemáticas y Física sobre velocidad media. *Revista Chilena de Educación Matemática, 13*(1), 5-16.

Clements, D. y Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6* (2), 81-89. https://dx.doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_1

Comité Español de Matemáticas (CeMat). (2021). *Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria.* https://matematicas.uclm.es/cemat/wp-content/uploads/bases2021.pdf.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Reidel.

Gea, M., Batanero, C. y Roa, R. (2014). El sentido de la correlación y regresión. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 87*, 25-25.

Gould, R., Bargagliotti, A. y Johnson, T. (2017). An analysis of secondary teachers' reasoning with participatory sensing data. *Statistics Education Research Journal, 16*(2).

Hart, K. M., Brown, M. L., Kuchemann, D. E., Kerslake, D., Ruddock, G. y McCartney, M. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16* (p. 212). John Murray.

Kaput, J. (2008). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? En J. Kaput, D. Carraher, y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). University of Massachusetts.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics (pp. 390–419). Macmillan Publishing Co, Inc.

Makar, K. y Rubin, A. (2028). Learning about Statistical Inference. En D. Ben-Zvi, K. Makar, y J. Garfield, (Ed.) *International Handbook of Research in Statistics Education. Springer International Handbooks of Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_8.

Mason, J. (2017). Overcoming the algebra barrier: Being particular about the general, and generally looking beyond the particular, in homage to Mary Boole. In S. Stewart (ed.). *And the rest is just algebra* (pp. 97-117). Springer.

Ministerio de Educación y Formación profesional (2022). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria. BOE 30 de marzo de 2022. Boletín Oficial del Estado, 76, de 30 de marzo de 2022. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/29/217

NCTM. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática.

OECD. (2018). *Marco de Competencia Global. Estudio PISA. Preparar a nuestros jóvenes para un mundo inclusivo y sostenible*. MECD.

Rebello, N. S., Cui, L., Bennett, A. G., Zollman, D. A. y Ozimek, D. J. (2017). *Transfer of Learning in Problem Solving in the Context of Mathematics and Physics. Learning to Solve Complex Scientific Problems*, 223-246. https://doi.org/10.4324/9781315091938-10

Redish, E. F. y Kuo, E. (2015). Language of Physics, Language of Math: Disciplinary Culture and Dynamic Epistemology. *Science and Education, 24*(5-6), 561-590. https://doi.org/10.1007/s11191-015-9749-7

Sánchez-Matamoros García, G., Moreno, M., Callejo, M. L. y Valls González, J. (2016). La medida en el Grado en Maestro en Educación Infantil: desarrollo de un módulo de enseñanza. En M. Tortosa, S. Grau y J. Álvarez (coords.), *XIV Jornades de Xarxes* *d´Investigació en Docència Universitària. Investigació, innovació i ensenyament universitari: enfocaments pluridisciplinaris* (pp. 403-414). Universitat d'Alacant, Institut de Ciències de l'Educació.

Schmittau, J. (1993). Retrieved from: http://www.mlrg.org/proc3pdfs/Schmittau_Mathematics.pdf

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra*. Orígenes y perspectivas. Libros del Zorzal.

Wilson, P.H., Mojica, G.F. y Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understandings of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematical Behavior, 32*, 103-121.

Matemáticas en el Bachillerato

Mathematics in High School

Sánchez-Matamoros García, G.[a]; Adamuz-Povedano, N.[b]; Cañadas, MC.[c];
Fernández-Ahumada, E.[b]; García Pérez, M.T.[b]; Moreno, A.,[c] Ramírez-Uclés, R.[c]; Serradó, A.[d]
[a] *Universidad de Sevilla,*
[b] *CEIP Al-Ándalus,*
[c] *Universidad de Granada,*
[d] *Colegio La Salle-Buen Consejo.*

Resumen

El Bachillerato es la etapa postobligatoria de la Educación Secundaria en la que se produce la transición de la escuela a la universidad. Esta transición incluye no sólo cambios en las formas de enseñanza o en las estrategias de enseñanza aprendizaje utilizadas sino también cambios en el punto de vista sobre las matemáticas. Cuando los estudiantes ingresan en la universidad, los conceptos estudiados en el bachillerato vuelven a aparecer, sin ofrecerles la oportunidad de conectar con lo aprendido anteriormente. El docente debe ser consciente de estos problemas para que no se produzcan conflictos en el aprendizaje de los estudiantes. Las investigaciones en educación matemática puede ser una vía para lograrlo. En este capítulo se resaltan aspectos clave sobre el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas en Bachillerato organizados en relación a los distintos sentidos matemáticos.

Palabras clave: Bachillerato, Sentidos matemáticos, Tareas matemáticas, Trayectoria de aprendizaje.

Abstract

Baccalaureate is the post-compulsory stage of Secondary Education in which the transition from school to university takes place. This transition includes not only changes in the forms of teaching or in the teaching-learning strategies used, but also changes in the point of view about mathematics. When students enter university, the concepts studied in high school reappear, without offering them the opportunity to connect with what they learned previously. The teacher must be aware of these problems so that conflicts do not occur in student learning. Research in mathematics education can be a way to achieve this. This chapter highlights key aspects of the learning and teaching of Mathematics in High School organized in relation to the different mathematical senses.

Keywords: High School, Mathematics senses, Mathematical tasks, Learning trajectory.

El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en Bachillerato

El Bachillerato es la etapa postobligatoria de la Educación Secundaria en la que se produce la transición de la escuela a la universidad. En las últimas décadas, podemos encontrar varios estudios que tratan temas relacionados con la transición de las matemáticas escolares a las universitarias, hecho que, a nivel internacional, se ha visto reflejado en las conferencias que se celebran desde el año 2016 en la Red Internacional para la Investigación en Didáctica de las Matemáticas Universitaria (INDRUM) reconocidas como conferencias temáticas del ERME (Sociedad Europea para la Investigación en Educación Matemática) o en los Congresos Internacionales de Educación Matemática (ICME). En estos estudios se han identificado tensiones en relación con las desconexiones entre las matemáticas, las actitudes, las prácticas y los rendimientos de los estudiantes a nivel escolar y universitario. La transición de la escuela a la universidad incluye cambios en las formas de enseñanza, en los enfoques de la instrucción, en las estrategias de enseñanza aprendizaje, en el punto de vista sobre las matemáticas, y en los objetivos de aprendizaje (Biza et al., 2016).

Además, los conceptos matemáticos, muy frecuentemente, se introducen a nivel escolar y vuelven a tratarse de nuevo a nivel universitario. Un ejemplo de ello lo tenemos en los conceptos de límite de funciones o de función derivada. En el Bachillerato, la enseñanza de estos conceptos se centra principalmente en las técnicas relacionadas con el cálculo de límites o con el cálculo de derivadas. Cuando los estudiantes ingresan en la universidad estos conceptos vuelven a aparecer en los cursos de Cálculo y se introducen desde cero, sin prestar atención a lo que los estudiantes han aprendido anteriormente en el Bachillerato, sin darles la oportunidad de conectar lo que han aprendido en la escuela con los nuevos conocimientos introducidos a nivel universitario. Esta desconexión suele generar conflictos en el aprendizaje de los estudiantes, convirtiéndose en muchas ocasiones en un obstáculo para el aprendizaje. Problemas similares podemos apreciar en otros conceptos de Cálculo, Álgebra, Geometría o Números.

Lo mismo sucede con las prácticas matemáticas, mientras que en las matemáticas escolares el alumnado, muy a menudo, se centra más en la aplicación de procedimientos y menos en el razonamiento sobre estos, en las matemáticas universitarias a los estudiantes se les pide que se involucren en prácticas matemáticas nuevas para ellos, centradas más en el razonamiento y menos en la aplicación de procedimientos, resultándoles difícil ver cuál es el propósito de las mismas.

El docente tanto de Bachillerato como de Universidad debe ser consciente de estos problemas para que se dé una transición efectiva de la escuela a la universidad y no lleguen a producirse conflictos en el aprendizaje de los estudiantes, las investigaciones en educación matemática puede ser una vía para lograrlo.

A continuación, se resaltan aspectos clave sobre el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas en Bachillerato organizados en relación con los distintos sentidos matemáticos.

Sentido algebraico

El álgebra escolar se ha venido introduciendo en los currículos de muchos países como manipulación de símbolos y su enseñanza se ha reservado para las etapas de Secundaria y Bachillerato (Kaput, 2008; NCTM, 2003). La construcción en los diferentes planes de estudios del álgebra escolar ha sido reflexionada profundamente por el profesorado. Sin embargo, tradicionalmente se mantiene una forma de enseñar los temas que enfatiza la manipulación de símbolos. Actualmente, no debería ignorarse algunas otras vías como la tecnológica.

Álgebra como el estudio de estructuras y sistemas abstraídos de los cálculos y las relaciones

La fluidez con el simbolismo algebraico y el conocimiento de las herramientas matemáticas adecuadas para la resolución de cada problema ayuda a la resolución de problemas de diversas áreas curriculares, así como contenidos propios de este nivel, por ejemplo, las matrices. El conocimiento y comprensión de los objetos algebraicos que se trabajan en este nivel es fundamental para poder ligarlos a fenómenos de la realidad. El uso de elementos geométricos ayuda a la traducción entre diferentes sistemas de representación y permite realizar justificaciones y demostraciones visuales de relaciones numéricas.

La siguiente tarea[1] sigue este planteamiento involucrando la acción de matrices sobre vectores de tres dimensiones.

> En las siguientes preguntas: R, S son matrices de rotación; P, Q son matrices de reflexión; M no es ni una rotación ni una reflexión.
> ¿Cuál de los diferentes tipos de matrices no puede dejar direcciones vectoriales fijas?
> ¿Cuál de los diferentes tipos de matrices puede dejar fija exactamente una dirección vectorial?
> ¿Cuál de los diferentes tipos de matrices puede dejar fija más de una dirección vectorial?
> ¿Se da alguna vez el caso de que RS pueda dejar un vector invariante?
> ¿Se da alguna vez el caso de que PQ pueda dejar un vector invariante?
> ¿Sucede alguna vez que M dejará invariable la dirección de un vector?
> ¿Puede una matriz con determinante cero dejar un vector fijo?
> ¿Puede una matriz con determinante mayor que 1 dejar fijo un vector?
> ¿Puede una matriz dejar exactamente dos vectores fijos?

El vector v está fijado por la matriz M si $Mv = v$. Al estudiar las respuestas de cada pregunta, podemos utilizar argumentos geométricos o algebraicos, según corresponda

1. https://nrich.maths.org/6877

e incluso dibujar diagramas y construir ejemplos particulares de matrices y vectores si el alumnado lo considera necesario. Si ellos no obtienen una respuesta definitiva a una parte dada, podemos animarlos a que traten de dar ejemplos de cuándo la pregunta planteada es o no cierta.

Este problema plantea una serie de preguntas diseñadas para provocar la reflexión de los estudiantes sobre las matrices que dejan vectores fijos y las propiedades que tendrían dichas matrices y vectores.

Puede ser interesante comenzar con un trabajo preliminar sobre matrices en tres dimensiones. Los estudiantes podrían encontrar algunos ejemplos de matrices de 3×3 que representan rotaciones y reflexiones simples, que podrían usarse para resolver el problema. Las preguntas se dividen claramente en tres secciones: preguntas 1-3, 4-6 y 7-9. Los estudiantes podrían abordar estas preguntas en esas tres secciones, tal vez trabajando con un compañero, y retroalimentar ideas al resto de la clase después de que se responda cada sección.

Para cada sección de preguntas, se pide al alumnado que piense en lo que se les pide que hagan, use su intuición para hacer comentarios iniciales, luego piense en la geometría de la situación y finalmente use algunos ejemplos para apoyar su razonamiento algebraicamente.

Álgebra como el estudio de funciones, relaciones y variación conjunta

La experiencia con el álgebra de Bachillerato debería capacitar al alumnado para comprender las relaciones y funciones con mayor complejidad que las vistas en las etapas anteriores, representarlas de diferentes formas, seleccionar la más adecuada y pasar con flexibilidad de una a otra.

Además, el trabajo con las tareas algebraicas en esta etapa educativa debería desarrollar la capacidad de (CEMAT, 2021):

- Comprender y realizar transformaciones con funciones, como combinarlas aritméticamente, componer las de uso común, y obtener sus inversas. Utilizar la tecnología para realizar las operaciones con las expresiones simbólicas más complicadas.
- Comprender y comparar las propiedades de las clases de funciones, incluyendo, polinómica, exponencial, racional, logarítmica y periódica.
- Interpretar las representaciones de las funciones de dos variables.
- Usar el álgebra simbólica para representar y explicar relaciones matemáticas.
- Usar una variedad de representaciones simbólicas, incluyendo ecuaciones recursivas y paramétricas, para las funciones y las relaciones.

Por ejemplo, las características de la función que aparece en la situación presentada a continuación.

Algunas veces los médicos prescriben «fármacos hipnóticos» (p. ej. pastillas para dormir) a pacientes que no pueden dormir a causa de dolor físico o tensión emocional. Otros son usados como sedantes o anestésicos durante las operaciones. Hay muchos tipos diferentes de fármacos que pueden ser prescritos. Un requisito importante es que su efecto desaparezca antes de la mañana siguiente, de lo contrario el paciente se encontrará somnoliento durante todo el día. Esto podría ser peligroso si, por ejemplo, tiene que conducir para trabajar. Por supuesto, para alguien confinado a guardar cama en un hospital esto no sería tan importante.

Imagina que un doctor ha prescrito un fármaco llamado Triazolam (Halcion). Después de tomar algunas pastillas, el fármaco alcanza un nivel de 4 μg/1 en el plasma sanguíneo. ¿Con qué rapidez desaparecerá el fármaco? (Shell Center, 1990). Para que puedan contestar a la pregunta se le facilita la siguiente información:

Nombre del fármaco	*Fórmula aproximada*
Triazolam (Halcion)	$y = A \times (0{,}84)^x$
Methohexitona (Brietal)	$y = A \times (0{,}5)^x$
CLAVE A = *tamaño de la dosis inicial* y = *cantidad de fármaco en la sangre* x = *tiempo en horas desde que el fármaco llega a la sangre*	

Después de facilitar que el estudiante emplee sus potencialidades para una primera incursión en el problema como podría ser utilizar la calculadora para realizar una tabla, le avanzamos las siguientes cuestiones.

Haz una gráfica exacta para mostrar cómo desaparece el efecto del Triazolam.

¿Después de cuántas horas se ha reducido a la mitad la cantidad de fármaco en la sangre?

¿Cómo depende esa vida media del tamaño de la dosis inicial? Escribe y explica tus resultados.

Investiga el efecto de tomar una dosis de 4 μg de Methohexitone cada hora.

Dibuja una gráfica exacta y escribe sobre sus implicaciones.

Este trabajo podría realizarse con el uso de aplicaciones informáticas que faciliten el desarrollo de estructuras algebraicas y la conexión entre el problema, su modelo como función en forma simbólica y la representación gráfica de dicha función.

Se podría generalizar el trabajo del alumnado pidiéndoles que establezcan entre todos la forma de la gráfica de la función. La formulación de preguntas como las siguientes ayudarían a ello:

¿Cuándo aumenta o disminuye?

¿Es siempre y mayor que 0? ¿Por qué?

¿Qué significa a cuando x no es un número entero?

Álgebra como la aplicación de un grupo de lenguajes de modelización para expresar y apoyar el razonamiento sobre las situaciones que se modelan

Modelizar supone identificar las relaciones cuantitativas esenciales en una situación del mundo real y usar expresiones simbólicas, incluyendo formas iterativas y recursivas, para representar las relaciones derivadas de diferentes contextos. Finalmente, sacar conclusiones razonables acerca de una situación que está siendo modelada y considerar las limitaciones del modelo.

La tarea que se muestra a continuación (Labraña et al., 1995) permite trabajar todas las fases del proceso de modelización y si se trabaja con herramientas informáticas no resultará tedioso y podrá ponerse el énfasis en sacar conclusiones del modelo.

El 75% de la población laboral de un país tiene trabajo y el resto está en paro. Se prevé que cada año se destruirán un 10% de los empleos, por lo que el gobierno emprende un programa de reactivación económica con el que promete emplear anualmente al 20% de los parados.

Cumpliéndose la previsión, ¿será mejor o peor la situación al año siguiente?

¿Qué sucedería al cabo de dos años?

¿Crees que es casual esta situación? ¿Cómo prevés que evolucionará y hasta cuándo o dónde?

Si las condiciones se mantienen, calcular la evolución del empleo en los próximos diez años.

Si las cifras iniciales fuesen de un 60% de empleo y un 40% de paro, ¿cómo evolucionaría la situación?

¿A qué podemos atribuir que distintas situaciones iniciales de paro-empleo nos conduzcan a un mismo resultado?

Esta tarea describe el producto reiterado de una matriz por sí misma. Se trata de una cadena de Markov y tiene como particularidad que los elementos de la matriz se expresan como probabilidades.

En la pregunta a) se introduce la reflexión sobre la evolución del empleo a partir del producto de matrices.

$$\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 75 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72{,}5 \\ 27{,}5 \end{pmatrix}$$

En la pregunta b) el alumnado podría conjeturar sobre la tendencia que puede seguir la población de empleo.

$$\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 72{,}5 \\ 27{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70{,}75 \\ 29{,}25 \end{pmatrix}$$

En la pregunta d) podría utilizarse un programa de cálculo para que resulte menos tedioso. El resultado de ir sustituyendo la segunda matriz (población laboral) por el resultado de los sucesivos productos (situación de la población de empleo cada año posterior) permitirá ver a los estudiantes una de las características de las cadenas de

Markov: tienden a converger a un estado estacionario. Este hecho ratifica las previsiones de estabilidad si realizamos el cálculo a 20 años.

Sentido espacial

El sentido espacial se puede caracterizar por la competencia del sujeto para registrar y representar formas y figuras, reconocer sus propiedades, identificar relaciones entre ellas, ubicarlas y describir sus movimientos (CEMAT, 2021). Como principales referencias para desarrollar este sentido se han tomado los Principios y Estándares para la Educación Matemática del NCTM y el Marco teórico de PISA para la evaluación de la competencia matemática 2021, según las cuales el sentido espacial se refiere a las capacidades de un individuo para trabajar e interactuar en un entorno amplio, elaborar o descubrir imágenes de formas y figuras, clasificarlas, relacionarlas y razonar con ellas.

Así, este sentido lo vamos a abordar a partir del enunciado de un problema y de las posibles manifestaciones, en su resolución, de la geometría plana de Primero de Bachillerato, y posteriormente los matices añadidos en la geometría espacial de Segundo de Bachillerato.

Partimos del problema siguiente: Dadas dos rectas paralelas y un punto A en r, construid un cuadrado que tenga como vértice A y otro vértice en la recta s. ¿Cuántas soluciones distintas hay?

En un posible proceso de resolución, si partimos de que uno de los lados del cuadrado esté contenido en la recta r, las habilidades de percepción de la figura-contexto y de las relaciones espaciales, conectarán las propiedades y relaciones asociadas a la componente de los conceptos geométricos. Al estar un lado sobre la recta r, el punto A se corresponde a uno de los ángulos rectos. Por lo tanto, la longitud del lado debe ser igual a la distancia entre las dos rectas paralelas (Figura 1). En este razonamiento van implícitas propiedades relativas a que la distancia entre dos rectas paralelas es igual a la longitud del segmento que las une perpendicularmente. En este caso, aplicando simetrías a una de las soluciones, se obtendrían las dos soluciones posibles.

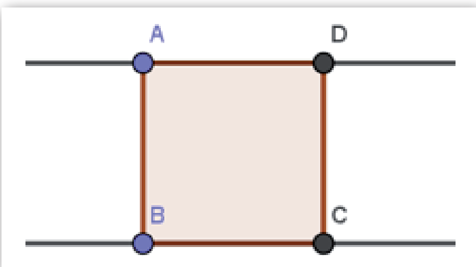


Figura 1. Una de las soluciones con el lado contenido en las rectas

Sin embargo, el problema adquiere matices interesantes cuando el lado del cuadrado no está contenido en la recta r. Por ejemplo, si partimos de las soluciones anteriores y vamos desplazando el punto B por la recta s conservando que sea un cuadrado, vamos obteniendo infinitas soluciones (Figura 2). Esta construcción es especialmente clarificadora al utilizar la herramienta de arrastre de Geogebra al ir desplazando B por s. La habilidad de discriminación visual, puede reconocer como equivalentes aquellas que sean simétricas. Al ser A un punto fijo, al variar B en el mismo sentido siempre se obtienen medidas diferentes y, por lo tanto, soluciones diferentes por tener distinta área.

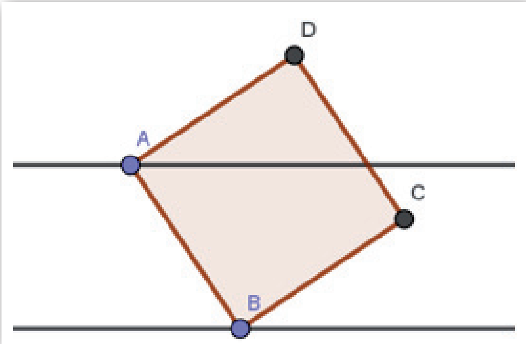


Figura 2. Una solución con dos vértices consecutivos en cada recta

En todos los casos anteriores, A y B determinan un lado del cuadrado solución. Vamos a analizar el caso en que determinen una diagonal. La construcción de un cuadrado dada la diagonal, implica el reconocimiento de propiedades del cuadrado asociadas a la perpendicularidad y longitud de las diagonales. Nuevamente se ponen en juego habilidades relativas a las relaciones espaciales para conectar las propiedades y las relaciones métricas. Dado un punto B cualquiera en la recta s, se determinaría el punto medio del segmento AB y sería el centro del cuadrado (Figura 3). Sabiendo que en los cuadrados las diagonales son perpendiculares y con la misma longitud, se podrían hallar los otros dos vértices. Para comparar el área de estos cuadrados con los anteriores, se puede relacionar la fórmula del cuadrado del lado con la de la mitad del cuadrado de la diagonal.

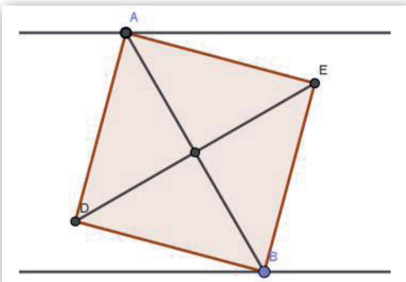


Figura 3. Una solución con dos vértices no consecutivos en cada recta

La búsqueda de todas las soluciones, implica la determinación de un criterio para considerarlas distintas. Si únicamente se determina la forma, la componente de movimientos permite establecer que todos los cuadrados son semejantes, puesto que se obtienen uno del otro por combinaciones de isometrías (giros, traslaciones, simetrías) y homotecias. Pero se pueden determinar otros criterios relativos a la medida (que tengan distinta área) o la posición respecto a las rectas (que tengan vértices diferentes). En estos casos la habilidad de percepción de la posición en el espacio y la conservación de la percepción podrían discriminar que las figuras obtenidas por isometrías mantienen el área.

El procedimiento implicaría un trabajo con las respectivas ecuaciones y coordenadas, lo que conecta el sentido espacial con otros sentidos como el de la medida y el algebraico. Así, el problema en geometría espacial difiere esencialmente en considerar coordenadas tridimensionales y las correspondientes ecuaciones en el espacio. Sin embargo, al añadir una nueva dimensión, surgen nuevas soluciones al aplicar giros respecto al segmento AB en el espacio tridimensional (Figura 4). Nuevamente, es necesario conectar las propiedades y los movimientos con las imágenes mentales, representaciones y habilidades de visualización.

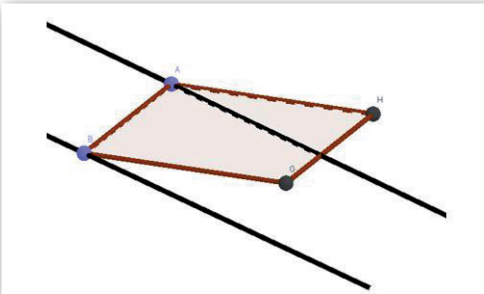


Figura 4. Cuadrado en el espacio tridimensional

Sentido estocástico

Las actividades a las que el alumnado se habrán enfrentado en cursos anteriores les deben haber permitido el desarrollo del sentido estocástico, reconociendo cómo las investigaciones estocásticas aportan sentido a la variabilidad, predictibilidad e incertidumbre de la muestra de datos estudiada. Deben haberse iniciado al estudio de la inferencia informal, consistente en la capacidad de realizar generalizaciones de las investigaciones llevadas a cabo en situaciones de incertidumbre, reconociendo el papel que tienen los parámetros de centralización, posición y dispersión en el estudio de la distribución, el uso de datos como prueba de las generalizaciones de los modelos de regresión y de tendencias de proyecciones y el empleo del lenguaje probabilístico de la generalización, incluida la referencia informal a los niveles de certeza sobre las conclusiones extraídas. El empleo de este lenguaje probabilístico ayudará a la comprensión del significado de las aproximaciones clásicas, subjetivas y frecuenciales de la probabilidad.

Así pues, las actividades a las que el alumnado se tendrá que enfrentar en Bachillerato le deberán permitir, según CEMAT (2021), por un lado, ahondar en las grandes ideas de variabilidad, distribución, muestreo, inferencia, aleatoriedad y probabilidad y, por otro lado, desarrollar un sentido estocástico de estas ideas "para hacer frente a una amplia gama de situaciones cotidianas que implican el razonamiento y la interpretación de datos, la elaboración de conjeturas y la toma de decisiones a partir de la información estadística, su valoración crítica y la comprensión y comunicación de fenómenos aleatorios, y la capacidad de realizar algunas predicciones". Este comité defiende el carácter instrumental de las matemáticas para la mayoría de áreas de conocimiento, que en Bachillerato se concretan en las diferentes modalidades. Y, aunque las actividades que se presentan en este documento se han seleccionado para que puedan ser usadas en cualquier modalidad debe tenerse en cuenta que al transferirlas al aula estas adecuen el contexto a la modalidad y al papel que tienen las herramientas estocásticas en sí mismas para cada modalidad (consumidores, productores y difusores de datos estocásticos).

La primera actividad que presentamos tiene por finalidad la realización de predicciones y la toma de decisiones asociadas a la determinación de la probabilidad condicionada asociada al contexto médico:

> Susana ha encontrado una anormalidad en su pecho y decide consultar al doctor. El doctor le indica que es necesario que se realice una estudio de mamas. Susana, antes de acudir al médico y ante el miedo que le supone tener la enfermedad, busca información en Internet y encuentra la siguiente tabla que muestra el número de personas sanas y enfermas en una muestra de 10000 personas según el resultado del examen mamario (prevalencia=0,001).

	Estado de salud		
Resultado del estudio	*Enferma*	*Sana*	*Total*
Positivo	*99*	*4995*	*5094*
Negativo	*1*	*94905*	*94906*
Total	*100*	*99900*	*100000*

> En función de la información encontrada en Internet:
> Pregunta 1: ¿Qué riesgo tiene Susana de que la traten por un cáncer de mama si está sana?
> Pregunta 2: ¿Cuál es el riesgo que tiene Susana de que no la traten por el cáncer de mama si está enferma?
> Pregunta 3: ¿Cómo debería tomar la decisión de ser o no ser tratatada? Razona matemáticamente.

La situación se presenta como un análisis de las probabilidades condicionadas estableciendo los sucesos:

A=”está enferma” y B=”el test es positivo”. En la pregunta 1, en función de los sucesos establecidos podemos asociar el riesgo a la probabilidad que tiene Susana de que la traten por un cáncer de mama si está sana. Es decir: $P(B|\bar{A})=\frac{p(B\cap\bar{A})}{P(\bar{A})}=\frac{4995}{99900}=0{,}05.$

En la pregunta 2, podemos asociar el riesgo a la probabilidad que tiene Susana de que no la traten de un cáncer de mama (porque el test ha dado negativo) si está enferma. En este caso, tendríamos que calcular: $P(\bar{B}|A)=\frac{p(\bar{B}\cap A)}{P(A)}=\frac{1}{100}=0{,}01.$

Finalmente la tercera pregunta, podemos valorar la probabilidad de estar enferma y, en conclusión, iniciar un tratamiento. En este caso deberíamos calcular la probabilidad total considerando los resultados del test:

$$P(A)=P(B)\cdot P(B|\bar{A})+P(\bar{B}|\bar{A})=0{,}02$$

En función de la información encontrada en Internet la probabilidad de que esté enferma es de un 0,02 un valor bajo para tener miedo ante esta situación. Debe esperar que se confirmen los valores con su propio test para tomar una decisión que no esté basada en las probabilidades muestrales encontradas en Internet.

El planteamiento de este problema en el contexto de riesgo es un elemento motivador al significado que adquieren los cálculos probabilísticos en situaciones de dependencia, independencia y condicionamiento para el alumnado (Batanero y Gea, 2018). Se han presentado los datos usando tablas de contingencia y frecuencias naturales como facilitadores de la comprensión de la probabilidad condicionada. Los diferentes problemas asociados al mismo deben permitir que el alumnado distinga entre la probabilidad conjunta y la probabilidad condicionada. El tercer problema es un facilitador de la comprensión de en qué contextos tiene interés aplicar la probabilidad total. El problema podría utilizarse para introducir y validar el signifidao del Teorema de Bayes, al plantearse cual es la probabilidad de que Susana esté enferma si sabe que el test es positivo o usar la simulación para comprender qué le puede ocurrir a Susana al realizarse sucesivos tests.

Tal y como indican estas autoras, en la simulación se lleva a cabo una actividad de modelización. Por ello, el alumnado de bachillerato debe desarrollar estrategias de modelización que le permitan evolucionar de los acercamientos al estudio de datos descriptivos a los inferenciales. Por ello, proponemos que el alumnado resuelva actividades de modelización como:

> Los restaurantes han descubierto que, de media, el 5% de las reservas telefónicas que se realizan no se personan en el día y hora solicitado. Como consecuencia de este fenómeno, los restaurantes han decidido aplicar una práctica de overbooking (parecida a la de los aviones). Si un restaurante de tamaño medio tiene plaza para 75 comensales, ¿cuántas plazas adicionales debe reservar para aumentar sus beneficios sin causar insatisfacción a los comensales por no tener su reserva a punto?

Los trabajos previos de Paparistodemou et al. (2017) permiten establecer una estrategia para resolver dichas situaciones de modelización:

Matematización de la situación

1. ¿Cuáles podrían ser algunas de las razones por las que algunos clientes de los restaurantes no se presentan al restaurante en el día y hora solicitado?
2. Aproximadamente, ¿cuántos pasajeros podrían ir a comer al restaurante un determinado día y en un determinado turno (mediodía/noche)?
3. ¿Cuántas reservas adicionales sería razonable aceptar?
4. ¿Qué consecuencias puede tener el exceso de reservas?
5. ¿Qué consecuencias puede tener no aplicar la práctica de overbooking (como en los vuelos)?

Modelado de las reservas

6. Modelar reservas usando software educativo (Geogebra, TinkerPlots) para simular el número de comensales que no llegan (o llegan) al restaurante.
7. ¿Qué suposiciones debe realizarse sobre la situación que se va a modelar? ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra? ¿Cuál es el valor de la probabilidad de éxito (es decir, que pueda usar la reserva realizada)? ¿Cuántas iteraciones quieres realizar (es decir, diferentes reservas)?
8. Repetir el experimento y explicar cómo y por qué difieren los resultados que se obtienen respecto a la simulación anterior.
9. Repetir la simulación con un gran número de iteraciones.
10. Construir un diagrama adecuado de la distribución del número/porcentaje de comensales que no se presentan a un restaurante y describir la distribución.
11. ¿Hay algo de la distribución obtenida en la simulación que llama la atención?
12. Si es necesario, realice cambios en el modelo (por ejemplo, especificando un valor diferente para el número de reservas realizadas) y repetir la simulación.

Ajuste del modelo

13. Reconocer el modelo teórico binomial que se ajusta a la simulación.
14. Generar los valores teóricos de dicho modelo teórico.
15. Comparar la distribución probabilística binomial con el modelo obtenido de la simulación experimental.

Aplicar el modelo a la realidad

16. ¿Qué recomendaciones realizaría al restaurante sobre la cantidad extra de reservas que debe aceptar para que sus beneficios sean máximos y no perjudique a los comensales?

La adopción de enfoques informales de la inferencia estadística como el propuesto en la fase de modelización por simulación puede ayudar a promover el razonamiento estadístico, mientras se desarrolla el proceso de toma de decisiones (Paparidostemou et al., 2017). Eso no significa que puedan superar todas las dificultades que supone la aproximación de los modelos experimentales a los modelos teóricos, en este caso binomial. Siendo una de las ideas más importantes, es la menos comprendida por el alumnado (Garfield y Ben-Zvi, 2008). Este tipo de actividades debe permitir que el alumnado integre y transfiera las ideas de distribución (de datos, de probabilidad y muestral).

Sentido de la medida[2]

El sentido de la medida supone un proceso complejo que se inicia con la percepción y comparación de cualidades medibles y se completa con técnicas de medición y estrategias de estimación en situaciones contextualizadas. Asimismo, los instrumentos de medida y las fórmulas de medición indirecta son centrales en este sentido de la medida, siendo más importantes los primeros en Educación Primaria y los segundos en Educación Secundaria. Propio de la etapa de Bachillerato es la medida de superficies o volúmenes, lo que supone integrar el estudio del límite de una función, e incorporar la integral o la derivada como herramienta para calcular la medida de superficies o volúmenes (CEMAT, 2021). Por tanto, el sentido de la medida en Bachillerato requiere del aprendizaje de los conceptos de límite, derivada e integral, conceptos claves del Cálculo en Bachillerato.

El aprendizaje de los conceptos fundamentales del Cálculo en Bachillerato, a pesar de su potencialidad como marco para modelar problemas relacionados con la variación, presenta muchas dificultades en los estudiantes. Un ejemplo de este tipo de dificultades se pone de manifiesto en la resolución de problemas de optimización de superficies o volúmenes donde los estudiantes deben usar el cálculo diferencial (Tabla 1) para su resolución. En este tipo de problemas los estudiantes suelen usar el siguiente método:

2. Algunos de los ejemplos analizados han sido parcialmente publicados en revistas del área: "Fuentealba, C.; Sánchez-Matamoros, G.; Badillo, E. (2016). Análisis de tareas que pueden promover el desarrollo de la comprensión de la derivada. *UNO-Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 71, 72-77; Fuentealba, C.; Sánchez-Matamoros, G.; Badillo, E.; Trigueros, M. (2017). Thematization of the derivative schema in university students: a study about the existence of nuances in constructing relations between a function's successive derivatives. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology (IJMEST), 48*(3), 374-392; Sánchez-Matamoros, G., García, M., y Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada [The development of derivative schema]. *Enseñanza de las Ciencias, 24*(1), 85–98; Sánchez-Matamoros, G. y Fernández, C. (2016). Secuencia de actividades para el aprendizaje de la derivada desde una trayectoria de aprendizaje. En: *UNO-Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 72. 40-45).

- Plantear la función f que debe optimizarse (maximizar o minimizar).
- Calcular la derivada de la función f.
- Buscar los puntos críticos de f igualando a 0 la derivada f'.
- Evaluar la segunda derivada en los puntos críticos, si es positiva será un mínimo y si es negativa será un máximo.

Los profesores, en ocasiones, creemos que, sin necesidad de que se promueva explícitamente la reflexión por su parte, los estudiantes de manera espontánea construyen las relaciones entre los elementos matemáticos que conforman un concepto, en este caso el concepto de función derivada, en la resolución de problemas. Sin embargo, los resultados de investigaciones sobre la comprensión de dicho concepto muestran la complejidad de su aprendizaje (García et al., 2011). Un ejemplo de ello se pone de manifiesto en la forma en que resuelve el problema el estudiante (Tabla 1).

Tabla 1. Ejemplo de tarea de derivada y respuestas de un estudiante que muestra dificultades de aprendizaje

<table>
<tr><th colspan="2">Tipo de tarea: problema de optimización de cálculo diferencial</th></tr>
<tr><th colspan="2">Estudiante 1</th></tr>
<tr><td>Tarea 1

Se quiere construir una caja sin tapa a partir de una hoja de cartón cuadrada de 60 cm de lado. Para ello, se corta un cuadrado de lado x en cada esquina y se dobla la hoja levantando los cuatro laterales de la caja. Determinar las dimensiones de la caja para que su volumen sea máximo</td><td>Proceso de resolución
V = LARGO × ALTO × ANCHO
ALTO = x   LARGO = 60 − 2x   ANCHO = 60 − 2x
$V(x) = x(60-2x)(60-2x) = 3600x - 240x^2 + 4x^3$
$\frac{dV}{dx} = 3600 - 480x + 12x^2$ PUNTOS CRÍTICOS $\frac{dV}{dx} = 0$
$3600 - 480x + 12x^2 = 0$
$x^2 - 40x + 300 = 0$ $x = \frac{40 \pm \sqrt{1600-1200}}{4}$ $x_1 = 30$ $x_2 = 10$
PARA OBTENER EL MAXIMO DERIVAMOS LA FUNCIÓN DEL VOLUMEN POR SEGUNDA VEZ, SI ES MAYOR QUE CERO TENDREA UN MÁXIMO.
$\frac{d^2V}{dx^2} = -480 + 24x$ EN EL PUNTO CRÍTICO $x_1 = 30$
$\frac{d^2V}{dx^2} = -480 + 24(30) = 240 > 0$
EL VOLUMEN MÁXIMO DE LA CAJA SE OBTIENE CON x=30 x = 3[illegible]</td></tr>
<tr><th colspan="2">Análisis de la respuesta: dificultades del estudiante</th></tr>
<tr><td colspan="2">El estudiante 1 plantea correctamente la función volumen, calcula la derivada de la función volumen, busca los puntos críticos igualando a cero la primera derivada de la función volumen. Sin embargo, considera que el volumen máximo pedido se encuentra en aquel valor donde la segunda derivada sea positiva, lo que pone de manifiesto la desvinculación, en este estudiante, del significado de las derivadas sucesivas de una función con la función dada, y de las relaciones que se establecen entre el comportamiento local y global de esta.</td></tr>
</table>

Así, la enseñanza del Cálculo generalmente se centra en un aprendizaje procedimental, basado en la resolución de problemas con cálculos algorítmicos (Artigue, 1995). Si el estudiante del ejemplo (Tabla 1), en lugar de haber usado un procedimiento aprendido de memoria en la instrucción previa, hubiera hecho uso del significado de la primera derivada y su relación con el crecimiento y decrecimiento de la función, entorno a los puntos críticos, hubiera llegado a la conclusión de que el volumen máximo está en aquellos puntos donde la segunda derivada es menor que cero y no mayor que cero. Estudiar la monotonía de la función (creciente (primera derivada mayor que cero) o decreciente (primera derivada menor que cero)) en los intervalos que generan los puntos críticos le permite determinar el tipo de extremos. Por este motivo surge la necesidad de crear situaciones de enseñanza, a través del diseño de tareas, donde se promueva la construcción del significado de los elementos matemáticos que conforman el concepto y de las relaciones que pueden establecerse entre estos en distintos modos de representación y las conversiones entre ellos (García et al., 2011; Badillo et al., 2011).

Una propuesta de enseñanza de estos conceptos que puede permitir superar estas dificultades es que el docente en sus tareas profesionales de planificar e implementar una lección considere una secuenciación de tareas o problemas que tengan en cuenta como los estudiantes progresan en su aprendizaje. En este sentido, consideramos que una trayectoria de aprendizaje puede ser útil en este proceso puesto que puede facilitar al docente la interpretación del nivel de comprensión del estudiante de un determinado contenido matemático (Sánchez-Matamoros y Fernández, 2016; Wilson et al., 2013).

En general, una trayectoria de aprendizaje tiene tres componentes: el objetivo de aprendizaje, la descripción del progreso en el aprendizaje y un conjunto de tareas (Clements y Sarama, 2004). A modo de ejemplo, y por ser la derivada un concepto fundamental en el estudio de fenómenos que involucran el cambio o variación de magnitudes, presentamos a continuación una trayectoria de aprendizaje de dicho concepto.

Una trayectoria de aprendizaje del concepto derivada

Las tres componentes de la trayectoria de aprendizaje del concepto de derivada que vamos a considerar son:

– Un objetivo de aprendizaje: Comprender el concepto de derivada a través de la coordinación de diferentes modos de representación, analítico (algebraico-numérico) y gráfico.
– La descripción de una progresión en el aprendizaje del concepto de derivada que se pone de manifiesto a través del uso progresivo, por parte del estudiante, de un mayor número de elementos matemáticos que conforman dicho concepto,

entendiendo por elementos matemáticos tanto los relativos a la definición de derivada (por ejemplo, la derivada en un punto como límite del cociente incremental) como los relativos a propiedades, teoremas, lemas y corolarios (por ejemplo, el corolario: si f´<0 en el intervalo (a, b) implica que f es decreciente en el intervalo (a, b)) en los diferentes modos de representación tanto analítico como gráfico; y de las relaciones que se establecen entre dichos elementos en la resolución de tareas o problemas. Esta caracterización se ha realizado a partir de los resultados de las investigaciones previas en el área (Sánchez-Matamoros et al., 2006).

– Un conjunto de tareas secuenciadas a partir de la progresión en el aprendizaje descrita.

Nos referiremos a una aproximación a la derivada desde una perspectiva o modo de representación analítica cuando está vinculada al límite del cociente incremental y desde una perspectiva o modo de representación gráfico cuando está vinculada a la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto de abscisa x=a. Una de las dificultades en el aprendizaje de este concepto identificada por investigaciones previas es que los estudiantes tienden a comprender la derivada de una función desde una sola perspectiva o modo de representación, y mayoritariamente es la perspectiva o modo de representación analítico el que domina en la comprensión de los estudiantes (Habre y Abboud, 2006). En consecuencia, tienen dificultades para resolver problemas relacionados con diferentes modos de representación (Sánchez-Matamoros et al., 2006), o para relacionar el significado de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto con la derivada de dicha función en ese punto. Estas dificultades en muchas ocasiones hacen que el estudiante no sea capaz de esbozar el gráfico de la derivada de una función (Ferrini-Mundy y Graham, 1994), o de relacionarlo con la expresión analítica.

Por tanto, el docente tiene que ser consciente cuando planifica la lección sobre el concepto de derivada que para que los estudiantes lleguen a conseguir el objetivo planteado es necesario que coordinen los modos de representación analítico y gráfico a través del establecimiento de relaciones entre elementos matemáticos vinculados a la derivada de una función tanto con carácter puntual, es decir, en un punto; como global, es decir, considerar las relaciones entre una función y su función derivada en un intervalo (a, b). Desde investigaciones previas se ha identificado que una de las formas de progresar en el aprendizaje del concepto de derivada y de esta manera llegar a la comprensión de dicho concepto, se pone de manifiesto a través del uso de los elementos matemáticos vinculados al modo de representación analítico con carácter puntual en primer lugar y posteriormente con carácter global (en un intervalo) para finalizar coordinando o relacionando elementos matemáticos en ambos modos de representación analítico y gráfico (Figura 5).

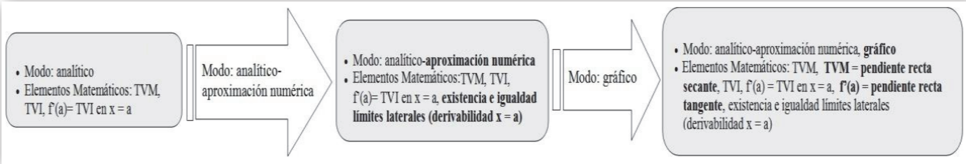


Figura 5. Progresión en el aprendizaje de una trayectoria de aprendizaje de la derivada para estudiantes de Bachillerato (Sánchez-Matamoros et al., 2006)

A continuación, mostramos a modo de ejemplo una secuencia de tareas vinculada a esta progresión en el aprendizaje (Figura 5). En la tabla 2, se presentan las tareas 1 y 2 que posibilitan la primera transición señalada en la Figura 5. En la tarea 1 se da la expresión analítica de una función *f* y se pide la tasa de variación media (TVM) en un intervalo, así como su paso al límite (TVI) en el punto de abscisa x=1. En la tarea 2, se presenta una tabla de valores de una cierta función *f* continua y se pide que a partir de estos valores indique el valor de la derivada de *f* en x=2 y si la información proporcionada por la tabla permitiría afirmar si la función es derivable en x=1.

Tabla 2. Ejemplos de tareas de derivada (Sánchez-Matamoros et al., 2006)

Tipo de tarea: derivada de una función con carácter puntual y global en modo de representación analítico

Tarea 1

Calcula la tasa de variación media (TVM) de

$$f(x) = \frac{x+3}{x+2}$$

en el intervalo [1, 2] ¿qué sucede con la tasa de variación instantánea (TVI) de *f* (x) en el punto (1, *f* (1))?

Tarea 2

De una cierta función *f* continua conocemos algunos valores dados en la siguiente tabla:

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	1	1.00001	1.0001	1.001	1.01	1.1
f(x)	-2.1	-2.01	-2.001	-2.0001	-2.00001	-2	-2.00002	-2.0002	-2.002	-2.02	-2.2

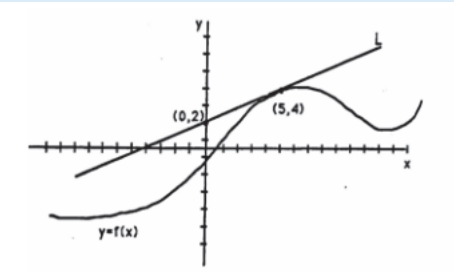
x	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	2	2.00001	2.0001	2.001	2.01	2.1
f(x)	3.61	3.9601	3.996001	3.99960001	3.99996	4	4.00004	4.00040001	4.004001	4.0401	4.41

a) Usa esta tabla para aproximar el valor de la derivada de *f* en x=2.
b) A partir de la información que te da esta tabla, ¿crees que $f(x)$ es derivable en x=1?

A continuación, en la tabla 3, se muestran tres tareas. La tarea 3 se presenta la gráfica de una función *f* y se pide el valor de la función en x=5 y de su derivada

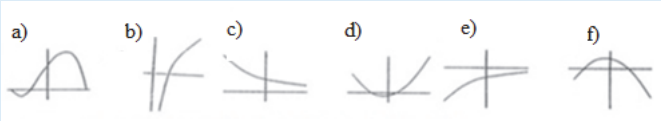
f'en x=5 (la pendiente de la recta tangente en x= 5). Esta tarea permite hacer uso del significado gráfico de la derivada con carácter puntual lo que favorece la segunda transición. Esta transición en la progresión en el aprendizaje se da cuando los estudiantes amplían el significado de la derivada desde la perspectiva analítica a la gráfica en primer lugar con carácter puntual para posteriormente hacerlo con carácter global, es decir, la relación entre la función y su derivada en un intervalo. La tarea 4, en la que se pide emparejar gráficas de funciones con las de su derivada, sin tener las expresiones analíticas de dichas funciones, permitirá al estudiante establecer relaciones en la interpretación gráfica de la derivada lo que posibilitará dicha transición con carácter global. Para finalizar, la tarea 5, en la que se proporciona información en modo de representación analítico sobre una función y sus derivadas primera y segunda, y se pide esbozar la gráfica de la función, también permitirá que el estudiante pueda progresar en su aprendizaje a través de esta segunda transición estableciendo relaciones entre elementos matemáticos en los modos de representación analítico y gráfico en una situación nueva para él. La situación que plantea esta tarea 5 requiere, en su resolución por parte del estudiante, del uso del significado de los elementos matemáticos lo que llevará al estudiante al desarrollo de una comprensión conceptual del concepto de derivada. Además, las características de las funciones que consideremos en este tipo de tareas, como la existencia de puntos angulosos y cúspides, o la condición de continuidad, también ayudarán al estudiante a consolidar el conocimiento construido. En la Tabla 4 se presenta otra tarea (tarea 6) dada en modo de representación gráfico que también promueve este tipo de construcción.

Tabla 3. Ejemplos de tareas de derivada (Sánchez-Matamoros et al., 2006)

Tipo de tareas: relaciones entre la función y su función derivada con carácter puntual y global en modos de representación analítico y gráfico
Tarea 3 Suponer que la línea L es tangente a la gráfica de la función f en el punto (5, 4) como aparece en la figura, encontrar el valor de la función en x = 5, f (5) y el de la función derivada en el mismo punto, f '(5) 

Tarea 4

Analiza las gráficas siguientes:



¿Cuántas parejas producirías de cada función con su derivada?

Tarea 5

Esboza la gráfica de una función que satisface las condiciones siguientes:

a) f es continua en su dominio b) $f(2) = 0$ c) $f'(5) = 0$ d) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -4$

e) $\lim_{x \to 8^-} f(x) = -\infty$ f) $f'(x) < 0$ cuando $5 < x < 8$ g) $f'(x) > 0$ cuando $x < 5$

h) $f''(x) < 0$ cuando $3 < x < 8$ i) $f''(x) > 0$ cuando $x < 3$

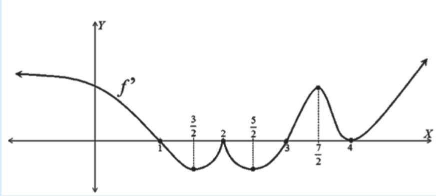
En dicha tarea (Tabla 4), se pide construir la gráfica de f a partir de la gráfica de f'. La gráfica de f' contempla varios cambios de signo, crecimiento, ceros, puntos de tangencia horizontal y un punto anguloso. En la resolución de la tarea el estudiante deberá establecer relaciones entre elementos matemáticos que vinculan los ceros y valores extremos de f' con los valores extremos y puntos de inflexión de f; el signo de f' con la monotonía de f; y el crecimiento de f' con la convexidad de f. Por tanto, en este tipo de tareas es necesario establecer relaciones entre la función, su derivada y su derivada segunda para llegar a su resolución (Fuentealba et al., 2016).

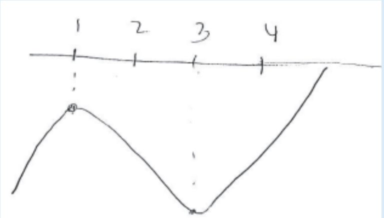
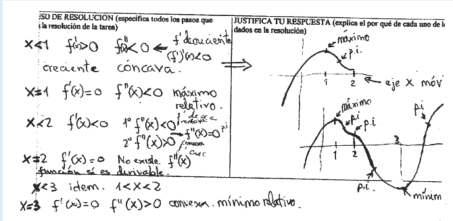
Tabla 4. Ejemplo de tarea de construcción de una función f a partir de la gráfica de su función derivada (Spivak (1974) citado en García et al. (2011) y respuestas de dos estudiantes

Tipo de tarea: establecer relaciones entre la función, su derivada primera y su derivada segunda

Tarea 6

La gráfica corresponde a la derivada de f, esboza las posibles gráficas de f.



Respuesta Estudiante 1	**Respuesta Estudiante 2**
	

Análisis de las respuestas: dificultades de los estudiantes

El **Estudiante 1**, para esbozar la gráfica de la función *f*, ha podido realizar un cambio de modo de representación gráfico al analítico para obtener información sobre la función. De carácter global sobre la monotonía de *f*: *f'* es positiva (*f'*>0) en los intervalos (-∞, 1), (3,4) y (4, + ∞), entonces *f* es estrictamente creciente en dichos intervalos. *f'* es negativa (*f'*<0) en los intervalos (1,2) y (2,3), luego *f* es estrictamente decreciente en dichos intervalos. Además, de los ceros de *f'* obtiene información puntual sobre los posibles valores extremos o puntos de inflexión de *f* : *f'* tiene ceros en los puntos de abscisa *x*=1, *x*=2, *x*=3 y *x*=4, por lo tanto, puede que f tenga un valor extremo (máximo o mínimo) o punto de inflexión en los puntos con dichas abscisas. También ha establecido relaciones de la información global y puntual obtenida anteriormente, y considera que si *f'* tiene signos distintos a la izquierda y a la derecha de los puntos de abscisa *x*=1 y *x*=3, es porque *f* tiene un máximo local en *x*=1 y un mínimo local en *x*=3. Sin embargo, el estudiante muestra dificultades en realizar el esbozo correcto de *f* al no tener en cuenta el comportamiento de la segunda derivada de *f*.

El **Estudiante 2**, además de usar la información con carácter global y puntual considerada por el estudiante 1, también ha tenido en cuenta el comportamiento de *f''* a partir de la gráfica de *f'* de la tarea, obteniendo información sobre la curvatura de *f* (cóncava o convexa), y considera los intervalos en los que *f''* es positiva o negativa. Para ello este estudiante ve *f''* como la derivada de *f'* (escribe (*f'*)') y establecer relaciones entre ellas: *f'* es estrictamente decreciente en los intervalos (-∞, 3/2), (2,5/2) y (7/2, 4), luego *f''*<0 por lo tanto *f* es cóncava en dichos intervalos; *f'* es estrictamente creciente en los intervalos (3/2, 2), (5/2, 7/2) y (4, + ∞), luego *f''*>0, por lo tanto, *f* es convexa en dichos intervalos. De la información global obtenida deduce la información puntual relativa a los puntos de abscisas *x*=3/2, x=2, *x*=5/2, *x*=7/2 y *x*=4 en los que hay cambios de curvatura en la función *f*. Lo que le lleva a deducir que *f* posee puntos de inflexión en (3/2, *f* (3/2)), (2, *f* (2)), (5/2, *f* (5/2)) (7/2, *f* (7/2)) y (4, *f* (4)). De esta forma, y considerando en conjunto la información global y puntual proporcionada por las relaciones entre *f*, *f'* y *f''* el estudiante 2 realiza el esbozo correcto de la gráfica de *f*.

En general, un estudiante de Bachillerato considerará que la gráfica realizada por el estudiante 1 (Tabla 4) es correcta, aunque no lo es, ya que no tiene en cuenta el estudio de la curvatura de *f* en los distintos intervalos de su dominio. Para hacer un esbozo de la gráfica de *f* correcto no solo se deben establecer relaciones entre *f* y *f'*, sino que también es fundamental establecer relaciones entre *f'* y *f''* y coordinarlas, para ello deberán considerar *f'* como una función y *f''* como su derivada. En este sentido, la gestión del docente es fundamental durante la resolución de la tarea por parte del estudiante, para que no llegue a convertirse en un obstáculo para la comprensión del concepto de derivada en niveles superiores de enseñanza (Fuentealba et al., 2017).

Finalmente, también considerar en la gestión del aula el uso de recursos informáticos como software de matemáticas gratuitos ya que estos pueden facilitar a los estudiantes el poder establecer relaciones entre los diferentes modos de representación en la resolución de las tareas o problemas.

Sentido numérico

El sentido numérico se desarrolla gradualmente como resultado de explorar situaciones que requieren el empleo de números y operaciones con flexibilidad y comprensión. Las actividades que promueven el desarrollo del sentido numérico plantean situaciones en las que hay que estimar y aproximar, componer y descomponer números, comunicar e interpretar información numérica, buscar relaciones y patrones en los números, reconocer errores al operar con números, usar diferentes niveles de precisión con los números, inventar formas de calcular un resultado o usar un resultado numérico para tomar una decisión (CEMAT, 2021).

En este sentido, en Bachillerato se deben ver los conjuntos numéricos desde una perspectiva más global. El alumnado debería aprender las diferencias entre los distintos conjuntos numéricos y qué propiedades se conservan y cuáles no al pasar de un conjunto a otro, operar con fluidez números reales y tener cierta competencia con vectores y matrices para resolver problemas, utilizando la tecnología cuando sea apropiado, y saber decidir inteligentemente qué herramientas usar y cuándo usarlas para realizar cálculos con fluidez, así como saber elegir entre el cálculo mental, estrategias de lápiz y papel, la estimación y el uso de la calculadora. Las tareas que se planteen deben ir enfocadas a la activación de procesos cognitivos de conexión y reflexión, de forma que los procesos de reproducción tengan menor protagonismo. Un conjunto de tareas que podrían ser útiles para que el alumnado pueda conseguirlo son las siguientes:

> Consideremos tres puntos A, B y C. A es $\frac{7}{8}$, B es $\frac{7}{18}$, y C es $\frac{1}{2}$. Sin encontrar la distancia exacta, elige quién está más cerca de C. Justifica tu respuesta.

Probablemente el estudiantado habrá realizado actividades de representación de fracciones con cierta frecuencia en cursos inferiores, el objetivo de esta actividad no es poner en práctica esa habilidad (proceso cognitivo de reproducción), sino poner de manifiesto cómo es el conocimiento de los estudiantes en relación con los números racionales, ya que para justificar la respuesta dada, necesitan ser capaces de estimar el tamaño de esos números racionales cuando el tamaño de los números enteros que componen esas fracciones son de tamaños muy diferentes. Tratándose de tres números racionales, no enteros, lo que denotaría un mayor desarrollo de sentido numérico sería, sin ni siquiera tener que representarlos o calcular las distancias de A, B y C, o pasarlos a fracciones con el mismo denominador, pensar en qué número decimal están representado esas fracciones. En el caso de $\frac{1}{2}$ está bastante claro (0,5), en el caso de $\frac{7}{8}$ puedo pensar que debe ser un número cercano a 1 ya que 7 está muy cerca de 8. Y en el caso de $\frac{7}{18}$ puedo pensar que es un número algo menos que 0,5 puesto que 18 es algo más del doble de 7. Por lo que podríamos decir B<C<A y que B está más cerca de C que A.

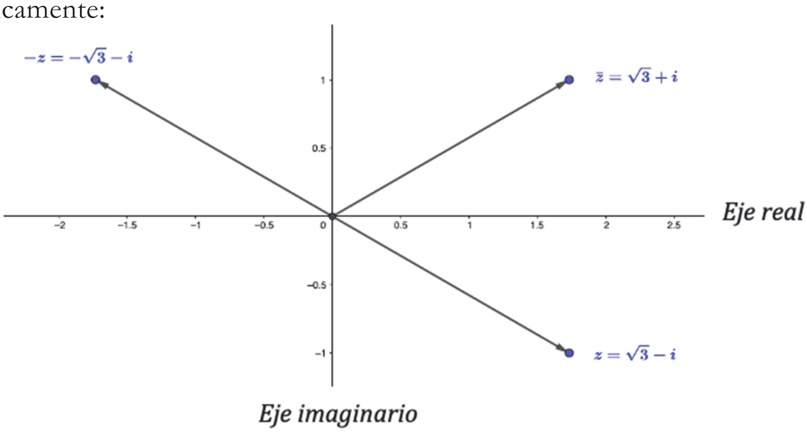
En relación con el conjunto de los números complejos proponemos un par de tareas, en la primera de ellas se pretende que el estudiante relacione diferentes modos de representación y en la segunda que construya con significado el conjunto de los números complejos:

> Dado el número complejo $z = \sqrt{3} - i$, represéntalo gráficamente y exprésalo en forma polar. ¿Podrías obtener su opuestos y su conjugado?

En un posible proceso de resolución, el estudiante tendrá que considerar que el opuesto de un número complejo $z = a + bi$, es $-z = -a - bi$, y el conjugado $\bar{z} = a - bi$. En nuestro caso:

$$-z = -\sqrt{3} + i \;\; \rightarrow \;\; \bar{z} = \sqrt{3} + i$$

Gráficamente:



Si al número complejo $z = 2 + i$ le sumamos 3, ¿qué tipo de número obtendremos? Justifica tu respuesta

a) Un número complejo.
b) Un número entero.
c) Un número racional.

El estudiante para poder contestar la tarea debe considerar que al sumarle a un número complejo un número real, la parte imaginaria permanece invariable, y que lo que se obtiene es un número complejo, por tanto, la opción correcta sería a. En nuestro caso:

$$\mathrm{z} = 2 + \mathrm{i} \quad \rightarrow \quad \mathrm{z} + 3 = 5 + \mathrm{i} \ \in \ \mathbb{C}$$

Otro tipo de tareas que se debe considerar en este nivel educativo son las relacionadas con las propiedades de los conjuntos numéricos. A modo de ejemplo, mostramos la siguiente tarea que permite apreciar la densidad del conjunto de los números reales:

Escribe tres números reales que estén entre $\frac{1-\sqrt{4}}{3}$ *y 1*

En un posible proceso de resolución el estudiante puede transformar $\frac{1-\sqrt{4}}{3}$ en una expresión equivalente que le pueda ayudar a estimar mejor, en este caso podría ser $-\frac{1}{3}$. Luego, el estudiante debe encontrar tres números reales que estén entre $-\frac{1}{3}$ y 1. Por la densidad del conjunto de los números reales, entre dos números reales $-\frac{1}{3}$ podemos encontrar infinitos números reales, el estudiante sólo debe elegir tres de entre las infinitas posibles soluciones que tiene, por ejemplo:

$$-\frac{1}{3} < 0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1$$

Para finalizar, considerar también que el estudiante de Bachillerato debe realizar cálculos con fluidez, así como saber elegir entre el cálculo mental, estrategias de lápiz y papel, la estimación y el uso de la calculadora. Un ejemplo de este tipo de tareas es la siguiente:

Estima el resultado de la siguiente multiplicación $2{,}5 \cdot 10^{7} \times \ 0{,}5 \cdot 10^{-4}$.

En un posible proceso de resolución, el estudiante puede aplicar la propiedad asociativa y multiplicar 2,5 · 0,5 , y usar que multiplicar por 0,5 es lo mismo que dividir por 2, obteniendo que el resultado es la mitad, es decir, 1,25. Y por otro lado, efectuar el producto de potencias de la misma base obteniendo que $10^{7} \cdot 10^{-4} = 10^{3}$.

Por último, hacer uso del cálculo mental de 1,25 por 10^{3}: $1{,}25 \cdot 10^{3} = 1250$

Las justificaciones dadas por el alumnado nos permitirán observar las estrategias usadas y el nivel de desarrollo del sentido numérico.

Reflexión final

Un aspecto del Bachillerato que debe tenerse en cuenta por parte del docente de este nivel educativo es el papel que tienen estos dos cursos en la transición de los estudiantes a la universidad. Estos cursos deben preparar a los estudiantes para sus estudios posteriores y capacitarlos para las pruebas de acceso a la universidad. Estos dos objetivos pueden parecer complementarios: los estudiantes que superan esos exámenes deben estar mejor preparados para sus estudios universitarios. Sin embargo, en la práctica, las experiencias de la mayoría de los estudiantes de estos cursos es que no son necesariamente lo que necesitan para sus estudios universitarios. La preparación para los exámenes hace que la enseñanza se enfoque en procedimientos y no prepara a los estudiantes para el rigor, el razonamiento y la abstracción que necesitan para sus estudios universitarios de matemáticas (Biza et al., 2016). El docente debe ser consciente de ello para que estos cursos no terminen sirviendo únicamente para preparar a los estudiantes para las pruebas de acceso a la universidad.

Referencias

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos [Teaching of calculus principles: epistemological, cognitive and didactical problems]. In: Gómez P, editor. *Ingeniería didáctica en educación matemática [Didactic engineering in mathematics education*]. México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Badillo, E., Azcarate, C. y Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f'(a) y f'(x) en profesores de Matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(2), 191–206.

Batanero, C. y Gea, M. (2018). El riesgo como contexto en la enseñanza de la probabilidad condicional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 31*(1), 125-132.

Biza, I., Giraldo, V., Hochmuth, R., Khakbaz, A. y Rasmussen, C. (2016). *Research on Teaching and Learning Mathematics at the Tertiary Level: State-of-the-art and Looking Ahead.* ICME-13 Topical Surveys, Springer International Publishing AG Switzerland. Available at http://www.springer.com/gp/book/9783319418131.

Comité Español de Matemáticas (CeMat). (2021). Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria. https://matematicas.uclm.es/cemat/wp-content/uploads/bases2021.pdf.

Clements, D. y Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6* (2), 81-89. https://dx.doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_1

Ferrini-Mundy, J. y Graham, K. (1994). Research in calculus learning. Understanding limits, derivates and integrals. In J. Kaput y E. Dubinsky (Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning, MAA notes 33* (pp. 31–45). Washington, DC: Mathematical Association of America

Fuentealba, C., Sánchez-Matamoros, G. y Badillo, E. (2016). Análisis de tareas que pueden promover el desarrollo de la comprensión de la derivada. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 70*, 72-77.

Fuentealba, C., Sánchez-Matamoros, G., Badillo, E. y Trigueros, M. (2017). Thematization of derivative schema in university students: nuances in constructing relations between a function's successive derivatives. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 48*(3), 374-392.

García, M., Llinares, S. y Sánchez-Matamoros, G. (2011). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*, 1023–1045.

Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2008). Preparing school teachers to develop students' statistical reasoning. *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASE Study*: The 18th ICMI Study, 299-310.

Habre, S. y Abboud, M. (2006). Student's conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *The Journal of Mathematical Behavior, 25*, 57–72.

Kaput, J. (2008). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? En J. Kaput, D. Carraher, y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). University of Massachusetts.

Labraña, A., Plata, A., Peña, C., Crespo, E. y Segura, R. (1995). *Álgebra lineal. Resolución de sistemas lineales*. Editorial Síntesis.

NCTM. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática.

Paparistodimou, E., Meletiou-Mavrotheris, M. y Serradó, A. (2017). Problemas de modelización y razonamiento estadístico. *Investigación en la enseñanza de las matemáticas (9*), 10.12681/enedim.14179.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada [The development of derivative schema]. *Enseñanza de las Ciencias, 24*(1), 85–98.

Sánchez-Matamoros, G. y Fernández, C. (2016). Secuencia de actividades para el aprendizaje de la derivada desde una trayectoria de aprendizaje. En: *UNO-Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 72. 40-45).

Wilson, P.H., Mojica, G.F. y Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understandings of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematical Behavior, 32*, 103-121.

Matemáticas en la Universidad

Mathematics at the University

Camacho-Machín, M.; Perdomo-Díaz, J.; Trujillo-González, R.
Universidad de La Laguna

Resumen

En este capítulo se presenta una aproximación hacia la enseñanza de las Matemáticas en el nivel Universitario, tomando como referencia algunos resultados obtenidos en el ámbito de la investigación realizada en nuestro país. Se comienza haciendo una reflexión inicial sobre los resultados principales obtenidos en los últimos 25 años, para continuar con una discusión en torno a la transición desde la Educación Secundaria hasta la Universidad, las dificultades que emergen en ese contexto, relacionadas principalmente con la adaptación de los contenidos y metodología empleadas, y el impacto que deberían tener las tecnologías digitales y la resolución de problemas en la enseñanza de los conocimientos que demanda actualmente la Sociedad. El capítulo finaliza mostrando algunos ejemplos de actividades para trabajar conceptos matemáticos propios del ámbito universitario, surgidos y adaptados de investigaciones en las que han participado los autores.

Palabras clave: Matemáticas universitarias, Tecnología, Resolución de problemas.

Abstract

This chapter presents an approach for teaching Mathematics at the university level, taking as a reference some results obtained in the field of research carried out in our country. It begins by making an initial reflection on the main results obtained in the last 25 years, and then continues with a discussion on the transition from secondary education to university, the difficulties that emerge in this context, mainly related to adapting the content and methodology used, and the impact that digital technologies and problem solving should have on teaching the knowledge that society currently demands. The chapter concludes with some examples of activities for practicing mathematical concepts typical of a university environment, resulting and adapted from research in which the authors have participated.

Keywords: University mathematics, Technology, Problem solving.

Introducción

Hablar de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en la Universidad no es una tarea sencilla, por lo que se requiere hacer unas precisiones iniciales para situar los elementos que darán lugar a este capítulo. Se tratará aquí de establecer algunas recomendaciones y presentar algunos ejemplos que emergen de la investigación que se ha llevado a cabo en los últimos años en este campo, que ha permitido encontrar pequeños avances que los sustentan. Desde la SEIEM, se ha prestado atención a este ámbito de investigación (aunque menos que en otros niveles educativos), de modo que algunos resultados de esas investigaciones han sido presentados en diversos Seminarios de Investigación y publicados en sus correspondientes actas. Bien es verdad que, en ningún caso, se puede decir que esas actas recogen todos los resultados de investigación, pero sí se ha tratado de presentar un panorama más o menos extenso (Camacho-Machín, 2005, 2011 y 2021) directamente relacionado con las matemáticas universitarias. Recientemente, la revista Avances de Investigación en Educación Matemática, publicada en el seno de la SEIEM, ha publicado un monográfico titulado "El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en la Universidad" (Vol 21, 2022) que incluye seis trabajos de investigación situados en el ámbito de las Matemáticas universitarias.

Se podría decir que, en términos generales, la mayor parte de avances de la investigación en los niveles universitarios en los últimos veinticinco años se ha producido en el ámbito del grupo GIDAM[1] que, en el año 2015, publicó el libro *Didáctica del Análisis Matemático: Una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM* (Azcárate et al., 2015). Este libro se organiza en torno a cuatro bloques, cada uno de los cuales contiene diversos capítulos donde se presentan los marcos teóricos que fundamentan las diferentes investigaciones en el campo, los conceptos matemáticos como eje central de las investigaciones sobre enseñanza y/o aprendizaje, el papel de la tecnología en las investigaciones que se han realizado y la figura del profesor. En líneas generales, y en palabra de los editores, se trató de proporcionar una visión lo más completa posible sobre:

> Las actuales tendencias de investigación de esta área, tanto en el ámbito nacional como internacional.
> El conocimiento generado y los principales resultados de investigación en didáctica del análisis matemático en el seno del grupo de investigación GIDAM.

1. GIDAM es el acrónimo del Grupo de Investigación de Análisis Matemático de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) (https://www.seiem.es/grp/gidam.shtml). La Didáctica del Análisis Matemático no es el único tópico de investigación en este grupo, aunque sí ha sido el mayoritario. Existen otros grupos de trabajo en nuestro país que realizan investigaciones relevantes en el ámbito internacional, relacionados con Estadística y Probabilidad, Álgebra… pero no se tratarán en este capítulo, por falta de espacio y tiempo.

> Las características de los procesos de transferencia del conocimiento, tanto por las aportaciones de los resultados de las investigaciones en torno a la enseñanza, el currículo, la formación de profesores, etc., como por la influencia de los avances tecnológicos en el diseño de propuestas innovadoras para la enseñanza del análisis matemático. (p. 12)

En el simposio de la SEIEM, celebrado en 2021, se desarrolló un Seminario de Investigación titulado "La enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la Universidad" en el que se presentaron tres ponencias. Henriques (2021) mostró los resultados obtenidos haciendo uso de lo que denominan "tareas de prácticas exploratorias haciendo uso de tecnología", indicando que repercuten positivamente en el aprendizaje de los estudiantes respondiendo con ello a los retos y necesidades actuales. Por otra parte, Biza (2021) destacó la singularidad de la Educación Matemática Universitaria como área que depende en gran medida de las instituciones y de los contenidos que deciden tratar esas instituciones, lo que hace que la Educación Matemática Universitaria no dependa solamente de la investigación sobre su enseñanza y aprendizaje, sino de las diferentes instituciones involucradas. Finalmente, Camacho-Machín (2021) presentó una agenda de investigación que recoge diferentes aspectos que se deberían tener en cuenta en la investigación, y a los que se debería prestar atención en nuestro país, de cara a mejorar la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas universitarias, como los siguientes:

– Habría que potenciar los estudios centrados en la enseñanza y aprendizaje de estudiantes de las diferentes ingenierías, ciencias experimentales, económicas y otras ciencias que requieran una formación matemática diferente a la de los matemáticos. En particular, es necesario dar un impulso a la investigación sobre la modelización matemática analizado desde otras perspectivas diferente a las epistemológicas.
– Debería darse un papel más importante a las investigaciones relacionadas con el campo afectivo, estudiar las creencias y concepciones que tanto los estudiantes como los docentes universitarios tienen sobre las matemáticas, la enseñanza y sobre su propia naturaleza.
– Se requiere también que la investigación se oriente hacia las prácticas docentes tanto de los profesores como de los estudiantes y las instituciones.

También se destaca la importancia de mejorar los cursos de matemáticas relacionados con la transición de la Educación Secundaria a la Universidad, así como la necesidad de utilizar las tecnologías digitales y la resolución de problemas como elementos que contribuyan al desarrollo del aprendizaje de las matemáticas universitarias. En ese sentido, Camacho-Machín (2021) señala que las TIC están a la disponibilidad de todos los estudiantes universitarios, por lo que es fundamental seguir desarrollando investigaciones en torno al uso de esos recursos como materiales de apoyo para el aprendizaje.

La resolución de problemas haciendo uso de tecnologías digitales es también esencial. Hay una escasez de proyectos de investigación que emplean para su desarrollo entornos dinámicos de trabajo como GeoGebra (p. 42).

Y también hace mención específica al aspecto concreto de la demostración y la prueba, que cada vez más está siendo olvidado sobre todo en los cursos de matemáticas universitarias en las Ingenierías y en general en las Ciencias (Química, Ambientales, de la Salud, etc.) e indica que:

Es también importante determinar el papel de la prueba y la argumentación en el aprendizaje de las matemáticas en el nivel universitario. El uso de los diferentes teoremas matemáticos sin entender y distinguir la hipótesis de la tesis y el desarrollo de argumentos que los justifiquen requieren también de mayor atención. (p. 42)

En relación con la Agenda de Investigación que establece en su ponencia Camacho-Machín (2021), destaca lo que señala Artigue (2019) quien habla de la necesidad del desarrollo de "cursos puente" de matemáticas, la promoción del trabajo colaborativo entre estudiantes, profesores, matemáticos e investigadores en Didáctica de las Matemáticas, la utilización de la amplia gama de recursos disponibles, así como la importancia de desarrollar acciones dirigidas hacia la formación de tutores académicos universitarios.

No es fácil abordar soluciones a los retos señalados debido a varios factores (Camacho-Machín, 2021) entre los que se encuentran, la escasa valoración de la docencia en la promoción de los docentes universitarios y su escasa formación didáctica. Creemos que es importante la formación inicial del profesorado universitario de Matemáticas dado que su formación actual no los prepara para enfrentarse al amplio abanico de dificultades que se encontrarán cuando ejerzan su labor de enseñanza.

La concepción tradicional de separar la teoría y la práctica en la enseñanza universitaria de las matemáticas es otro de los problemas que destaca Artigue (2019). Esa división fomenta una separación que no es real en el propio ámbito de la investigación que se realiza en el campo de las Matemáticas, dado que cada vez más se busca la interpretación real de los avances de la investigación. La constatación de la poca atención que se le ha prestado tradicionalmente a la difusión y transferencia de los resultados de investigación en el área de Didáctica de la Matemática es otro de los puntos débiles en el ámbito universitario, por lo que la colaboración entre los diversos colectivos que se ocupan de la enseñanza de las matemáticas universitarias (didactas de las matemáticas, investigadores y docentes) resulta fundamental para trabajar conjuntamente para la mejora de la enseñanza universitaria.

La *Encyclopedia of Mathematics Education* (Lerman, 2020) incorpora diez entradas asociadas al ámbito de la Didáctica de las Matemáticas relacionados con la Universidad. La que podemos considerar "primera entrada" es aquella que elaboran Winsløw y Rasmussen (2020) y que denominan *University Mathematics Education* (UME), y en la cual establecen los elementos clave de estas Matemáticas. En este capítulo nos referiremos en ocasiones como Educación Matemática Universitaria y también con su acrónimo original. Las otras nueve entradas están relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de tópicos concretos: Álgebra Abstracta, Análisis Matemático, Ecuaciones diferenciales y Álgebra Lineal. También hay una entrada dedicada al estudio de la Lógica y dos entradas más relacionadas con la formación y desarrollo profesional del profesorado universitario de matemáticas. Presenta también la Encyclopedia un espacio dedicado a la transición entre las matemáticas de la Educación Secundaria y de la Universidad, así como otro dedicado a las prácticas de enseñanza de las matemáticas universitarias.

En este capítulo trataremos de dar una visión general de algunos de los aspectos que hemos mencionado. Para ello, dedicaremos los siguientes apartados a presentar un breve análisis de la realidad que se constata en la transición de los estudiantes desde la Educación Secundaria hasta la Universidad. Posteriormente haremos una revisión de algunos proyectos internacionales que atienden tanto a la problemática de esta transición como a la mejora, mediante la práctica, del aprendizaje de los conceptos matemáticos en los primeros cursos universitarios, principalmente a través de proyectos auspiciados por Erasmus+. Finalmente, se presentan dos ejemplos de secuencias de actividades que muestran cómo se pueden usar las tecnologías digitales y la resolución de problemas para la enseñanza de las matemáticas en los cursos iniciales de la Universidad.

La transición entre Educación Secundaria y Universidad

El debate sobre el paso de las Matemáticas de la Educación Secundaria a las Matemáticas universitarias es muy antiguo. Klein (2016) lo hace explícito en la introducción de su libro “Matemática elemental desde un punto de vista superior”, presentando lo que denomina el problema didáctico de la doble discontinuidad, que se relaciona con el salto que existe de la matemática y su forma de enseñarla en los cursos de la Educación Secundaria y la formación matemática que reciben en la Universidad (primera discontinuidad) y la matemática con la que los profesores de Secundaria se vuelven a encontrar cuando entran nuevamente en la escuela para enseñarlas (segunda discontinuidad) después de haber recibido su formación universitaria. Parafraseando a Klein, en relación con la “primera” discontinuidad, el estudiante universitario se encuentra con problemas de matemáticas que no ha tratado en la Secundaria, olvidándose así de muchos aspectos de esas matemáticas. Cuando termina sus estudios universitarios y vuelve o al aula como profesor o a la vida profesional aparece esa otra discontinuidad con la matemática que volverá a necesitar para desenvolverse.

Desde los años 70 del siglo pasado, las distintas Universidades exigen unas pruebas de acceso que los estudiantes que deseen entrar en sus facultades deben superar. Estas pruebas han ido recibiendo distintas denominaciones a lo largo de los años (Selectividad, 1975, PAU, 2006, y EBAU, 2017, incluso cambiando de una comunidad autónoma a otra). A pesar de estos cambios, la impresión que se tiene de la propia experiencia, es que todas estas versiones tienen algo en común: se pueden preparar y superar aprendiendo una serie de rutinas para la resolución de las actividades que componen la prueba.

Después del análisis realizado comparando los resultados obtenidos en la PAU y la EBAU en varios años, Nortes et al (2021) concluyen que los estudiantes (de 2º curso de Bachillerato que habían cursado la materia de Matemáticas aplicadas a las Ciencias sociales II) se sienten mejor cuando aplican una fórmula que aplicando un razonamiento, que les falta rigor y precisión en los cálculos. También indican los autores que se sigue preparando al alumnado para resolver los problemas rutinarios típicos de las pruebas, las cuales siguen estando alejadas del currículo oficial y en definitiva, se repiten los problemas con ligeras variaciones.

Otro aspecto que destacan en su análisis de las pruebas de acceso es que existe una escasa diferencia entre los exámenes propuestos en las PAU y los exámenes de EBAU, pese al cambio de modelo.

En ese mismo artículo, los autores indican que los resultados obtenidos son similares a los obtenidos en estudios anteriores. En las pruebas de EBAU que ellos analizan, la media obtenida es un 4,32 (p. 224), siendo similares a los de otros estudios realizados con anterioridad.

Todo esto conduce a multitud de interrogantes que forman parte de las problemáticas de interés en el ámbito de la investigación en Didáctica de la Matemática: ¿Qué información aportan las pruebas de acceso universitario sobre el desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes? ¿Cómo se relaciona el éxito en dichas pruebas con el éxito en la Universidad, en particular en los primeros cursos? ¿Reflejan esas pruebas el conocimiento matemático que los estudiantes necesitan para enfrentar con garantías los primeros cursos universitarios? ¿Son esos conocimientos iguales, independientemente del Grado que los estudiantes vayan a cursar?

Por otra parte, el entorno socioeconómico que rodea a la Universidad no es ajeno a lo que se hace en sus aulas, laboratorios y salas de reuniones. El alumnado, sus familias, los gobernantes, los empleadores, los emprendedores, …, es decir, todos los actores de nuestro sistema, solicitan a la Universidad que sea parte de las soluciones de los problemas que le preocupan (bienestar, salud, medio ambiente…), pero especialmente se le exige uno: que proporcione a sus alumnos verdaderas herramientas para tener una vida mejor (el conocido lema de "mejor vida que sus padres").

Puede costar encajar cómo podemos atender esta realidad socio-económica en la enseñanza de las Matemáticas. Nuestro punto de vista es simple: haciendo todo lo posible, de manera continuada e innovadora, para reducir las tasas de abandono y fracaso asociadas a las asignaturas de Matemáticas.

Esta dinámica repercute positivamente en la satisfacción de todos los actores (alumnos, profesores, administradores y familias):

- el profesorado enseñará de forma más satisfactoria.
- el alumnado se enfrentará a procesos de aprendizaje novedosos, motivantes y que atajan con antelación dificultades comunes y propias de la etapa.

– los administradores verán mejorados los indicadores académicos que determinan las acreditaciones de títulos por las agencias de calidad correspondientes.
– la sociedad en general (familias, empleadores, emprendedores, etc.) percibirá mayor satisfacción en sus graduados, motivación y confianza, necesarias para afrontar los altos niveles de fracaso y abandono, especialmente en las asignaturas de Matemáticas.

Muchos grados de las enseñanzas científico-técnicas, principalmente las ingenierías[2], presentan indicadores de fracaso muy altos, y las tasas de abandono en dichos grados son tales que se hace necesario mantener una especial atención sobre ellos.

Entre las y los estudiantes que abandonan**,** más de la mitad lo hace después del primer año, lo que demuestra que el inicio del grado es el momento más delicado de cara a la continuidad en los estudios.

El tratamiento de esta situación requiere un continuo proceso de detección de problemas, análisis de la situación, generación de herramientas de intervención, y análisis de impacto de las mismas.

En esta dirección, y por tener las Matemáticas un protagonismo tal vez excesivo en la causa de estos indicadores, las Universidades instauraron hace décadas los denominados Cursos Cero pre-universitarios para los alumnos de nuevo ingreso. Incluso algunos grados ya lo han introducido en sus programaciones como parte de su calendario oficial, siguiendo las sugerencias de mejora de las renovaciones de acreditación o procesos de modificación de los títulos.

Desde nuestro punto de vista son insuficientes por las siguientes razones:

– Reducen las causas del fracaso al déficit de conocimientos de Bachillerato, desproblematizando los procesos de enseñanza-aprendizaje implementados en los grados.
– Buscan la homogeneización del alumnado en escenarios cada vez más diversos. De forma más concreta, pretenden modelar al alumno medio que deseamos en nuestras aulas, pero no analiza el estado del alumno que recibimos para saber qué necesita realmente para afrontar la nueva etapa educativa.
– Esto se refleja especialmente en la oferta de un curso cero similar para todos los grados científico-técnicos, sin distinguir qué requiere cada uno de ellos. No podemos reducir todo a que sepan resolver sistemas de ecuaciones y derivar.
– Permanecen en el tiempo sin adaptarse a los cambios de Educación Secundaria y Bachillerato, por lo que incluso no atienden al verdadero déficit de conocimientos del alumnado.
– De forma casi insultante, plantean que en dos semanas pueden “subsanar” lo que el Bachillerato no ha conseguido en dos cursos académicos.

2. Datos y cifras del Sistema Universitario Español - Publicación 2019-2020
https://www.educacionyfp.gob.es/servicios-al-ciudadano/estadisticas/universitaria/datos-cifras-copia.html

Pero además de todo esto, los Cursos Cero no atacan a la raíz del problema, ni mucho menos atienden al alumno en riesgo de abandono una vez impartidos. Los Cursos Cero son medidas preventivas, casi profilácticas, centrados en asegurar al profesor que su clase de alumnos de nuevo ingreso es homogénea en conocimientos del contenido matemático, pero sin atender los déficits de competencias que posean para acceder a los estudios universitarios.

La ilusión de aumentar el porcentaje de población que haya completado estudios terciarios (los que se hacen justo después de la etapa obligatoria, ciclos formativos y/o Universidad) es común para todos los países. Es el vehículo para la modernización, diversificación económica e innovación. En España, los titulados en educación terciaria tienen de media sueldos un 45% más elevados que los que han completado la segunda etapa de Educación Secundaria. Los que no han completado este último nivel de educación cobran, de media, un 18% menos.

A inicios del curso 2021/22, la tasa de graduación en Educación Secundaria postobligatoria en España -el porcentaje de población que se espera que se gradúe a lo largo de su vida en esa etapa-, creció 8,5 puntos porcentuales en los últimos seis años, hasta situarse en el 74,7%. No obstante, seguimos por debajo de la media OCDE (80,3%) y UE22 (80,6%).

En la etapa de Educación Secundaria, la OCDE apunta también a la alta tasa de repetición del sistema español, con un 8,7% de escolares repetidores en primera etapa de Educación Secundaria (1º a 3º de ESO), cuando la media OCDE es del 1,9% y la media UE22 del 2,2%. En segunda etapa de Educación Secundaria (4º ESO, Bachillerato, Formación Profesional Básica y de Grado Medio), repiten curso el 7,9% del alumnado en España, cuando la media OCDE es del 3% y la media UE22 del 3,3%.

La preocupación por el fracaso en el sector terciario es lógica porque afecta al crecimiento socio-económico general y el bienestar de los ciudadanos. La nueva Ley de Educación (LOMLOE –2020) se ha aprobado con una gran controversia alrededor de un tema casi tabú en este país hasta el momento: pasar de curso, e incluso titular etapa, sin haber aprobado todas las asignaturas.

Esta reforma otorga a los equipos docentes de Educación Primaria y Educación Secundaria la capacidad de decidir si un alumno puede pasar de curso o merece el título de ESO o Bachillerato, sin estar condicionados por el número de materias suspendidas. Aunque pudiera parecer que el cambio implica una relajación del rigor educativo, no es así. El objetivo es reducir el número de repetidores y alcanzar los objetivos por otras vías.

Estos alumnos llegarán a la Universidad, algunos con asignaturas sin aprobar, con un nuevo currículo más orientado a las competencias que a los contenidos. El nuevo currículo de Bachillerato, que pasa de tres a cinco modalidades, estrenando asignaturas, permitirá pasar de primero a segundo hasta con dos suspensos y obtener el título con una materia pendiente. La evaluación del aprendizaje del alumnado será continua y diferenciada según las distintas materias. El profesorado de cada asignatura decidirá, a final de curso, si el joven ha logrado las competencias adecuadas.

Tenemos por tanto un nuevo escenario educativo que debe afrontar la Universidad, pero no desconocido después de ocho leyes de educación en los 40 años de democracia (desde la LOECE de 1980 hasta la LOMLOE de 2020). No obstante, la rigidez del sistema imposibilita atender estos cambios con agilidad y destreza. Los Grados no pueden adaptar rápidamente sus asignaturas a las nuevas modalidades de Bachillerato, el flujo de información desde Secundaria a la educación superior es lenta y entrecortada (cuando existe), y tristemente la Universidad atiende la necesidad de cambio esencialmente cuando ve los fracasos.

El gran reto de la enseñanza universitaria de las Matemáticas es asumir, en parte o totalmente, los principios que le vienen desde hace tiempo de la Educación Secundaria: introducir la enseñanza centrada en el estudiante y orientar la formación a la adquisición de las competencias fundamentales del siglo XXI, las que les demanda el mercado laboral. Aquí el lector puede elegir el listado de competencias que más le satisfaga, pero para gusto de los matemáticos que no suelen sentirse cómodos con los términos competenciales al englobarlas todas en la resolución de problemas, las llamadas «4C» son comunes a casi todas estas listas. Estas "4C" establecen las habilidades cognitivas que facilitan la resolución de problemas complejos: Creatividad, Pensamiento Crítico, Colaboración y Comunicación… a las que habría que añadir también las habilidades de resolución de problemas y de razonamiento.

No nos referimos a cambiar contenidos para adaptarnos al nuevo currículo de Educación Secundaria y Bachillerato, hablamos de cambiar la forma de enseñar y los objetivos. Los contenidos son el medio, no el fin. El fin son las competencias, y las herramientas son las TIC y las dinámicas innovadoras en los métodos de enseñanza-aprendizaje (clase invertida, aprendizaje basado en proyectos, docencia híbrida, gamificación, talleres ...).

La generación de conocimiento, por sí misma, está justificada para cualquier área científica, pero la investigación en áreas como la Didáctica de la Matemática se convierten en cruciales para lanzar hacia la mejora y la excelencia uno de los tesoros más preciados de cualquier sociedad, la Educación. La investigación y la formación de docentes se conjugan en un sitio ideal, la Universidad, luego no hay justificación para dilatar por parte de los gobiernos el aumento de la inversión en la investigación en Didáctica de las áreas científicas y en mejora de la formación del profesorado, cosas que van de la mano en las Universidades de todo el mundo, y que es emblema de Universidades en muchas áreas.

Todo lo expuesto anteriormente nos ayuda a postular uno de los mensajes centrales de este capítulo: la investigación en Didáctica de las Matemáticas en el ámbito universitario es absolutamente necesaria y justificada.

El origen de los grupos de investigación, enormemente ligado a las antiguas Escuelas de Magisterio, acompañado por la enorme predisposición del profesorado de esos niveles a las innovaciones y la mejora de los procesos de enseñanza-aprendizaje, e incentivado por la atención a la diversidad, la ampliación de edad de la obligatoriedad del nivel de estudios, y así un largo etcétera han fundamentado la tradición y alta calidad de la investigación en Didáctica en los distintos niveles educativos en España, patrón de muchas escuelas iberoamericanas.

En lo que sigue del capítulo presentamos algunas investigaciones que consideramos que muestran el valor de futuro para la mejora de la enseñanza de las matemáticas en educación superior. Debemos romper las reticencias del pasado, las clasificaciones artificiales de las áreas de investigación, y acercarnos más a las demandas reales de la sociedad (mejores ciudadanos y con más competencias para el empleo) y de las propias Universidades (mejor investigación y mejor docencia). Posiblemente las áreas de didácticas son las que mejor se ajustan a estos objetivos comunes a todos los países y Universidades.

Proyectos de investigación sobre matemática universitaria

Para situar en un contexto metodológico y conceptual los proyectos sobre matemática universitaria que citaremos a continuación, conviene mencionar algunos proyectos europeos no universitarios que han resultado ser fuente de inspiración para los primeros.

En la Educación Primaria y Secundaria se han desarrollado en la pasada década dos proyectos importantes para el desarrollo profesional de profesores en ciencia y matemáticas: El proyecto Fibonacci[3] y el proyecto PRIMAS[4], elaborando materiales para la educación preuniversitaria, tomando como referencia la Educación Basada en la Indagación[5] (EBI)

El proyecto PRIMAS, entre cuyas publicaciones se encuentran algunos módulos traducidos a diferentes idiomas (por ejemplo, al español), considera que los elementos fundamentales a tener en cuenta deben ser los resultados y el entorno de aprendizaje, el papel tanto de los profesores como de los estudiantes, y la cultura de la clase. De esta forma, como resultados de aprendizaje se pretende conseguir: mentes críticas y creativas, comprensión de la naturaleza de las ciencias y las matemáticas y preparación para el aprendizaje a lo largo de la vida. También tratan de conseguir una cultura de la clase en las que se compartan las indagaciones y se valoren los errores como fuentes de aprendizaje, Los entornos de aprendizaje que se promueven son entornos en los que debe tratar de ir desde los problemas a las explicaciones y no de los ejemplos a la práctica y se debe conseguir que los estudiantes sean capaces de inventar problemas y colaborar en la búsqueda de sus soluciones. El papel del profesorado debe apoyarse en valorar los razonamientos de los alumnos, conectar sus experiencias y fomentar el aprendizaje en la indagación y la investigación.

3. http://www.fibonacci-project.eu
4. https://primas-project.eu
5. En original es Inquiry-Based Education (IBE). Se considerará aquí Consideraremos el término Inquiry como Indagación.

El Proyecto Fibonacci, que también está bastante extendido a nivel europeo, tiene como principales objetivos: diseñar, implementar y evaluar la Educación Basada en la Indagación en Ciencias y Matemáticas, extendiendo la EBI con elementos propios de la innovación y sostenibilidad del entorno que rodea a los estudiantes y los profesores. En su fundamentación considera tres pilares básicos en torno al IBSME y nueve patrones de comportamiento que van desde el desarrollo de la cultura basada en la resolución de problemas hasta el aprendizaje autónomo, promoviendo el trabajo cooperativo y empleando el método científico.

Ambos proyectos están dirigidos por un modelo de aprendizaje complementario basado en la indagación o investigaciones dirigiéndose hacia el uso de la modelización y la resolución de problemas matemáticos.

Como complemento a estos proyectos centrados en la Secundaria, la Unión Europea ha mostrado su interés en intentar reducir el fracaso universitario en las asignaturas de matemáticas financiando proyectos del programa Erasmus+. Los proyectos **iTEM - i**nnovative **T**eaching **E**ducating in **M**athematics[6], **Pythagoras**[7] **y PLATINUM**[8] son ejemplos de ello.

iTEM presta atención a la mejora de la enseñanza de las asignaturas básicas (cálculo y álgebra lineal) en los grados de ingeniería, introduciendo problemas de la vida real, modelos de enseñanza basado en el Aprendizaje Basado en Proyectos y el uso de sistemas dinámicos y móviles. El Aprendizaje Basado en Proyectos es una metodología centrada en la resolución de tareas que deben ser propuestas por el profesor o los mismos alumnos (supervisados) que deben ser resueltas para alcanzar los aprendizajes previamente establecidos. La generación de herramientas para la detección de alumnos en riesgo (vía las técnicas de analíticas de aprendizaje tan de moda en los últimos años), la preparación de materiales de ejemplo de uso de problemas reales en formato de actividades de Aprendizaje Basado en Proyectos, el uso de herramientas dinámicas (CAS y mobile-tools) y el diseño de materiales de atención de alumnos con dificultades de seguir las asignaturas han sido los ejes fundamentales de trabajo para reducir los indicadores de fracaso en los grados de ingeniería en centros de Israel, Kosovo y Uzbekistán.

Pythagoras es un proyecto recién iniciado en el momento de redacción de este libro y centra su atención en el diseño de procesos innovadores en varios aspectos. Por un lado, pretende seguir la iniciativa de la UNESCO de promover, con la enseñanza de las Matemáticas, el logro y soporte de los Objetivos de Desarrollo Sostenible por medio de la Educación[9]. Se postula así el aprendizaje de matemáticas basado en proyectos, que implica la introducción de problemas desafiantes que hacen fluir la creatividad, la investigación y la construcción de conocimiento. El aprendizaje basado en proyectos

6. https://item.chania.teicrete.gr/
7. https://www.pythagoras-grant.eu/
8. https://platinum.uia.no
9. *Mathematics for action: supporting science-based decision-making* - UNESCO (2022) https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000380883.locale=en

puede ser una instrucción auténtica en su máxima expresión, donde a los estudiantes se les permite experimentar problemas de la vida real, utilizando su propio enfoque único; fomentando así el desarrollo de competencias transversales fundamentales. Por otro lado, el proyecto considerará la gamificación en los procesos de enseñanza-aprendizaje y, de manera transversal, siempre pondrá especial interés en la atención a los alumnos en riesgo de abandono, una de las mayores preocupaciones de la UE.

Platinum

Este proyecto, cuyo nombre original es Partnerships for Learning And Teaching in University Mathematics (PLATINUM)[10], es un proyecto en el que participa un grupo de 8 Universidades europeas de un total de siete países, entre las que se encuentra, representando a España, la Universidad Complutense de Madrid. Este proyecto reúne a profesores de distintos ámbitos académicos (ingenierías, ciencias,…), interesados por mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el nivel universitario. Quizás, la característica más importante de Platinum es que está sustentado por un marco conceptual validado por la investigación en el ámbito de la Didáctica de la Matemática. La característica más importante es que el desarrollo de este proyecto ha servido como contexto en el que seguir avanzando en el establecimiento de la Educación Matemática Basada en la Indagación (IBME)[11] como un Marco Conceptual, basado en la experimentación, para la enseñanza de las Matemáticas de la Universidad. EMBI constituye un modelo de enseñanza tanto de la matemática como de la ciencia en el que se plantea que los estudiantes deben reproducir el quehacer de los científicos e ingenieros en general y los matemáticos en particular (Artigue y Blomhøj, 2013; Dorier y Maaß, 2020). Para ello, deben observar fenómenos, hacerse interrogantes y preguntas, y buscar respuestas a tales cuestionamientos, interpretando, evaluando y comunicando los resultados obtenidos. Para responder a las preguntas surgidas a partir de la observación de los fenómenos, deben basarse en la experimentación, controlando sistemáticamente las variables que intervienen en ellos, utilizando diagramas, haciendo cálculos específicos, buscando patrones y relaciones y estableciendo las respuestas como consecuencia de las investigaciones realizadas.

Las tareas que se proponen en este marco metodológico se interrelacionan entre sí y deben suponer retos a los estudiantes, propiciando un trabajo colaborativo. El papel del profesor se modifica sustancialmente con esta metodología, dado que debe pasar de ser transmisor de conocimientos mediante explicaciones, con ejemplos ilustrativos y diestro en la resolución de ejercicios, a poseer unas capacidades diferentes, tales como provocar el uso de los conocimientos previos de los estudiantes, manejar con

10. Se podría traducir por "Asociados para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas universitarias".

11. Consideraremos el término Inquiry como Indagación con lo que podríamos hablar, en la comunidad latina, de Educación Matemática Basada en la Indagación (EMBI).

cierta destreza las discusiones en pequeño y gran grupo, ser capaz de buscar retos para que los estudiantes aprendan a justificar sus argumentos, complementar los distintos puntos de vistas que se presenten en las discusiones y ayudar a los estudiantes a establecer conexiones entre las diferentes ideas que surjan.

Gómez-Chacón, et al., (2021), en una publicación que recoge un informe bastante completo, tanto de la metodología como de los fundamentos teóricos y ejemplos concretos del proyecto Platinum, especifica la manera de desarrollar el trabajo de los diferentes "socios" del proyecto mediante lo que ellos denominan "Comunidades de Indagación"[12], así como su funcionamiento y avances. Todo esto se establece a partir de un modelo que consta de tres niveles de concreción.

En el capítulo trece[13] de Gómez Chacón et al. (2021) se presentan de manera explícita algunas tareas que fueron experimentadas en la Universidad de Masaryk, en la República Checa (Brno), en tres cursos diferentes: Estadística, Análisis Matemático 1 y Matemáticas 2, en clases magistrales y seminarios. Se diseñaron tres tipos de actividades EMBI: tareas cortas (Estadística), tareas grupales (Matemáticas 2) y unidades de enseñanza completas (Análisis Matemático 1). Las tareas utilizadas en los dos primeros cursos son tareas cortas y proyectos para desarrollar en equipo con el propósito de introducir nuevos conceptos. En el curso de Análisis Matemático 1 son diseñadas con el objetivo de reforzar los conceptos básicos y profundizar en la comprensión por parte de los estudiantes con unidades de enseñanza basadas en EMBI más completas. El seguimiento y evaluación también varía desde observaciones por parte de los profesores y el análisis detallado por parte de los profesores de los informes y presentaciones de las actividades realizadas por los estudiantes. Por ejemplo, en relación con las tareas para el curso de Análisis Matemático 1 (propuestas para permitir que los estudiantes refuercen los conocimientos adquiridos con anterioridad), se presenta a modo de "juego" la siguiente tarea:

Instrucciones de la tarea: Configurar grupos de entre 2 y 4 miembros. Uno de los grupos determinará las condiciones de límite o los requisitos de continuidad de una función desconocida. Los demás tratarán de encontrar un ejemplo de una función que cumpla los requerimientos. El profesor puede cambiar los roles de los mismos. Ejemplos de requerimientos:

a) Determina una función $f(x)$ tal que $\lim_{x\to 3} f(x) = 5$.
b) Determina una función $f(x)$ tal que $\lim_{x\to 3} f(x) = 5$, pero no es continua en $x=3$.
c) Determina una función f(x) tal que $\lim_{x\to 3} \mathrm{f(x)} = -\infty$.

Figura 1. Tarea de refuerzo en la que se pide que justifiquen sus soluciones mediante software o incluso con representaciones propias. (Gómez Chacón et al, 2021, p. 243)

12. Communities of Inquiry (CoI).
13. https://doi.org/10.5817/CZ.MUNI.M210-9983-2021-13

Como ejemplo del tercer tipo de tareas, los autores diseñaron dos Fichas de Trabajo (para dos sesiones de trabajo y pautando el tiempo dedicado al trabajo práctico con y sin los profesores) para estudiar la monotonía/convexidad y concavidad de funciones, en términos de aplicaciones de los conocimientos previos adquiridos. En ambas actividades, se les pide el manejo del SGD GeoGebra para resolver algunas de las cuestiones.

Para el estudio de la monotonía de una función, se trabaja con la función polinómica $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2 + 3$. En la Figura 2 se presentan las actividades propuestas:

(a) Dibuja con GeoGebra la gráfica de la función.

(b) Determina los intervalos en los cuales la función crece o decrece; escríbelo todo en la siguiente tabla:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,4)$	$(4,\infty)$
$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2 + 3$				

(c) Calcula la derivada de la función.

(d) Determina la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en los puntos de la siguiente tabla;:Escriba aquí la ecuación.

(e) Dibuja con GeoGebra la gráfica de la función derivada.

x_0	-4	-0,5	3	5
$f'(x_0)$				

(f) Determina los intervalos donde la primera derivada es positiva o negativa, expresándolos en la siguiente tabla:

Intervalo				
$f'(x)$				

(g) Calcula: $f'(-1), f'(0), f'(4)$

Tarea final: Resume las conclusiones de todas las indagaciones hecha con esta función.

Figura 2. Actividad de Gómez Chacón et al. (2021, p. 244)

En relación con la concavidad y convexidad, se propone una tarea para el estudio de la función racional f y su derivada, dadas explícitamente $f(x) = \frac{x}{3-x^2}$ y $f'(x) = \frac{3+x^2}{(3-x^2)^2}$, , con diferentes apartados en los que se pide como en el caso anterior, estudiar los intervalos donde varía el signo de la derivada segunda habiendo pedido previamente la representación gráfica de la función hecha con GeoGebra. Finalmente, se pide a los estudiantes que obtengan y representen, en la misma figura, las ecuaciones de las rectas tangentes y comprueben su posición conectándola con el signo de la segunda derivada. En esta experiencia, se crearon grupos de discusión que celebran seminarios para revisar el trabajo realizado durante el desarrollo de las lecciones diseñadas.

El uso de la Tecnología en la Universidad: algunos ejemplos

En este apartado se tratará de responder a la siguiente pregunta: ¿En qué modo es posible adaptar materiales curriculares innovadores a los nuevos avances en tecnologías digitales? ¿Es posible?

Se presenta a continuación una adaptación de dos materiales diseñados en el contexto de sendas investigaciones. El uso de dichos materiales mostró buenos resultados, por lo que consideramos que su adaptación al uso de tecnologías más actuales puede resultar útil de cara a la práctica de la enseñanza de las matemáticas universitarias. Se incluyen dos ejemplos de secuencias de enseñanza, una dedicada al concepto de integral definida y otra hacia la introducción de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO).

Ejemplo 1: La enseñanza y aprendizaje de la integral definida

En la investigación de Depool (2004) se analizaron las potencialidades y dificultades que aparecen cuando se establece una modificación en el orden en el que habitualmente se trabaja el concepto de integral definida. La idea fue la de introducir el concepto como área limitada por una curva con el eje OX, combinando una perspectiva gráfica y numérica, partiendo de la idea de aproximación y posponiendo el estudio del cálculo de primitivas, el Teorema Fundamental del Cálculo y la regla de Barrow a la última parte del proceso de enseñanza y aprendizaje. Se elaboraron en aquel momento diversos Programas de Utilidades con el Computer Algebra System (CAS) *Derive*, que los estudiantes manipulaban a partir del diseño de una serie de prácticas de laboratorio. Dado que los resultados obtenidos fueron relativamente buenos, se presentará aquí una actividad de las utilizadas en la parte experimental de su investigación, adaptada al uso de GeoGebra.

Depool fundamenta su trabajo en dos elementos principales: por una parte, un modelo de competencia que se adapta del que establece Socas (2001) en el caso del estudio del papel de los sistemas matemáticos de signos para la comprensión de objetos matemáticos relacionados con los pensamientos numérico y algebraico. El segundo elemento considerado lo constituye el empleo de tecnología, en particular *Derive,* como elemento facilitador de la formación de conceptos matemáticos.

El modelo de competencia se utilizó como un marco de referencia para analizar las actuaciones de los estudiantes, y mediante su uso, se determinó el grado de comprensión del concepto (Camacho et al., 2010).

El segundo elemento que ya hemos indicado, tiene que ver con el uso herramientas tecnológicas como mediadores entre el proceso de instrucción y el aprendizaje.

La parte experimental del trabajo se desarrolló en el aula siguiendo tres fases (Camacho-Machín, 2005):

> Fase 1: *Clases habituales:* El profesor hace una presentación de los contenidos usando los métodos y medios habituales de enseñanza, es decir, se emplea el libro de texto oficial (Stewart, 1999), tomando como soporte para las explicaciones el retroproyector, la tiza y la pizarra.
> Fase 2: *Prácticas en el Laboratorio de ordenadores:* Los estudiantes realizan por parejas, en el laboratorio de ordenadores, las Prácticas de Laboratorio que conforman el Módulo Instruccional. Las parejas de estudiantes llevan a cabo las prácticas correspondientes y presentan un informe en soporte informático del trabajo realizado. Se utiliza un cañón de proyección para hacer la presentación de la práctica y para aclarar dudas en su desarrollo.
> Fase 3: *Puesta en común:* Se discute lo realizado en las Prácticas de Laboratorio con todos los estudiantes, tomando como referencia el trabajo desarrollado por ellos en los informes de las prácticas que presentaron (p. 101)

Las prácticas de laboratorio, núcleo central del módulo instruccional, se desarrollaban a partir de un comentario general y un protocolo de actuación que los estudiantes debían seguir como instrucción. Los contenidos se proyectaban en una pantalla con un cañón de proyección, y se entregaban a los estudiantes con el objetivo de aclarar los puntos que fueran necesarios. Además, cada práctica nueva se comenzaba abriendo el archivo que contiene la práctica anterior en la que los estudiantes leían las observaciones de ésta y la calificación respectiva. Una vez terminado el módulo, se realizaba una evaluación final que contiene los puntos más importantes tratados en las prácticas. El siguiente problema, adaptado de un libro de texto clásico (Edwards y Penney 1996, pp. 370-371), constituyó una de las prácticas utilizadas:

> *Un fabricante necesita hacer hojas de metal de 36 pulgadas* (90 cm) *de ancho con secciones transversales con la forma de la curva* (Figuras 6 y 7)
>
> $$y = \frac{1}{2} sen\pi x, 0 \leq x \leq 36$$
>
> *¿Qué ancho deben tener las hojas originales extendidas para que el fabricante produzca estas láminas?*

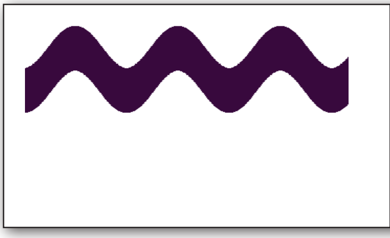


Figura 3. Lámina de metal

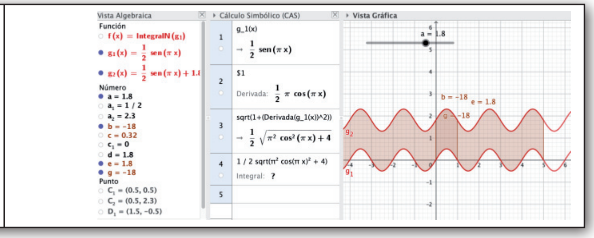


Figura 4. Representación icónica de las funciones $y = \frac{1}{2} sen\pi x; y = \frac{1}{2} sen\pi x + a$ el deslizador a representa un ancho variable de la lámina de metal

Se considera que la longitud de un arco de curva entre dos puntos cualesquiera *a* y *b* viene dada por la fórmula

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

se tiene en este caso

$$S(x) = \int_0^{36} \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 cos^2 \pi x dx} = 36 \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 cos^2 \pi x\, dx}$$

El texto indica además que *Estas integrales no pueden ser evaluadas en términos de funciones elementales* (p. 370) y remite al lector al capítulo del libro que se dedica a métodos numéricos de integración. Señala que la solución al problema será:

$$\int \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos{}^2 \pi\ x}\ \text{dx} = 1{,}46$$

Indicando a continuación que la solución del problema es: $36.(1{,}46) = 52{,}56$ pulgadas.

En nuestro caso, la resolución con GeoGebra permitirá obtener una solución desde los puntos de vista gráfico y numérico. El SGD GeoGebra nos permitirá aproximar la solución de diferentes maneras:

1.- Mediante segmentos, debido a las propias características de la función (Fig. 5).

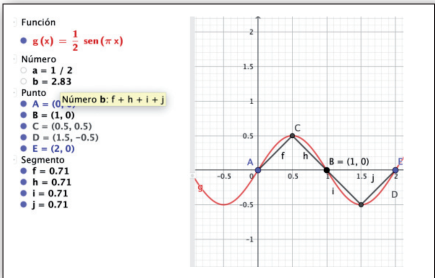


Figura 5. La aproximación con segmentos en el intervalo (0,1) es 1.42

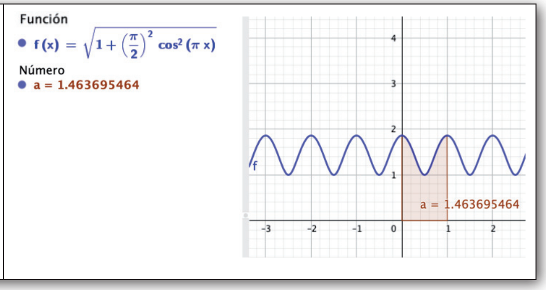


Figura 6. Cálculo de la longitud del arco de la curva buscado, mediante el área limitada

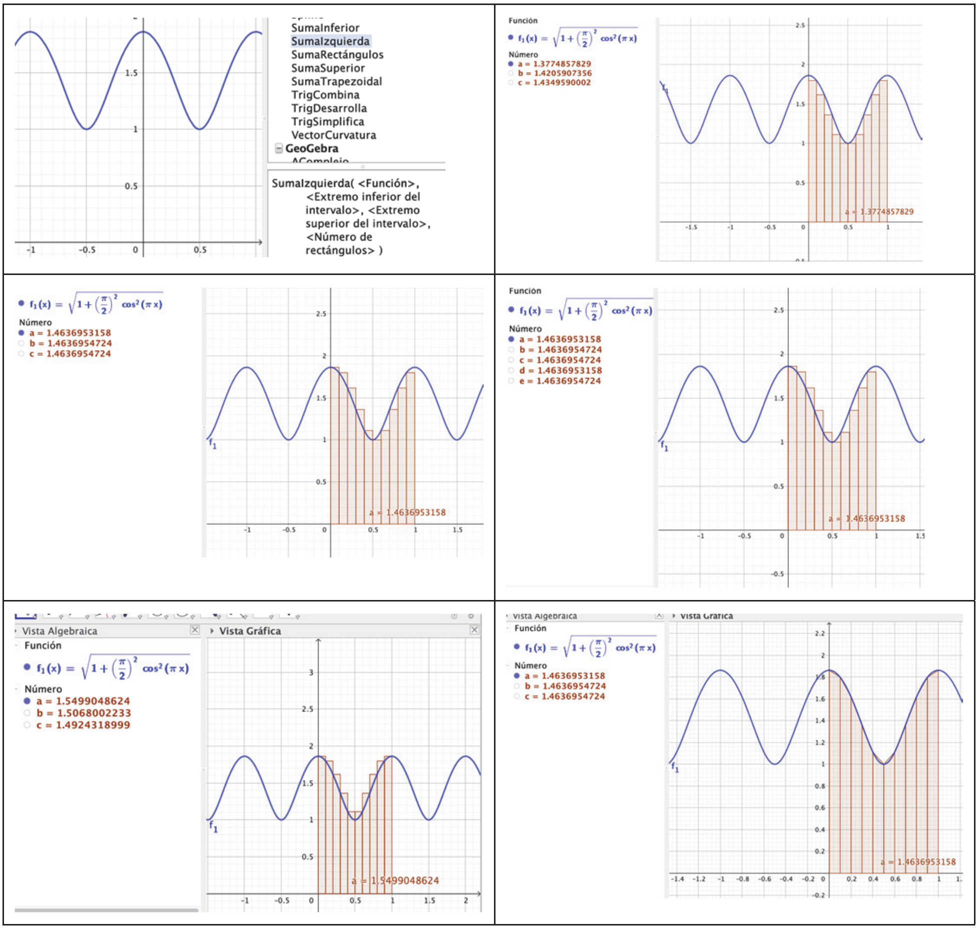
2.- Entender que, pese a que el cálculo de la longitud del arco de curva viene representado mediante el valor de una integral definida, esto es el área de la superficie limitada por una curva. La integral definida representará la medida lineal de la longitud del arco, algo que genera dificultades de interpretación no solo para la longitud sino para múltiples conceptos físicos relacionados con integrales definida, como por ejemplo fuerza, presión, etc. (Figura 6)

GeoGebra nos facilita varias formas de calcular esa integral definida:

La Figuras 3 y 4 muestran la forma de la hoja a la que se refiere el problema. La figura 4 recoge la representación gráfica de la función correspondiente. En la primera casilla de la Tabla 1, se puede observar los diferentes comandos predefinidos por GeoGebra. Las siguientes casillas presentan todos los cálculos para 10, 20 y 30 subintervalos de igual amplitud del intervalo (0,1).

Se obtienen:

Tabla 1. Representaciones gráficas y numéricas de las distintas opciones de GeoGebra: (el orden de izquierda a derecha y de arriba abajo es el mismo que el de la Tabla 2)



$$36(1.4636954724) \approx 56{,}693$$

Utilizando la matriz con 10, 20 y 30 subintervalos en la que aparecen las diferentes aproximaciones tenemos que la integral es aproximadamente 1.46370.

Tabla 2. Valores de las diferentes aproximaciones

Div	SumaInferior	SumaIzquierda	SumaRectángulos	SumaSuperior	Suma Trapezoidal
10	1.3774857029	1.4636953158	1.4636953158	1.5499048624	1.4636953158
20	1.4205907356	1.4636954724	1.4636954724	1.5068002233	1.4636954724
30	1,4349590002	1.4636954724	1.4636954724	1.4924318999	1.4636954724

El estudiante concluirá en definitiva que, el fabricante debe utilizar hojas extendidas de aproximadamente $36(1.4636954724) \approx 56{,}693$ pulgadas de ancho.

El siguiente enlace presenta los applets de las diferentes aproximaciones hechas con GeoGebra que se muestran en las Tablas 1 y 2.

https://www.geogebra.org/m/kkgexm6d

Ejemplo 2. La enseñanza y aprendizaje de las EDO en un escenario de resolución de problemas, haciendo uso de herramientas tecnológicas

En esta sección se presenta una propuesta para la introducción del concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO), desde una perspectiva de resolución de problemas, y donde se utiliza el GeoGebra como herramienta tecnológica que favorece la indagación y la reflexión profunda, tanto en torno al concepto de EDO, con en relación con las situaciones problemáticas planteadas. Esta propuesta es una adaptación de un Módulo de Enseñanza diseñado en el contexto de una investigación realizada con estudiantes universitarios del Grado de Química (Perdomo-Díaz, 2010). En una primera fase de dicha investigación se identificó un conjunto de dificultades que los estudiantes presentaban en relación con el concepto de EDO y que tenían tres orígenes principales:

(a) las limitaciones en el reconocimiento y uso de los diferentes significados asociados al concepto de derivada (Camacho, et al., 2010). En este sentido, (Thurston, 1994) señala los siguientes significados para la derivada de una función:

(1) Infinitesimal: la relación entre el cambio infinitesimal en el valor de una función y el cambio infinitesimal en la función.
(2) Simbólico: la derivada de x^n es nx^{n-1}, la derivada de $\sin x$ es $\cos x$, etc.

(3) Lógica: $f'(x) = d$ sí y sólo si para todo ε hay un δ tal que cuando $0 < |\Delta x| < \delta$,
$\left|\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - d\right| < \varepsilon$.
(4) Geométrico: la derivada es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función, si la gráfica tiene tangente.
(5) Velocidad: la velocidad instantánea de f(t), cuando t es el tiempo.
(6) Aproximación: la derivada de una función es la mejor aproximación lineal a la función, cerca de un punto.
(7) Microscópico: la derivada de una función es el límite de los que se observa mirando cada vez con un microscopio más potente. (p. 3)

(b) la falta de conexión entre el concepto de EDO y el concepto de derivada y
(c) el escaso desarrollo de procesos cognitivos y estrategias efectivas para la resolución de problemas (Camacho et al., 2010). A partir de estos resultados se tomaron las siguientes decisiones sobre el diseño del Módulo de Enseñanza:

– Plantear actividades que contribuyan a robustecer la red de significados que los estudiantes asocian al concepto de derivada, introduciendo las EDO a través de su relación con dicho concepto, como un significado más de esa red conceptual.
– Utilizar un enfoque basado en la resolución de problemas, haciendo explícitas diferentes etapas que permiten avanzar en el proceso de resolución y distintas estrategias.
– Emplear recursos tecnológicos que favorezcan que el estudiante pueda centrarse en el análisis de los procesos de resolución, las respuestas obtenidas y su conexión con la situación planteada.

Desde este punto de vista, la alternativa pedagógica que se plantea consiste en construir los nuevos conceptos matemáticos a partir de conceptos ya conocidos por los estudiantes, tratando así de disminuir las discontinuidades que se producen en el aprendizaje de las matemáticas (Artigue, 2001; Raychadhuri, 2007; Guerrero-Ortiz et al., 2016); en particular, haciendo más natural la transición entre conceptos matemáticos tan cercanos entre sí como el de derivada de una función y Ecuación Diferencial Ordinaria.

El Módulo de Enseñanza, presentado en detalle en Perdomo-Díaz (2010), está formado por cuatro problemas, tres de ellos diseñados para ser trabajados en pareja y el último de forma individual, en un total de 11 sesiones de clase, de una hora de duración. Puesto que la investigación se iba a realizar con estudiantes universitarios del Grado de Química, los problemas se plantearon en contextos cercanos a su formación: la descomposición de elementos químicos, la mezcla de sustancias químicas y la dinámica de poblaciones. En el primero, de carácter introductorio, se analizan diferentes situaciones de variación y sus representaciones en lenguaje matemático, lo que se vio que era necesario a partir de los resultados de una investigación previa (Camacho et al., 2009) y se finaliza con la introducción del concepto de EDO, orden y solución de la misma. La estructura de los siguientes dos problemas es similar: se comienza con el planteamiento de una situación y, a continuación, se plantean una serie de cuestiones divididas en distintas etapas. El último de los problemas se utilizó como instrumento para evaluar los aprendizajes de los estudiantes.

Los resultados de la investigación realizada con los estudiantes del Grado en Químicas (Camacho, et al. 2012) reflejaron que este Módulo de Enseñanza permitió que los estudiantes mostraran, de forma explícita, procesos que habitualmente quedan escondidos para el docente, como son el análisis de las situaciones planteadas, la interpretación que daban a la información o la forma de generalizar los resultados. Por otra parte, la interacción entre los estudiantes favoreció la generación de ideas, así como la reflexión y el análisis en torno a las mismas. Asimismo, el uso de una herramienta tecnológica, en este caso la calculadora Voyage 200, permitió que los estudiantes pudieran analizar la situación a través de diferentes representaciones, lo que resultó especialmente útil en el proceso de generalización de los modelos matemáticos.

Estos resultados nos motivaron a incorporar en este capítulo una adaptación de uno de los problemas de este Módulo de Enseñanza, como ejemplo de un tipo de actividad que podría realizarse en el ámbito universitario. Aunque la actividad está diseñada para estudiantes del Grado de Química, es fácilmente adaptable a otros grados universitarios en los que se estudien las EDO.

El problema se denomina "Dinámica de poblaciones" (Figura 7) y es el tercero de los problemas del Módulo de Enseñanza. Está diseñado para ser trabajado durante 4 sesiones de una hora y tiene dos características principales: la importancia que se da al sistema de representación gráfico y el significado asociado al concepto de EDO que se utiliza, fuertemente ligado al concepto de derivada de una función. Se trata de un problema que podemos considerar de dinámica poblacional y cuya resolución pasa por el planteamiento y resolución de una EDO que puede resolverse por el método de variables separables.

A la atención del Colegio Oficial de Químicos de Canarias.

La piscifactoría "*La mar de bueno*" solicita sus servicios para buscar una manera sencilla de comunicar a sus inversores cómo varía la cantidad de peces que hay en uno de los recintos que utilizan para la cría de doradas.

Los últimos recuentos del número de peces que hay en uno de los recintos han mostrado que el número de peces está disminuyendo considerablemente. Los técnicos de nutrición y de epidemiología no han detectado ningún problema relacionado con la alimentación o alguna enfermedad, pero me apuntan que quizás el problema esté en la cantidad de peces que hay dentro del recinto.

Necesito que realice un estudio sobre cómo varía el número de peces que hay en el recinto a lo largo del tiempo y que analice cuál puede ser el problema.

Para presentar el informe a los inversores, sería conveniente que este se presentara en un formato de fácil comprensión como, por ejemplo, una representación gráfica que refleje cuál es la situación en cualquier instante de tiempo.

Le adjunto cierta información recogida por nuestros trabajadores que podrían serle de utilidad en su trabajo.

- La tasa de nacimiento de doradas es de 410 por cada mil, cada año.
- La tasa de mortalidad de doradas es de 220 por cada mil, cada año.

Figura 7. Enunciado inicial del problema "Dinámica de poblaciones"

El diseño del problema trata de guiar a los estudiantes en el análisis de la situación, así como en la construcción y generalización del modelo matemático y el análisis del propio proceso de resolución. Para ello se plantea un conjunto de preguntas, organizadas en torno a cinco etapas. Dichas etapas se diseñaron tomando como referencia las etapas del modelo propuesto por Polya (1945), algunas de las cuáles se enriquecieron a partir de las ideas de autores como Schoenfeld (1992) o Santos-Trigo (2007) (Figura 8).

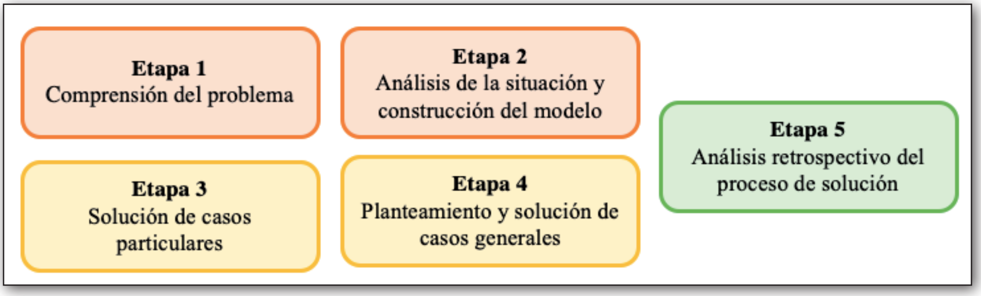


Figura 8. Etapas consideradas en la resolución del problema

Estas etapas ya habían sido trabajadas con los estudiantes en el segundo problema del Módulo de Enseñanza. En este problema, la intención es continuar haciéndolas explícitas, a la vez que se disminuye el número de preguntas guía formuladas por el docente, de manera que sean los propios estudiantes quienes comiencen a formularse dichas cuestiones.

A continuación, presentamos una descripción de cada una de esas etapas y la adaptación de las actividades al uso de GeoGebra.

Etapa 1. Comprensión del problema

Se plantea a los estudiantes una serie de preguntas (Figura 9) cuyo objetivo es que reflexionen acerca de la situación que se trata de abordar, así como guiarlos en la identificación de información relevante y el análisis del significado de dicha información.

En esta etapa contestaremos a una serie de preguntas que nos ayudarán a comprender la situación planteada. Añade cualquier otra pregunta que consideres relevante.

- ¿Qué fenómeno estamos estudiando?
- ¿Qué solicita el cliente?
- ¿Qué significa que la tasa de nacimiento es de 410 peces por cada mil?
- ¿Qué significa que la tasa de mortalidad es de 220 peces por cada mil?
- En la situación considerada, ¿qué está cambiando?

Figura 9. Preguntas planteadas en la Etapa 1

Reflexionar en torno a estas preguntas ayudará a los estudiantes en el proceso de análisis y la búsqueda de posibles vías de resolución. Se trata de que identifiquen los aspectos más relevantes que le acerquen a elaborar un modelo matemático que resuelva el problema.

Esta es una etapa que conviene hacer explícita cuando se comienza a trabajar bajo un enfoque de resolución de problemas. De esta manera se muestra a los estudiantes algunos ejemplos del tipo de preguntas que, en el futuro, deberían hacerse de forma autónoma al enfrentar un nuevo problema. A medida que se avanza, el docente puede ir haciendo esta etapa cada vez más implícita, a fin de promover que sea cada alumno quien formule las preguntas que necesita.

Etapa 2. Análisis de la situación y construcción del modelo

Se pide explícitamente a los estudiantes que completen una tabla, indicando la variación en el número de peces que se produce en un año, para distinto número de peces (Figura 10). El objetivo es guiar a los estudiantes en el proceso de construcción del modelo matemático. En los dos primeros problemas del Módulo, los alumnos interpretaban la variación en términos de la derivada en función del tiempo. Con esta tabla, se les guía para que expresen dicha variación como la diferencia entre el número de peces que nacen y mueren en un determinado período de tiempo. Así, si P(t) representa la cantidad de peces en un instante cualquiera de tiempo t, se trata de que los estudiantes, completando esta tabla, lleguen a la expresión de la EDO $\left(\frac{dP}{dt} = 0{,}19P(t)\right)$

Llamemos $P(t)$ a la cantidad de peces que hay en cualquier instante.

Analicemos cómo varía el número de peces que hay en el recinto.

Número de peces	**Peces que nacen en un año**	**Peces que mueren en un año**	**Variación en el número de peces, en un año**
1000			
2000			
3000			
$P(t)$			

- Escribe la EDO que modela la situación.

Figura 10. Actividades de la segunda etapa de resolución

Etapa 3. Solución de casos particulares

La etapa comienza pidiendo a los estudiantes que resuelvan la EDO obtenida anteriormente. En el segundo problema del Módulo se les ha explicado el procedimiento algebraico que permite resolver este tipo de ecuaciones. En este punto, conviene animar a los estudiantes a comprobar su respuesta apoyándose en GeoGebra, el cuál dispone de un entorno CAS (Computer Algebra System) que permite resolver EDOs, entre muchas otras cosas (Figura 14).

En esta etapa no se indican condiciones iniciales, de forma que la solución de la EDO queda expresada en términos de un parámetro. La actividad continúa planteando a los estudiantes un conjunto de preguntas que les lleven a analizar la expresión obtenida: *¿La constante de integración puede ser negativa? ¿Por qué? Con los datos que tienes, ¿puedes calcular el valor de la constante de integración? ¿Qué necesitarías conocer para poder calcularlo?* Con esta discusión se analiza la relación entre la expresión algebraica de la solución y la situación planteada y, además, surge la necesidad de disponer de unas condiciones iniciales, concepto que ya se habría discutido en el segundo problema del Módulo.

Seguidamente, se plantea a los estudiantes un conjunto de preguntas dirigidas al análisis de las soluciones de la EDO: *El número de peces, ¿aumenta, disminuye o se mantiene constante? Explica tu respuesta. ¿Hasta qué valor? ¿Te parece que la información obtenida a través de la representación gráfica se ajusta a lo que ocurre en la realidad?* GeoGebra incorpora en la solución un deslizador, c_1 para la constante de integración, lo que facilita el análisis de las soluciones obtenidas y permite responder a las preguntas formuladas (Figura 11).

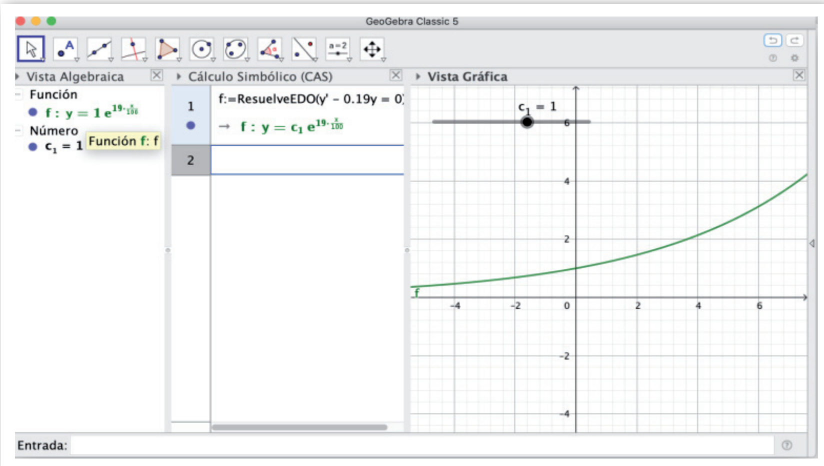


Figura 11. Resolución algebraica de una EDO usando GeoGebra y representación gráfica de la solución

Una vez analizado el caso anterior, se introduce un nuevo caso, donde se incorpora un término de competición entre las especies (Figura 12). Se pide a los estudiantes que expresen matemáticamente esta nueva situación, lo que les conduce a la EDO $\frac{dP}{dt} = 0'19P - bP^2$, y analicen dicha expresión.

Cuando el número de peces que hay en el recinto es muy grande, empiezan a escasear recursos como el espacio vital, los alimentos, etc. por lo que los peces comienzan a competir entre ellos. Esto hace que el número de peces sufra cierta disminución debido a esta causa. Recuerda que el dueño de la piscifactoría ya apuntaba a este hecho como la posible causa de la muerte de los peces. De forma experimental se ha visto que el término de competición entre las especies es proporcional al cuadrado de la población en cada instante, es decir que este hecho hace que la población disminuya según el término $b{\cdot}P^2$.

- Teniendo en cuenta este hecho, indica la variación de la población de doradas conforme pasa el tiempo.
- ¿Tendría sentido que el término de competición fuera negativo? ¿Por qué?
- Analiza para qué valores de P la población
  (a) Aumenta
  (b) Disminuye
  (c) Se mantiene constante

Figura 12. Planteamiento del caso con un término de competición entre especies

Las dos últimas preguntas tienen como objetivo que el estudiante se apoye en la expresión de la EDO para responder, puesto que no dispone de información suficiente para poder representar gráficamente las soluciones. Por tanto, la opción que les queda es utilizar la EDO para obtener información acerca de la monotonía de la función solución, surgiendo así una nueva interpretación del concepto EDO, relacionada directamente con uno de los múltiples significados asociados al concepto de derivada, el significado geométrico (Thurston, 1994). Este tipo de preguntas contribuye a que los estudiantes construyan una red de significados en torno a un mismo concepto matemático, en este caso las EDO. Se les muestra que pueden obtener información de la función solución, no solo resolviendo la ecuación, sino también a través del análisis de dicha ecuación.

El problema continúa preguntando a los estudiantes lo siguiente: *¿Qué sucede con la población a lo largo del tiempo?* Para responder, se puede pedir a los alumnos que consideren un caso particular para esta nueva situación, donde b=0,001, y se apoyen en el uso de GeoGebra (Figura 16). Moviendo el deslizador que GeoGebra presenta, asociado a la constante de integración que aparece en la expresión de la solución de la EDO, se puede observar que la forma de las soluciones cambia cuando dicha constante es menor, igual o mayor que 0 (Figura 13 (a), (b) y (c), respectivamente), pero que, en todas ellas, la solución tiende al valor P(t)=190.

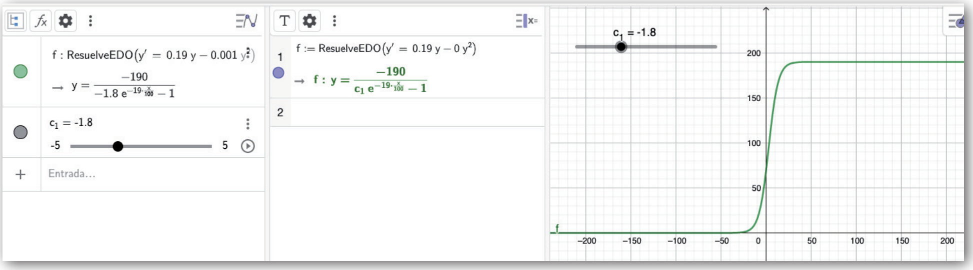


Figura 13 (a)

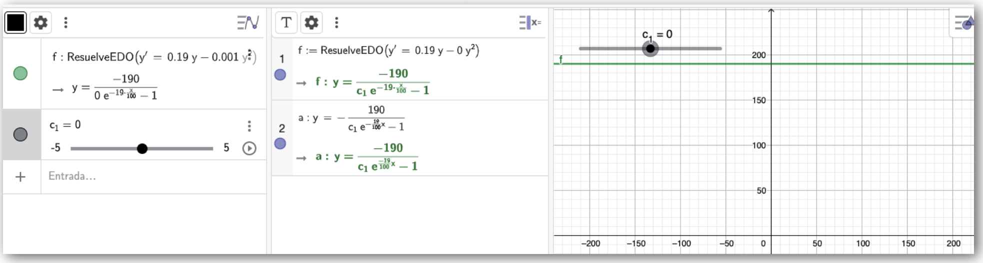


Figura 13 (b)

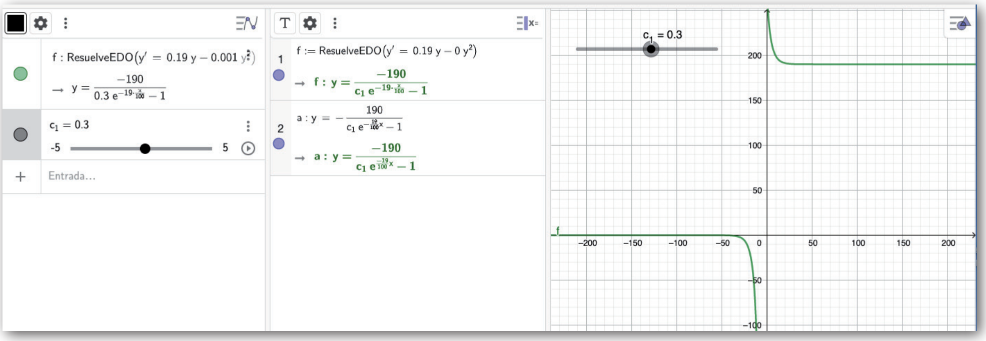


Figura 13 (c)

Figura 13. Soluciones para valores de la constante de integración menor (a), igual (b) y mayor que 0 (c).

A partir de esta representación se puede plantear a los estudiantes diversidad de preguntas como, por ejemplo: *¿Cuál tendría que ser la población inicial de peces para que la población se mantenga siempre constante? ¿Y para que siempre aumente?* Además, se puede pedir a los estudiantes que profundicen en el análisis de la situación planteada, por ejemplo, solicitándoles que analicen las soluciones para distintos valores de la población inicial de peces. Se les puede proponer, por ejemplo, que analicen cuál será la solución si inicialmente hubiese una población de (a) 100 peces y (b) 280 peces (Figura 14), que son dos casos con comportamientos diferentes.

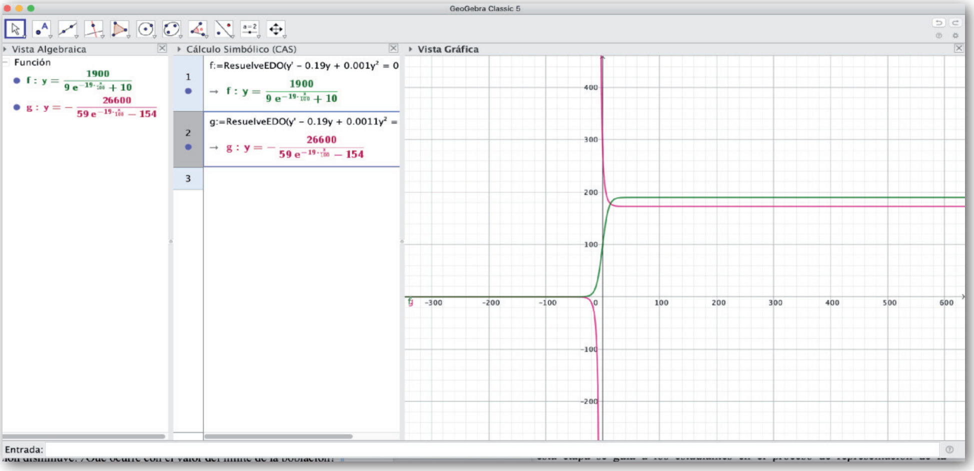


Figura 14. Solución de dos problemas de valores iniciales con diferentes comportamientos

Con las preguntas anteriores se ha profundizado en el análisis de la situación, para distintos valores de la población inicial de peces, es decir para distintas condiciones iniciales de la EDO. A continuación, puede plantearse a los estudiantes un conjunto de cuestiones que les permitan estudiar la situación en función del término de competición (b), por ejemplo: *Si el término de competición aumenta, ¿qué ocurre con el valor del límite de la población? ¿Y con la población? ¿Y si el término de competición disminuye?* Haciendo uso de GeoGebra, los estudiantes pueden resolver EDOs con valores de b mayores y menores que 0.001 y analizar las representaciones gráficas de las soluciones, aprovechando los deslizadores (Figura 15).

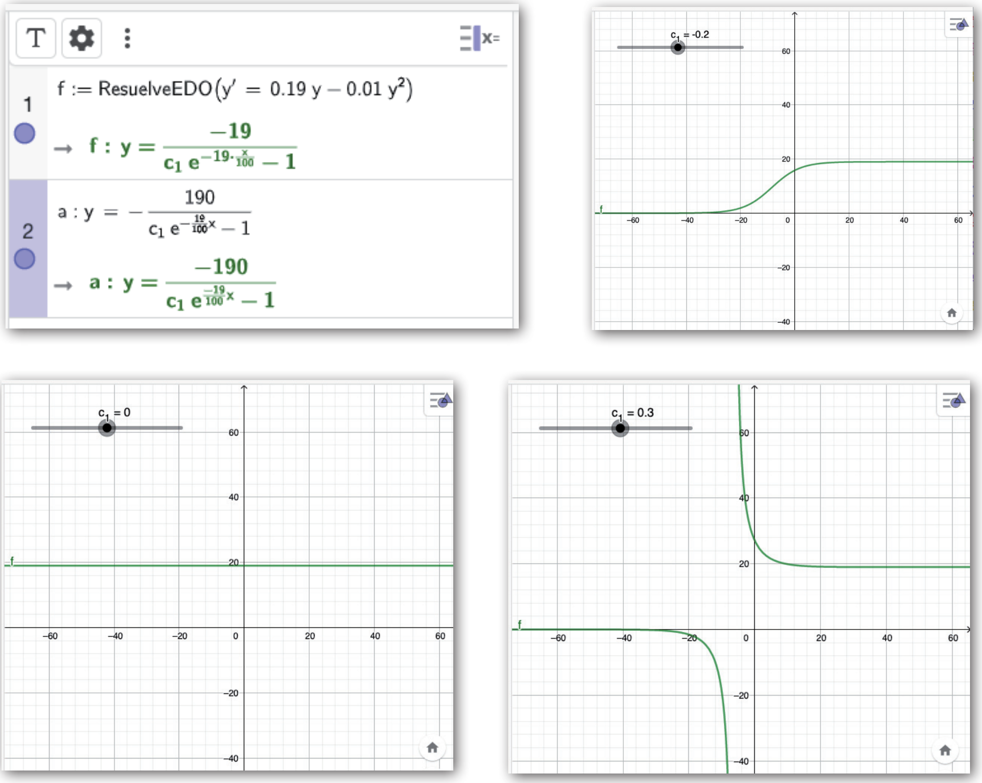


Figura 15. Estudio del caso b=0.01

En esta etapa convendría, además, dejar espacio para que los estudiantes planteen sus propias preguntas. Se les puede animar a formular preguntas a sus compañeros, que luego puedan resolver y discutir juntos.

Las preguntas en torno a las condiciones iniciales y al término de competición, además de permitir que los estudiantes profundicen en el análisis de la situación, les conducen a modelos cada vez más generales, foco de la siguiente etapa.

Etapa 4. Planteamiento y solución de casos generales

En esta etapa se analiza y discute en torno al tercer parámetro que interviene en la situación planteada a los estudiantes, la tasa de crecimiento de la población de peces. Se comenzaría con un conjunto de preguntas que lleven al estudiante a reflexionar sobre el significado de dicho valor y formular conjeturas (Figura 16):

La EDO con la que trabajamos en la etapa anterior era $\frac{dP}{dt} = 0'19P - bP^2$.

- ¿A qué hacía referencia el término 0'19? Recuerda cómo lo calculamos.
- Supongamos ahora que la tasa de crecimiento de la población es a. Escribe la EDO que modela la situación.
- ¿Qué significa, en términos de los nacimientos y las muertes de los peces, que la tasa de crecimiento, a, sea positiva?
- ¿Qué significa que sea negativa?
- ¿Qué ocurrirá en ese caso, con la población de peces, a medida que pase el tiempo?
- ¿Qué significa que la tasa de crecimiento sea cero?
- ¿Qué ocurrirá en ese caso, con la población de peces, a medida que pase el tiempo?

Figura 16. Preguntas para reflexionar sobre la tasa de variación

A estas preguntas pueden añadirse otras que ya fueron formuladas en etapas anteriores y que permiten retomar la relación del concepto de EDO con el significado geométrico de la derivada de una función, como *Analiza para qué valores de P la población, aumenta, disminuye y se mantiene constante*.

Una vez más, el uso de GeoGebra permite que los estudiantes puedan resolver EDOs con valores de *a* menores y mayores que 0.19 y analicen las representaciones gráficas de las soluciones, aprovechando los deslizadores (Figura 17), lo que les permitirá verificar si sus conjeturas eran correctas o no.

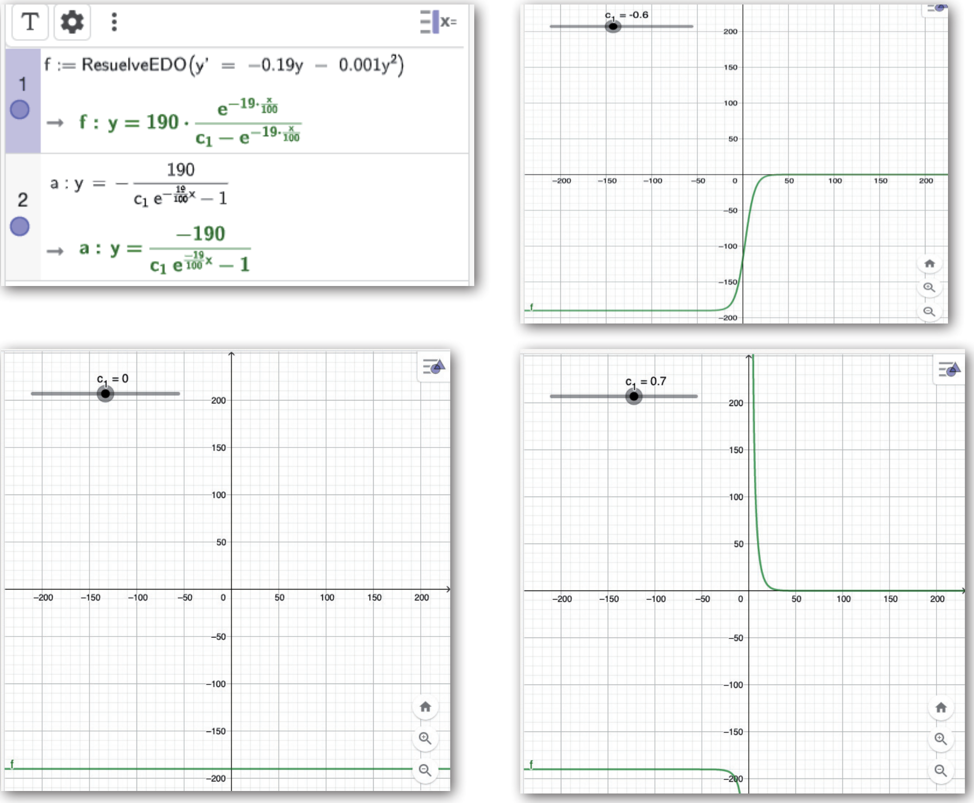


Figura 17. Estudio del caso a= -0.19 y b=0.01

Etapa 5. Análisis retrospectivo del proceso de solución

En esta etapa se pide a los estudiantes elaborar dos informes (Figura 18). El objetivo es que revisen el proceso de resolución que han seguido y los resultados obtenidos. Al docente, esta etapa le permitirá observar qué procesos y resultados han considerado más relevantes los estudiantes, si han establecido conexiones correctas entre los dos contextos de trabajo (matemático y no matemático), así como los errores y dificultades que puedan haber presentado.

En esta etapa deberás elaborar dos informes, uno dirigido al cliente que ha requerido tus servicios y otro dirigido al Colegio Oficial de Químicos de Canarias. En dichos informes debes reflejar, al menos, la siguiente información:

Para el cliente

- Cuál es la EDO que modela la variación en el número de peces que hay dentro de su recinto.
- Qué factores están involucrados en esta variación y qué significa el término de competición que has tenido que añadir.
- Cuál puede ser la razón de que el número de peces que hay dentro del recinto esté disminuyendo.
- Si, en su caso, hay un valor límite para la cantidad de doradas que habrá en su recinto.
- Una representación gráfica de lo que ocurre con el número de peces que hay dentro del recinto, dependiendo del número inicial de peces que haya y del término de competencia.
- Una posible solución a su problema para que el número de doradas no siga disminuyendo.

Para el Colegio Oficial de Químicos de Canarias

- Por qué has necesitado utilizar una EDO para modelar la situación.
- Por qué tuviste que considerar un elemento que el cliente no te proporcionaba (el término de competición).
- Un ejemplo de cómo utilizar la información que has obtenido para resolver cualquier situación análoga a esta, en la que el cliente te indique únicamente las tasas de nacimiento y mortalidad de la especie y el término de competencia.
- Representaciones gráficas que ilustren los distintos casos que pueden presentarse dependiendo de las tasas de natalidad y mortalidad y del término de competencia.

Figura 18. Actividad final con foco en análisis retrospectivo

Los dos ejemplos presentados, son tareas que se transfieren de resultados obtenidos en dos investigaciones cuyo enfoque es esencialmente distinto. En ambos casos, se ha realizado una adaptación de estas actividades para GeoGebra. En el primer caso se interpreta, en un ámbito contextualizado, el significado de la integral definida cuando no sólo se utiliza como para calcular áreas sino longitudes de curvas y, además, en esta situación no se puede encontrar una primitiva de la función sino que obligatoriamente debe ser calculada aproximadamente. En el segundo caso se trata de, a partir de ciertos protocolos elaborados para las cinco etapas de resolución de problemas, trabajar en un proyecto contextualizado vía el planteamiento y resolución de Ecuaciones diferenciales elementales.

Discusión final

Los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática en el nivel universitario presentan muchos aspectos en común con el resto de niveles educativos; sin embargo, también presentan algunas particularidades. Identificar y ser conscientes de estas particularidades permitirá, a los distintos actores involucrados, tomar mejores decisiones que contribuyan a disminuir el fracaso y las tasas de abandono en este nivel educativo.

Según el Informe de Datos y Cifras del Sistema Universitario Español correspondiente al curso 2019-2020[14] muchos grados del ámbito científico-técnico, especialmente las Ingenierías, presentan indicadores de fracaso muy altos que se manifiestan, entre otras formas, con unas elevadas tasas de abandono al finalizar el primer curso universitario. Las asignaturas relacionadas con las matemáticas, en muchas ocasiones, son consideradas como uno de los factores que interviene en dicho fracaso. ¿Qué se puede hacer, considerando la investigación en Didáctica de la Matemática, para contribuir a mejorar estos datos que preocupan por igual a educadores, gestores, y también a los estudiantes y sus familias?

La innovación, la personalización de las enseñanzas, al menos a las necesidades e intereses de cada uno de los Grados, y la adaptación a los cambios que se han ido incorporando en el resto de niveles educativos son algunos de los retos que la investigación en Didáctica de la Matemática Universitaria puede ayudar a afrontar en mejores condiciones, no de forma aislada y personalizada, dependiente de la buena voluntad de un número limitado de docentes, sino de manera informada, estructurada y alineada con los objetivos curriculares y el diseño de los programas educativos universitarios.

En la actualidad existe una amplia cantidad y diversidad de resultados de investigación en el ámbito de la Didáctica de la Matemática Universitaria. Si bien es cierto que aún existen muchos problemas de investigación sin abordar, o sobre los que es necesario profundizar, hay un reto principal que atender si realmente se quiere mejorar los resultados de los estudiantes: ¿Cómo hacer llegar los resultados de las investigaciones al aula? ¿Cómo generar instancias de transferencia efectivas, desde la investigación hasta la docencia universitaria?

Algunos de los principales resultados que ha mostrado la investigación en Didáctica de la Matemática y que afectan directamente al ámbito universitario tienen que ver con:

La transición entre la Educación Secundaria y la Universidad: Qué diferencias existen entre los contenidos matemáticos de estas etapas, las metodologías que se emplean o los procesos de evaluación, las características y el rol de las pruebas de acceso a la Universidad, las características y objetivos de los "Cursos Cero", etc.

14. https://www.Universidades.gob.es/stfls/Universidades/Estadisticas/ficheros/Datos_y_Cifras_2020-21.pdf

Las características particulares y la complejidad de ciertos conceptos matemáticos propios de la etapa universitaria: Discontinuidades que se producen entre el aprendizaje de conceptos matemáticos conceptualmente relacionados de forma estrecha, importancia de establecer redes de significado entre los diferentes conceptos matemáticos, priorizando lo conceptual a lo procedimental, etc.

El aporte que supone trabajar desde una perspectiva basada en la resolución de problemas: Plantear a los estudiantes situaciones relacionadas con el Grado que están cursando, hacer explícitas las diferentes etapas del proceso de resolución de problemas, especialmente aquellas que tienen que ver con aspectos metacognitivos o el análisis y reflexión en torno a la situación planteada, los procesos de resolución, las soluciones obtenidas y las posibles extensiones de la situación abordada, etc. Esto incluye mostrar la no linealidad de las etapas de resolución, generar un ambiente de trabajo donde haya espacio para la reflexión y el análisis por parte de los estudiantes, el error, y la discusión entre pares, desterrando así la idea de que los problemas deben resolverse en poco tiempo. Por parte del docente, esto incluye, además, la importancia de plantear "buenas preguntas" que promuevan la indagación, la reflexión, etc.

El uso de la tecnología como herramienta que contribuye tanto al proceso de resolución de problemas como a la construcción de esa red de significados asociados a los distintos conceptos matemáticos. Ciertas herramientas tecnológicas permiten dedicar más tiempo al análisis y la reflexión en torno a los conceptos matemáticos, los procesos de resolución, las soluciones obtenidas y su interpretación en las situaciones problemáticas, así como a la formulación de conjeturas y su verificación. Tal y como se ha podido observar en los ejemplos presentados en este capítulo, a medida que evoluciona la tecnología que tenemos a nuestra disposición, emergen nuevas opciones de enfrentarse a un mismo problema.

El reto es generar acciones que contribuyan a que estos conocimientos lleguen a los docentes universitarios y se produzcan los cambios necesarios en sus creencias y concepciones acerca de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, en este nivel educativo, que les lleven a la acción. Este reto nos conduce a un tema central: la formación del docente de Universidad.

Por otra parte, atender a la problemática general del fracaso y abandono en los primeros cursos universitarios requeriría de un proceso continuo de detección de problemas, análisis de la situación, generación de herramientas de intervención y evaluación del impacto de las mismas. En este contexto resultaría interesante, y quizás imprescindible, la creación de comunidades de colaboración, donde participen investigadores en Didáctica de la Matemática y profesores de matemáticas, tanto de Secundaria como del nivel universitario.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto ProID2021010018, del Gobierno de Canarias, cofinanciado por FEDER Canarias 2014-2020.

Referencias

Artigue, M. (2001). What can we learn from educational research at the University level? En D. Holton (Ed.), (2001). *The Teaching and Learning of Mathematics at University level. An ICMI study* (pp. 207-220). Kluwer Academic Publishers.

Artigue, M. (2019). Evolución de las investigaciones en Didáctica de la Matemática a nivel universitario. *Revista de la Academia de Ciencias Canaria*, *31,* 75-93.

Artigue, M. y Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM Mathematics Education*, *45*, 797-810.

Azcárate, C., Camacho-Machín, M., González, M. y Moreno, M. (Eds.), (2015). *Didáctica del Análisis Matemático: Una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM*. Servicio de publicaciones de la ULL. S/C de Tenerife.

Biza, I. (2021). Teaching and learning of Mathematics at the University Level. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 19-32). SEIEM.

Camacho-Machín, M. (2005). La Enseñanza y aprendizaje del Análisis Matemático haciendo uso de CAS. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 97-110). Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba - SEIEM.

Camacho-Machín, M. (2011) Investigación en Didáctica de las Matemáticas en el Bachillerato y primeros cursos de Universidad. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 195-223). SEIEM - Servicio de publicaciones de la Universidad de Castilla-La Mancha.

Camacho-Machín, M. (2021). Agenda de Investigación para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en el Nivel Universitario. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 33-48). SEIEM.

Camacho, M., Depool, R., y Santos-Trigo, L. M. (2010). Students' use of DERIVE software in comprehending and making sense of definite integral and area concepts. En F. Hitt, D. Holton, y P. W. Thompson (Eds.) *Research in Collegiate Mathematics Education VII. CBMS series* (Vol 16. pp. 29-61). American Mathematical Society.

Camacho, M., Perdomo, J. y Santos-Trigo, M. (2009). Revisiting university students' knowledge that involves basic differential equation questions. *PNA*, *3*(3), 123-133.

Camacho, M., Perdomo, J., y Santos, M. (2012). Procesos conceptuales y cognitivos en la introducción de las EDO vía la Resolución de Problemas. *Enseñanza de las Ciencias*, *30*(2), 9-32.

Depool, R. (2004). *La enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral en un entorno computacional. Actitudes de los estudiantes hacia el uso de un Programa de Cálculo Simbólico (PCS).* Tesis Doctoral (no publicada). Universidad de La Laguna. España.

Dorier, J. L. y Maaß, K. (2020). Inquiry-Based Mathematics Education. En D. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education (second edition*) (pp. 384-388). Springer.

Edwards, C. y Penney, D. (1996). *Cálculo.* Prentice Hall.

Gómez-Chacón, I. Hochnuth, R., Jaworski, B., Rebenda, J. Ruge, J. y Thomas, S. (Eds.), (2021). *Inquiry in University Mathematics Teaching and Learning. The PLATINUM Project*. Masaryk University. Czech Republic.

Guerrero-Ortiz, C., Mejía, H. y Camacho-Machín, M. (2016) Representations of a mathematical model as a means of analyzing growth phenomena. *Journal of Mathematical Behavior, 42*, 109-126.

Henriques, A. (2021). Aprendizagem da Matemática no ensino superior: Práticas de natureza exploratoria com suporte da tecnología. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 5-18). SEIEM.

Klein, F. (2016) *Elementary Mathematics from a higher standpoint (Volume 1: Arithmetic, Algebra, Analysis)*. Springer. (Nueva edición traducida por G. Schubring).

Lerman (Ed.), (2020). *Encyclopedia of Mathematics Education (second edition*). Springer.

Nortes Martínez-Artero, R., De Pro-Bueno, A. y Nortes Checa, A. (2021). De la PAU a la EBAU: Un análisis en el dominio de las matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales. *Educatio Siglo XXI,* 39(2), 255-276. https://doi.org/10.6018/educatio.403561

Perdomo-Díaz, J. (2010). *Construcción del concepto de ecuación diferencial ordinaria en escenarios de resolución de problemas.* Tesis Doctoral (no publicada). Universidad de La Laguna. España.

Polya, G. (1945). *How to Solve It.* Princeton University Press.

Raychadhuri, D. (2007). A layer framework to investigate student understanding and application of the existence and uniqueness theorems of differential equations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *38*(3), 367-381.

Santos-Trigo, M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos.* Trillas.

Socas, M. (2001), *Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de Competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico*. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna. Documento inédito.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 334-370). NCTM.

Thurston, W. P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *30*(2), 161-177.

Winsløw C. y Rasmussen C. (2020). University Mathematics Education. En D. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education (second edition*) (pp. 881-890). Springer.

Matemáticas en la Formación Profesional

Mathematics in Vocational Education and Training

Blanco, T.F.[a], Sequeiros, P.G.[a], Franco-Ferreira, P.[b], Ortiz-Laso, Z.[c], Diego-Mantecón, J.M. [c], Rodríguez-Raposo, A.B.[a]

[a] *Universidad de Santiago de Compostela,*
[b] *CIFP Politécnico de Santiago,*
[c] *Universidad de Cantabria.*

Resumen

En este capítulo se presenta una visión amplia de la necesidad y el papel de las matemáticas en la Formación Profesional (FP). Para ello se sitúa la FP ante los retos sociales como una pieza clave de aprendizaje, innovación y transformación. Se recogen ejemplos de la aplicación concreta de contenidos matemáticos en diversas profesiones y se analiza la presencia de asignaturas específicas de matemáticas en esta etapa en distintos países. Se muestra un estudio exploratorio diagnóstico de las matemáticas en la FP española, que pone de manifiesto que las matemáticas que se aprenden en la secundaria obligatoria no cubren las exigencias de los Ciclos Superiores. Por último, se dan una serie de perspectivas y orientaciones centradas en aprovechar el carácter interdisciplinar de los módulos de FP para desarrollar propuestas STEM que permitan tanto promover las competencias del alumnado como mejorar sus afectos hacia las matemáticas.

Palabras clave: Didáctica, Matemáticas, Formación profesional, Competencia matemática, FP superior.

Abstract

This chapter presents a broad view of need and role of mathematics in Vocational Education and Training (VE). For this purpose, VET is positioned in the face of social challenges as a key piece for learning, innovation, and transformation. Examples of the application of specific mathematical content in different professions are collected, and the presence of mathematics subjects at this stage at different countries is analysed. A diagnostic example of mathematics in the Spanish VET is presented, showing that secondary school mathematics does not necessarily cover the demands of Higher VET. Finally, a series of perspectives and orientations are given, focused on taking advantage of the interdisciplinary nature of VET modules to develop STEM proposals allowing both to promote the skills of students and to improve their affections towards mathematics.

Keywords: Didactics, Mathematics, Vocational education and training, Mathematical competence, Higher VET.

Introducción

La Didáctica de la Matemática se ha movilizado principalmente alrededor de la enseñanza académica, dejando en segundo plano la enseñanza para el trabajo. Desempeñar con éxito la vida profesional también requiere el desarrollo de una sólida competencia matemática. Esto es especialmente importante en los Ciclos Superiores de Formación Profesional, donde el nivel teórico de los módulos (asignaturas) aumenta considerablemente respecto a la parte técnica y práctica con relación a los Ciclos Medios. Muchos de los conceptos impartidos se construyen a partir de conocimientos matemáticos importantes implicados en la resolución de problemas como, por ejemplo, códigos de numeración, álgebra de Boole, números complejos, funciones trigonométricas, funciones sinusoidales o derivadas e integrales (Fernández Solo de Zaldívar, 2017; Ozdemir y Onder-Ozdemir, 2017).

La Formación Profesional (FP) es hoy en día considerada entre los pilares fundamentales para el desarrollo económico y social, convertida en una estrategia política prioritaria en momentos de crisis financiera. Entre los Objetivos de Desarrollo Sostenible de la Agenda 2030, se espera (meta 4.4 del objetivo 4) aumentar considerablemente el número de jóvenes y adultos que tienen las competencias necesarias, en particular técnicas y profesionales, para acceder al empleo, el trabajo decente y el emprendimiento, y (meta 8.6 del objetivo 8) reducir considerablemente la proporción de jóvenes que no están empleados y no cursan estudios ni reciben capacitación. En términos globales, la respuesta a estos objetivos debe tener en cuenta necesariamente el actual modelo económico basado en el conocimiento, que demandará una adecuada formación de los ciudadanos para responder a las exigencias del nuevo mercado laboral (Lorente García, 2015), que parece que se sustentará en los avances de la cuarta revolución industrial, dirigidos hacia la inteligencia artificial, aprendizaje automático, robótica, nanotecnología, impresión 3D, genética y biotecnología (Echeverría y Martínez, 2018).

En el informe de Bakhshi et al. (2017), que presenta las competencias claves relacionadas con el trabajo del futuro, se consideran en particular como capacidades cognitivas la visualización, el razonamiento lógico y el razonamiento matemático. Los resultados de esta investigación tienen implicaciones tanto para las empresas como para los sistemas educativos, en la línea de la promoción de aprendizajes más competenciales, por un lado, y de itinerarios más flexibles y adaptados a las demandas de desarrollo y acreditación profesional, por otro.

Todo lo anterior sitúa a la FP como el espacio donde intervienen, además de los agentes que lo hacen en el Bachillerato y en la ESO (estudiantes, profesorado, centros educativos y familias), las empresas, conformando un espacio en el que la interconexión y retroalimentación de estos componentes deben promover flujos de aprendizaje profesional y de innovación (Echeverría y Martínez, 2019).

La FP ante los retos sociales

Echeverría y Martínez (2019) destacan el papel de la FP en la Revolución 4.0 como clave de aprendizaje, innovación y transformación, y hacen una llamada de atención a la sociedad española para que considere que la FP no ha de ser una vía solo para los jóvenes con las peores calificaciones escolares. Su informe sobre esta vertiente educativa recoge un incremento del 77% en la matriculación en FP desde el comienzo de la crisis del 2008 hasta nuestros días. Por otra parte, el informe Infoempleo Adecco 2019 muestra que un 42,3% de las ofertas de trabajo publicitadas en 2018 requerían un grado de FP (Medio: 17,8%; Superior 24,4%), superando por primera vez en nuestro país a las que demandaban un título universitario (38,5%). A pesar de ello, España sigue teniendo una de las tasas más bajas de matriculación en FP entre los países de la OCDE. El 47% de los jóvenes de 15 a 19 años están matriculados en programas generales de secundaria mientras que el promedio de la OCDE es del 36%; y solo el 12% en programas de FP en comparación con el promedio del 26% de la OCDE. Así, España se encuentra, por detrás de Irlanda, entre los países del mundo con mayor porcentaje de estudiantes escolarizados en Bachillerato y por encima de Brasil en menor proporción de alumnado de Formación Profesional Inicial (Echevarría y Martínez, 2019a).

Gamboa et al. (2020) consideran la FP como el espacio adecuado para cubrir el reto prioritario de reducción del abandono educativo temprano. España se distingue por tener la tasa más alta de abandono escolar temprano (17,9%) de la UE, cuya media es del 10,6%, a pesar de haberse reducido ostensiblemente desde 2009. Según estos autores, constituye una alternativa muy relevante para la capacitación de estos jóvenes y de aquellos que ni estudian ni trabajan (NINIS) hacia su transición al empleo cualificado. El tanto por ciento de jóvenes entre 15 y 29, que no estudian ni trabajan es del 19,1%, solo superado por Grecia e Italia. Solo el 33,3% de quienes se gradúan por primera vez en la segunda etapa de Educación Secundaria se titulan en FP, mientras que la media de la OCDE es de 40,1% y la de la UE es de 46,3%. Sin embargo, la tasa de acceso a la Educación Terciaria en España es del 78,9% (no universitaria 31,1%, universitaria 48,9%) superando a la de las medias de la OCDE (64,9%) y de la UE (62,9%).

También resulta el espacio adecuado para la capacitación de grupos vulnerables como las personas extranjeras, desempleadas y con bajo nivel educativo (Sancha y Gutiérrez, 2018) y para adultos de mayor edad, aumentando así su capacidad para afrontar los cambios en el mundo del trabajo (Cedefop, 2020). Los países con programas educativos bien establecidos, que combinan la actividad en un centro formativo con el trabajo en una empresa, han sido los más eficaces en la lucha contra el desempleo juvenil. Entre ellos, cabe destacar Suiza, Austria y Alemania, que desde hace años sobresalen por el desarrollo de la Formación Profesional Dual (FPD) entre las personas de 25 a 34 años. Un promedio del 17% de alumnado de enseñanza secundaria superior de los países de la OCDE están matriculados en programas educativos que combinan escuela y trabajo, frente al 0,4% de jóvenes españoles del mismo nivel educativo.

En la actualidad, el impulso de iniciativas basadas en proyectos STEM se ha convertido en un pilar fundamental de la planificación educativa, como se puede ver en convocatorias STEM realizadas desde diversas consejerías de España. Siguiendo esta línea, empresas punteras en diversos sectores se han aliado con las administraciones públicas para desarrollar programas de fomento de las vocaciones tecnológicas entre los jóvenes y así construir un modelo de enseñanza STEM para la Educación Técnico Profesional (Dougherty y Harbaugh Macdonald, 2019; Durando, 2013). En esta línea, otro de los retos de la sociedad se dirige hacia la brecha de género que existe en los estudios y profesiones consideradas dentro de la familia STEM (Smyth y Steinmetz, 2015), que se extiende también al ámbito de la formación profesional. Entre los años 2015 y 2019 menos de un 15% de las personas matriculadas en grados STEM eran mujeres, siendo además estos grados en los que la tasa de abandono femenina es mayor. Por otro lado, la tasa de desempleo entre las mujeres con una titulación de formación profesional es mayor que la masculina (Fundación Bankia, 2020). Además, los grados STEM son, junto con los industriales (en los que también hay infrarrepresentación femenina), los que presentan mayor empleabilidad. Se presenta por tanto como un objetivo social fomentar la representación femenina dentro de los grados de la familia STEM, y poner medios para evitar el abandono prematuro (Fundación Bankia, 2020).

La Revolución 4.0 ha dado pie a la transformación de las instituciones de Educación Superior con nuevos modelos de aprendizaje y la necesidad de desarrollar competencias para poder atender a los desafíos del siglo XXI (WEF, 2015). Uno de esos desafíos es la incorporación de estudiantes con distintas trayectorias de aprendizaje que ya no provienen solo de la educación secundaria (Schuetze, 2014). El profesorado ha de redefinir sus funciones y adaptarse a una nueva concepción de aprendizaje apoyado en las nuevas tecnologías para ayudar a que su alumnado desarrolle las competencias que esta sociedad tan cambiante requiere. Parte de esos cambios están ligados directamente con herramientas y conocimientos matemáticos, y, por tanto, la competencia matemática será necesaria para que los estudiantes se adapten a las exigencias de los nuevos mercados laborales (París Mañas et al., 2014; Tejada Fernández, 2012).

Matemáticas para el trabajo

Las matemáticas que se requieren en un contexto de formación profesional no son fáciles de definir (Straesser, 2007). Estando vinculados a la profesión o campo en el que se va a desarrollar el trabajo, los conocimientos matemáticos específicos que son importantes en un ámbito de la formación profesional pueden no ser útiles en otros ámbitos (Bakker et al., 2011; Jorgensen, 2020; Saló i Nevado y Pehkonen, 2018; Straesser, 2015). El estudio de Bakker et al. (2011) muestra, por ejemplo, que la medida está más presente en las ocupaciones que exigen una cualificación de grado medio en los sectores de ingeniería y tecnología que en los de economía y salud. Los propósitos de la medición en este nivel se centran en el cumplimiento de normas de calidad, hacer que algo encaje (muebles, textiles, ensamblaje), la supervisión, la seguridad y la resolución de problemas. Por su parte, Straesser (2015) recoge que los conocimientos matemáticos específicos como el teorema de Pitágoras pueden ser relevantes para los trabajadores del metal y los carpinteros que trabajan en el sector de la construcción, sin embargo, la geometría raramente se utiliza en el comercio y la administración.

La sociedad actual, altamente tecnológica, demanda destrezas diferentes a las que eran necesarias durante la Revolución Industrial (Redmer y Dannath, 2020), entre ellas el pensamiento crítico, la resolución de problemas y la toma de decisiones (Jang, 2016). Estas destrezas requieren, en variedad de contextos, la aplicación de conocimiento matemático para expresar situaciones matemáticamente y desarrollar distintas estrategias de resolución (Jang, 2016; Kilbrink y Bjurulf, 2013; Lindberg y Grevholm, 2013). Este conocimiento incluye generalmente a la aritmética e incorpora en función de la profesión contenidos de geometría, medida o estadística (Bakker et al., 2011; FitzSimons, 2001; Lindberg y Grevholm, 2013; Saló i Nevado y Pehkonen, 2018; Straesser, 2015). Profesionales de la ebanistería, el maquillaje y la peluquería utilizan conocimientos geométricos como trigonometría, área, volúmenes, proyecciones y proporciones. Por ejemplo, para hacer prototipos a escalas (Cuendet et al., 2014; Saló i Nevado y Pehkonen, 2018), para lograr un efecto simétrico del rostro cuando se aplican técnicas de maquillaje (Boistrup y Hällback, 2021), para realizar un peinado con rizos o para calcular el volumen del champú y estimar el coste de un lavado (Boistrup y Hällback, 2021; Frejd y Muhrman, 2020). En muchas ocasiones las matemáticas aparecen mediadas por la tecnología, tanto para el uso de instrumentos de medida como para enfrentarse a gráficos estadísticos (Bakker et al., 2011; Frejd y Muhrman, 2020). Por ejemplo, la hoja de cálculo interviene en el análisis de la calidad de un producto químico (Bakker et al., 2011), así como en la estimación del coste de un lavado de pelo (Frejd y Muhrman, 2020). A veces es necesaria una tecnología más avanzada que posibilite la toma de datos, como en el caso del análisis de un producto químico (Bakker et al., 2011).

Por otro lado, existen discrepancias sobre la importancia de las matemáticas en la FP. Una parte del personal investigador, el profesorado y el personal trabajador reconoce la necesidad de una formación matemática sólida para garantizar el éxito en el desempeño profesional (FitzSimons, 2015; Gonçalves et al., 2018; Jorgensen, 2020; Redmer y Dannath, 2020; Saló i Nevado y Pehkonen, 2018). Bynner y Parsons (1998) mostraron de hecho que el personal con una baja competencia matemática tiene más dificultades para encontrar un empleo estable, estando ocupados de media durante menos tiempo. Existen también evidencias de que poseer conocimientos matemáticos más avanzados ayuda a resolver problemas de manera más eficiente, sin malgastar tiempo ni recursos, en profesiones como la de ebanista (Saló i Nevado y Pehkonen, 2018). Las personas capaces de aplicar sus conocimientos matemáticos obtienen mejores resultados en el mundo laboral e incluso una mayor autonomía, según Boistrup y Hällback (2021) y Saló i Nevado y Pehkonen (2018), que identificaron también que aquellas con baja cualificación en matemáticas recurrían a otras para ejecutar determinados pedidos.

No obstante, hay quien no percibe la relevancia de esta disciplina en la formación profesional, incluido personal académico en el área de educación matemática (Bakker et al., 2011; FitzSimons, 2014; Lindberg y Grevholm, 2013). Esto podría deberse, entre otros factores, a una falta de conocimiento de las complejidades de los trabajos que exigen matemáticas (FitzSimons, 2014; Saló i Nevado y Pehkonen, 2018), así como a una falta de identificación de la disciplina (Bakker et al., 2011; Lindberg y Grevholm, 2013; Saló i Nevado y Pehkonen, 2018; Straesser, 2015). En este sentido, Bakker et al. (2011) y Saló i Nevado y Pehkonen (2018) observaron que algunos trabajadores expresaron que únicamente utilizaban conocimientos de química y ebanistería, respectivamente, sin percibir que también empleaban matemáticas.

Formación matemática en la FP

El alumnado de la FP representa una muestra singular. No es esta la vía seguida tradicionalmente por el grupo de mayor éxito académico en la etapa de secundaria (Berger, 2012; Koreshnikova et al., 2018; Rosvall et al., 2017; Weißeno et al., 2016). Generalmente, se asume que la transición de la formación académica, que incluye la secundaria obligatoria y en ocasiones bachillerato, a la profesional no supone ningún problema para los estudiantes. De esta forma, las matemáticas que se aprenden a lo largo de la formación obligatoria serían fácilmente aplicadas en etapas posteriores (FitzSimons, 2014). Sin embargo, una investigación reciente de Blanco y Franco-Ferreira (2021) reveló que profesorado de FP de grados superiores encuentra dificultades para instruir a los estudiantes debido a sus carencias en matemáticas. Resultados similares arrojó la investigación de Kilbrink y Bjurulf (2013) con personal docente y supervisores de prácticas en Suecia. Este hecho podría influir en la instrucción que se ofrece, como sugieren Suárez Salas y Celis Guzmán (2021), que insinúan que los profesores plantean un número escaso de situaciones que requieren demandas cognitivas altas debido a la percepción que tienen del conocimiento matemático de los estudiantes.

Diferentes estudios han identificado carencias relacionadas con la falta de conocimiento matemático elemental (Blanco y Franco-Ferreira, 2021; Ewing, 2017; Kilbrink y Bjurulf, 2013; Jorgensen, 2020; Voss et al., 2021), la incapacidad para aplicar las matemáticas en contexto (Blanco y Franco-Ferreira, 2021; Kilbrink y Bjurulf, 2013; FitzSimons y Boistrup, 2017), y la baja disposición hacia la disciplina (Berger, 2012; Blanco y Franco-Ferreira, 2021; Dalby y Noyes, 2015; Kelly, 2019). Estas tres carencias son normalmente manifestadas en las personas que estudian FP superior según su perfil académico, como se verá en el apartado 5. En este sentido, FitzSimons (2014) sugiere un replanteamiento de las vías de acceso a la formación profesional para lograr un buen desempeño profesional.

En lo que respecta a la idoneidad de asignaturas exclusivamente de matemáticas en la formación profesional, esta ha sido cuestionada por algunos investigadores. Según Weißeno et al. (2016), por ejemplo, la competencia matemática de estudiantes alemanes matriculados en un curso de formación prevocacional no cambió tras cursar durante un año matemáticas. En ocasiones se sugiere que el éxito en estas asignaturas está relacionado con la metodología de enseñanza seguida (Dalby, 2021), y más en concreto con el rol que desempeña el profesorado. Las asignaturas de matemáticas suelen ser impartidas con una percepción poco práctica de la disciplina, dominando las clases expositivas y los consecuentes ejercicios con lápiz y papel (Dalby y Noyes, 2015; Lindberg y Grevholm, 2013). La instrucción del profesorado fomenta además un número insuficiente de oportunidades para generar interacciones que requieren un nivel cognitivo alto (Rosvall et al., 2017; Suárez Salas y Celis Guzmán, 2021). En algunas ocasiones se estimula la colaboración entre el profesorado de matemáticas y el de otra asignatura de la formación profesional, de manera que este último se centra en las actividades prácticas, y el de matemáticas en destacar los aspectos matemáticos de estas actividades (Boistrup y Hällback, 2021; Frejd y Muhrman, 2020).

Las matemáticas en la FP de otros países

La integración de los estudios de matemáticas dentro de la formación profesional en cada país es muy dispar. Hay países, como Suecia o Noruega, que incluyen programas específicos de matemáticas, mientras que hay otros como Brasil en los que se integran esencialmente de forma transversal. Hay que tener en cuenta, además, que en algunos de ellos existe la posibilidad de acceder a estudios superiores universitarios a través de ciclos formativos, por lo que se pone énfasis en alcanzar una formación matemática académica que permita este paso. Esta disparidad tanto de enfoque como de tratamiento curricular dificulta la realización de un análisis global. A continuación, se presenta una pequeña muestra de diferentes modelos de enseñanza matemática integrada en estudios de formación profesional en varios países que permite observar fortalezas y debilidades de cada uno de los modelos presentados.

La formación profesional sueca cubre tanto conocimientos específicos de la profesión en cuestión como conocimiento general de asignaturas como inglés y matemáticas (Boistrup y Hällback, 2021). La asignatura de matemáticas, con 100 horas de duración, tiene un objetivo doble: preparar a los estudiantes para la ocupación que ejercerán en el futuro y formarlos para la educación superior (Frejd y Muhrman, 2020). Las matemáticas que se imparten se basan en las de la educación obligatoria y dependen del programa formativo que se siga (Lindberg y Grevholm, 2013). Aunque hasta 1994 los estudiantes eran formados por profesores de formación profesional, actualmente las matemáticas son impartidas por profesores de matemáticas (Rosvall et al., 2017). En algunos centros, el profesor de matemáticas y el de formación profesional colaboran impartiendo una clase una vez a la semana (Boistrup y Hällback, 2021). En Noruega, se sigue un esquema similar al sueco, se cursan tres tipos de asignaturas: académicas, vocacionales y específicas. Las matemáticas se incluyen dentro de las académicas el primer año y deben estar relacionadas con el programa de formación profesional (Hiim, 2020; Sundtjønn, 2021). El primer año de formación profesional se cursa uno de los nueve programas que conducen a una variedad de profesiones dentro de cada campo y el segundo año permite especializarse en una profesión específica (Hiim, 2020). Además, en el currículo de educación secundaria noruego se incluyen optativas en las que se percibe la posibilidad de orientar a los estudiantes hacia la formación profesional. En concreto, en todos los centros de secundaria se ofrece una asignatura sobre el mundo del trabajo. Esta asignatura pretende que los estudiantes adquieran conocimiento acerca de las profesiones y desarrollen tareas profesionales de diferentes ocupaciones que producen servicios y productos. Además, hay otras asignaturas optativas orientadas a la formación profesional que pueden ser propuestas (Luimes y Karseth, 2019).

Dalby y Noyes (2018, 2022) recogen el interés político en Inglaterra por mejorar la formación matemática de estudiantes en la formación profesional. Los estudiantes que hayan obtenido una calificación menor o igual que 4 sobre 9 en matemáticas en la evaluación nacional (Certificado General de Educación Secundaria) deben cursar una asignatura de matemáticas en la formación profesional. El objetivo de esta materia de matemáticas es volver a examinarse de la prueba general de secundaria. Por otra parte, los sindicatos obreros ofrecen programas de formación en matemáticas e inglés dirigidos a trabajadores poco cualificados y socialmente desfavorecidos (Kelly, 2019). En línea con las demandas de la sociedad actual, estos programas promueven el aprendizaje colaborativo, separándose del enfoque tradicional que impera en los colegios, donde las matemáticas, al igual que la lengua, no son consideradas como una disciplina aislada, sino que están contextualizadas en el mundo laboral.

La formación profesional en Brasil basa su currículo en la interdisciplinariedad con el fin de superar la fragmentación de contenidos e integrarlos para la consecución de competencias relacionadas con el módulo laboral. Así, las matemáticas aparecen en diferentes materias como base tecnológica para alcanzar los objetivos de estas, o si aparecen como materias individuales se muestran específicamente relacionadas con las competencias del módulo correspondiente (Gonçalves y Pires, 2014; da Silva Pimentel et al., 2021). Al no aparecer como materia independiente, en muchas ocasiones está impartida por profesores sin una profesión específicamente matemática. De hecho, la formación del profesorado varía desde personas con formación académica en matemáticas y en didáctica hasta personas sin formación académica, pasando por profesorado que proviene de carreras técnicas o de formación profesional (da Silva Pimentel et al., 2021). A pesar de que existen indicios que indican que el profesorado con formación estrictamente matemática se aleja del principio básico de interdisciplinariedad (Gonçalves et al., 2018), también se encuentra profesorado que sí enfoca sus programaciones en este sentido (da Silva Pimentel et al., 2021).

Debido a la organización sociopolítica estadounidense, en la que los estados actúan en muchos aspectos de forma independiente unos de otros, su sistema educativo está fuertemente descentralizado, sin un currículum global para todo el país (Gonçalves et al., 2018). En el año 2010 las autoridades educativas federales establecieron unas directrices curriculares para los últimos cursos de la educación preuniversitaria (high school), dentro de los que se encuadra la career and technical education (CTE), o formación profesional en EE. UU. (Gonçalves et al., 2018, Asunda et al., 2015). Estas directrices, Common Core State Standards conocidas por sus siglas CCSS, marcan objetivos globales sobre el aprendizaje de las matemáticas y la lengua inglesa, haciendo hincapié en aspectos competenciales y aplicados. La mayoría de los estados se adhirieron a las CCSS (Asunda et al., 2015), con lo que la integración de las matemáticas en los currículos de los estudios CTE se cohesionan esencialmente a través de ellas. Así, el trabajo de los contenidos matemáticos se da de manera transversal y poniendo énfasis en tareas de tipo modelización (Gonçalves et al., 2018). Sin embargo, y dado que los estudios CTE dan acceso a la educación superior, estas tareas deben resaltar la conexión con las matemáticas académicas. Puesto que el profesorado de los estudios CTE habitualmente no está especializado en matemáticas, se aconseja una colaboración entre éste y especialistas en educación matemática. Además, para llevar a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas se sugiere una metodología, Math-in-CTE, similar al enfoque STEAM en este tipo de enseñanzas (Asunda et al., 2015).

Los párrafos anteriores han puesto de manifiesto que, a pesar de la gran disparidad de sistemas educativos y del tratamiento del conocimiento matemático, en todos los países analizados existe la característica común de buscar su enseñanza desde y para los módulos específicos de formación profesional.

Las matemáticas en la estructura de la FP española

La finalidad de la Formación Profesional en el sistema educativo es “preparar al alumnado para la actividad en un campo profesional y facilitar su adaptación a las modificaciones laborales que pueden producirse a lo largo de su vida, contribuir a su desarrollo personal y al ejercicio de una ciudadanía democrática y pacífica, y permitir su progresión en el sistema educativo, en el marco del aprendizaje a lo largo de la vida.” (LOMLOE, 2020, p. 122900). En el Real Decreto 217/2022 se recoge que el desarrollo curricular de las matemáticas debe prestar especial atención a la adquisición de las competencias clave establecidas en el perfil de salida del alumnado al término de la enseñanza básica, siendo las líneas principales en la definición de las competencias específicas de matemáticas la resolución de problemas y las destrezas socioafectivas, y proponiéndose para su adquisición la movilización de un conjunto de saberes básicos que se estructuran en torno al concepto de sentido matemático, y se organizan en dos dimensiones: cognitiva y afectiva. Los sentidos se entienden como el conjunto de destrezas relacionadas con el dominio en contexto de contenidos numéricos, métricos, geométricos, algebraicos, estocásticos y socioafectivos, y permiten emplear los saberes básicos de una manera funcional, proporcionando la flexibilidad necesaria para establecer conexiones entre ellos, bajo una idea de competencia matemática que significa poseer habilidad para comprender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de contextos intra- y extra-matemáticos y situaciones en las que las matemáticas pueden tener protagonismo (Caraballo et. al, 2013; Niss, 1999).

La LOMCE (2013), en relación con la Formación Profesional, se propuso como objetivo revitalizar la opción del aprendizaje profesional e introdujo una mayor flexibilidad en el acceso y en las relaciones entre los distintos subsistemas de la FP. Se crea un nuevo título, la Formación Profesional Básica (FPB) de dos años que sustituye a los programas de Cualificación Profesional Inicial anteriores. Se mantienen los ciclos de Grado Medio y Grado Superior, con una organización modular que integra los contenidos teórico prácticos adecuados a los diversos campos profesionales y se incluye como novedad la Formación Profesional Dual (FPD), que alterna la distribución horaria entre el centro educativo y la empresa. Los títulos y los currículums de la FP están referidos al Catálogo Nacional de Cualificaciones Profesionales (INCUAL) y la mayoría son currículos de la LOE del 2006, que no sufrieron variación con la LOMCE. Todos los ciclos tienen una duración de dos años y se puede acceder a los ciclos de Grado Medio desde la ESO, la Formación Profesional Básica y por prueba de acceso y a los ciclos de Grado Superior desde el Bachillerato, desde los Ciclos de Grado Medio y por prueba de acceso. En la Figura 1 se muestra el organigrama de las vías de acceso para los ciclos formativos de Grado.

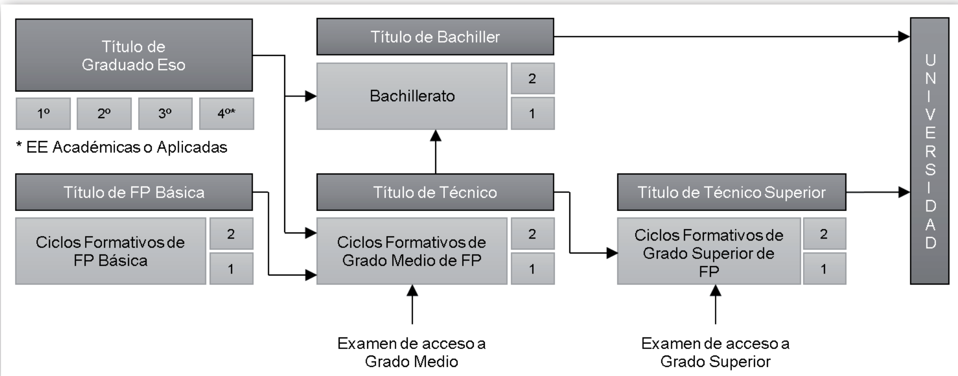


Figura 1. Organigrama de las vías de acceso a los Ciclos Formativos de Grado (Blanco y Franco-Ferreira, 2021, p. 156)

En el caso de la FPB, se trata de una medida dirigida a alumnado de entre 15 y 17 años que, habiendo cursado tercero de ESO o, excepcionalmente, segundo, está en riesgo de fracaso escolar o haya fracasado, con una doble finalidad: facilitar su permanencia en el sistema educativo y ofrecer mayores posibilidades para su desarrollo personal y profesional. Hablamos por tanto de un colectivo especialmente vulnerable que está prácticamente ante su última oportunidad formativa para una inserción laboral efectiva (Sarceda-Gorgoso y Barreira-Crujeiras, 2021). Para contribuir a que el alumnado adquiera o complete las competencias clave, los ciclos de FPB incluyen, además de los módulos de Formación Profesional específica, módulos de formación básica de carácter general. Estos son el Módulo de Ciencias Aplicadas I en el primer curso, y el Módulo de Ciencias Aplicadas II en el segundo curso. Al principio de cada uno de estos módulos se incorporan los contenidos de matemáticas que se detallan en la Tabla 1.

Tabla 1. Contenidos matemáticos de los módulos de ciencias aplicadas

MÓDULO CIENCIAS APLICADAS I
Resolución de problemas mediante operaciones básicas
Reconocimiento y diferenciación de los distintos tipos de números. Representación en la recta real.
Utilización de la jerarquía de las operaciones
Interpretación y utilización de los números reales y las operaciones en diferentes contextos.
Proporcionalidad directa e inversa.
Los porcentajes en la economía
Resolución de ecuaciones sencillas
Progresiones aritméticas y geométricas.
Traducción de situaciones del lenguaje verbal al algebraico.
Transformación de expresiones algebraicas.
Desarrollo y factorización de expresiones algebraicas.
Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.
MÓDULO CIENCIAS APLICADAS II
Resolución de ecuaciones y sistemas en situaciones cotidianas
Transformación de expresiones algebraicas.
Obtención de valores numéricos en fórmulas.
Polinomios: raíces y factorización.
Resolución algebraica y gráfica de ecuaciones de primer y segundo grado.
Resolución de sistemas sencillos.

Realización de medidas en figuras geométricas
Puntos y rectas.
Rectas secantes y paralelas.
Polígonos: descripción de sus elementos y clasificación.
Ángulo: medida.
Semejanza de triángulos.
Circunferencia y sus elementos: cálculo de la longitud.
Interpretación de gráficos
Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica.
Funciones lineales. Funciones cuadráticas.
Estadística y cálculo de probabilidad.
Uso de aplicaciones informáticas para la representación, simulación y análisis de la gráfica de una función.

La competencia matemática en los Ciclos Superiores: Un ejemplo diagnóstico

En la sección 3 se ha dado una breve panorámica sobre la investigación en matemáticas en diversas profesiones. La mayor parte de los estudios se han centrado en profesiones que requieren de un título de FPB o de Grado medio, sin abordar aquellas situaciones que requieren profesionales de Grado Superior. También se ha visto que la estructura de la FP en España no contempla formación matemática específica ni en los ciclos de Grado Medio ni en los Ciclos de Grado Superior (Sección 4.2). Debido al número tan elevado de familias profesionales y módulos dentro de cada una no será posible detallar en este espacio las matemáticas que necesitan cada uno de ellos. En lo que sigue, a modo de ejemplo, se presentará dos estudios que tratan de poner en relieve la competencia matemática de los estudiantes de Ciclos Superiores de FP, uno desde la percepción de los profesores y otro desde la autopercepción de los estudiantes. Para poder entender esta competencia se ha relacionado con la vía de acceso a la que acceden los estudiantes a los ciclos de Grado Superior. El acceso a los ciclos de Grado Superior se puede realizar desde el Bachillerato, desde los Ciclos de Grado Medio y por prueba de acceso (Ver figura 1 en la sección 4.2).

Percepción de la competencia matemática por el profesorado

El primer estudio (Blanco y Franco-Ferreira, 2021) aborda la percepción del profesorado de FP sobre la competencia matemática con la que llega el alumnado a los Ciclos Superiores, centrado en el nivel de competencia en función de la vía de acceso a dichos ciclos y en los conocimientos y destrezas matemáticas previas que requieren los distintos módulos formativos. Se realizaron entrevistas semiestructuradas al profesorado de un módulo de primer curso de cada uno de los ocho ciclos superiores de FP que se imparten en el CIFP Politécnico de Santiago de Compostela (Tabla 2).

Tabla 2. Módulos analizados en Blanco y Franco-Ferreira (2021)

Ciclo Superior	Módulo
Sistemas Electrotécnicos	Sistemas y Circuitos Eléctricos
Sistemas de Telecomunicación e Informáticos	Técnicas y Procesos en Infraestructuras de Telecomunicación
Automatización y Robótica Industrial	Sistemas de Potencia
Mantenimiento Electrónico	Circuitos Electrónicos Analógicos
Construcciones Metálicas	Diseño de Construcciones Metálicas
Diseño y Amueblamiento	Representación en Carpintería y Mobiliario
Laboratorio de Análisis y Control de Calidad	Muestreo y Preparación de la Muestra
Automoción	Motores Térmicos y sus Sistemas Auxiliares

Los profesores consideran que solo el 30% tendría una base teórica adecuada para lo que exige el módulo. El punto más alarmante lo encuentran en que un 20% de los estudiantes posee conocimientos y destrezas muy bajas en cálculo mental y operaciones básicas, resolución de ecuaciones y utilización y conversión de unidades de medida. Este alumnado procede principalmente de Ciclos Medios, habiendo recibido su última formación matemática en la ESO. También se aprecia una carencia importante de conocimientos avanzados necesarios en los módulos Sistemas y Circuitos Eléctricos, Sistemas de Potencia, Diseño de Construcciones Metálicas, Motores térmicos y sus sistemas auxiliares; y Circuitos Electrónicos Analógicos como números complejos o cálculo integral y diferencial. Los estudiantes procedentes del Bachillerato conocen esos conceptos muy por encima, sin saber su aplicación real para manejarse con soltura. Los estudiantes que provienen de Ciclos Medios no los han dado y en la prueba de acceso no se exigen. Atendiendo a la vía de acceso y con respecto a contenidos teóricos, los profesores sitúan primero a los procedentes del Bachillerato, después los de los Ciclos Superiores, seguido de los de las pruebas de acceso y por último los de Ciclos Medios. Sin embargo, los profesores resaltan que son los estudiantes de otros Ciclos Superiores y Medios los que tienen mayor destreza a la hora de aplicar conceptos y procedimientos matemáticos en las cuestiones prácticas y en los talleres y laboratorios. El alumnado procedente del Bachillerato domina la teoría, pero tienen grandes dificultades para aplicar esos conocimientos en situaciones concretas y con problemas reales.

Las respuestas de los profesores apuntan a que hay un porcentaje alto de estudiantes que acceden a la FP pensando que no van a necesitar las matemáticas y que se desmotivan al encontrarse con problemas que requieren procedimientos largos o al ver que no tienen o no recuerdan los conocimientos necesarios para su resolución. Los estudiantes de Bachillerato son a los que más les gustan las matemáticas y tienen una mejor predisposición hacia ellas, seguidos los que acceden desde otros Ciclos Superiores, a continuación, los que acceden por prueba de acceso y, por último, los de Ciclos Medios. Sustentando la investigación de Cents-Boonstra et al. (2019), los profesores consideran que, en general, el alumnado no otorga importancia a las matemáticas y que no se motivan hasta que ven la aplicación y utilidad en su vida laboral, sobre todo a través de las prácticas realizadas. El profesorado subraya de manera unánime la importancia de la competencia matemática durante la formación y, más aún, en el desempeño laboral. Justifican su respuesta en base al soporte matemático del que precisan las profesiones técnicas y tecnológicas y al continuo cambio al que estas están sometidas, cuya repercusión se plasma también en la enseñanza superior.

Autopercepción de la competencia matemática del alumnado

El estudio de Blanco y Franco-Ferreira (2021) se ha completado con otro paralelo sobre la autopercepción de la competencia matemática de los estudiantes que accedieron a los ciclos superiores. La muestra estuvo formada por 20 estudiantes, todos hombres, del módulo de Circuitos Eléctricos y Electrónicos, de primer curso del Ciclo Superior de Sistemas Electrotécnicos, del CIFP Politécnico de Santiago de Compostela. Para ello se diseñó un cuestionario tipo Likert (escala 1 a 5) con 19 ítems enfocados a recoger información sobre la autopercepción hacia las matemáticas y la opinión del papel de las matemáticas en el desarrollo profesional propio, 29 enfocados a la autopercepción de la competencia matemática en relación con los contenidos del módulo formativo, agrupados en 4 bloques: números complejos, funciones sinusoidales, derivadas e integrales, y álgebra de Boole y códigos. La recogida de datos se hizo de forma anónima el primer día de clase del módulo.

La importancia de estos conocimientos matemáticos avanzados se puede ver en la tecnología y en la industria. Por ejemplo, los números complejos, las derivadas e integrales son necesarias en los cálculos de circuitos eléctricos de corriente alterna y campos electromagnéticos. Los números complejos intervienen en el lenguaje para describir las señales y las herramientas para analizarlas. Las funciones sinusoidales juegan un papel muy importante en áreas de ciencia y tecnología como la electricidad, la electrónica, las comunicaciones, la acústica, los sistemas de generación y distribución de energía, el control de procesos químicos y el procesamiento de voz. Las magnitudes eléctricas (voltaje, intensidad, diferencia de potencial) que caracterizan a los elementos de un circuito de corriente alterna, se expresan utilizando la notación exponencial de los números complejos, para definir sus amplitudes y sus desfases relativos, facilitando considerablemente el cálculo y dimensionamiento de las propiedades del circuito. Se emplean operaciones algebraicas con fasores o vectores que representan dichas magnitudes. Las derivadas se utilizan en campos tan diversos como la física, la electricidad, la electrónica y la química ya que permiten evaluar la evolución y cambio de muchos fenómenos físicos mediante las funciones que los describen (velocidad, aceleración, flujos y concentración) respecto a las variables de las que dependen (tiempo, espacio, etc.). Así, se puede calcular sus máximos y mínimos, sus intervalos de crecimiento o decrecimiento y buscar puntos óptimos. Las integrales se emplean para calcular áreas y volúmenes, para analizar circuitos RLC, para calcular el valor medio de una señal en un intervalo de tiempo, para el tratamiento digital de señales (mediante la Transformada de Fourier), para calcular la densidad y la masa de materiales, la densidad de carga eléctrica, etc. Los códigos y sistemas de numeración (binario, octal, decimal, hexadecimal, BCD) son esenciales en computación, electrónica digital e informática, en microprocesadores y microcontroladores. Por último, el álgebra de Boole se emplea ampliamente en el análisis y diseño electrónico, sistemas operativos, comunicaciones, procesos industriales y sistemas automatizados y de control.

Atendiendo a la distribución según las vías de acceso se tiene que el 50% de los estudiantes accedieron al Ciclo Superior directamente desde un Ciclo Medio, el 35% desde el Bachillerato y un 15% del alumnado aprobó las pruebas de acceso. En cuanto a los contenidos específicos de matemáticas para la asignatura, ninguno de los estudiantes tiene un dominio alto de las funciones sinusoidales, siendo los de la prueba de acceso los que menos saben. Los estudiantes de Bachillerato consideran que dominan más el cálculo diferencial que el integral y esa tendencia se da también en los de Grado Medio que tienen alguna noción de lo que han necesitado y usado en los módulos que cursaron anteriormente. Los del examen de acceso no conocen esos contenidos. No ocurre lo mismo en los bloques de Álgebra de Boole y de códigos de numeración, donde los estudiantes provenientes de Ciclo Medio se consideran los que más saben siguiéndoles los de la prueba de acceso y Bachillerato. En general, el 35% de los estudiantes considera que sabe poco de matemáticas, un 45% que sabe algo, un 15% que bastante y sólo un 5% sabe mucho. En cuanto a la autoeficacia y a la calidad de la enseñanza recibida, los estudiantes de Bachillerato se encuentran en primer lugar seguidos de los de la prueba de acceso y, por último, los de Grado Medio. Es de destacar que el 95% cree que necesita que le repasen los conocimientos matemáticos necesarios para la asignatura.

Contrastando la percepción de los profesores con la autopercepción de los estudiantes, los resultados generales muestran que la competencia matemática de los estudiantes que acceden a los Ciclos Superiores de Formación Profesional, en los casos analizados, se caracteriza por situar a los estudiantes de Bachillerato con mejor base teórica, incluyendo conceptos matemáticos avanzados, pero sus conocimientos son muy mecánicos y tienen bastantes dificultades para ver su aplicación real y utilizarlos para resolver problemas de las asignaturas técnicas. Los estudiantes de otros Ciclos Superiores y Ciclos Medios se manejan mejor aplicando las matemáticas en situaciones reales, aunque sus conocimientos no son ni tan sólidos ni tan avanzados. Los de la prueba de acceso no conocen gran parte de los contenidos que necesitan los módulos de los Ciclos Superiores.

El punto más alarmante se encuentra en que el 20% de los estudiantes tienen dificultades importantes en el cálculo mental, operaciones básicas, resolución de ecuaciones y utilización y conversión de unidades de medida. Este alumnado procede principalmente de Ciclos Medios que sólo han recibido formación matemática en la ESO. Se aprecia una carencia considerable en las áreas de números complejos y cálculo diferencial e integral. Los que provienen de Bachillerato algunos lo han dado por encima y nunca en profundidad para manejarse con soltura, y los que vienen de Ciclos Medios o prueba de acceso no los han visto nunca.

Estas carencias traen como consecuencia la necesidad de realizar un esfuerzo adicional para paliar esas lagunas matemáticas, tanto por parte del profesorado como de los estudiantes. La mayoría de los profesores deciden invertir una o dos semanas al inicio del módulo para explicar los conceptos matemáticos que van a necesitar y que se supone que los estudiantes deberían tener adquiridos anteriormente. Esta situación reduce el tiempo dedicado a aspectos específicos del módulo de aprendizaje además de poner a los profesores en la tesitura de explicar contenidos matemáticos sin conocimientos didáctico-disciplinares específicos. En algunos casos esta carencia trata de cubrirse proporcionando manuales de referencia y ejercicios para el tiempo de trabajo autónomo de los estudiantes.

Por su parte, los estudiantes tienen que hacer un esfuerzo adicional en conocimientos matemáticos que desconocen y asimilarlos en poco tiempo para poder centrarse en el aprendizaje de los contenidos propios del módulo y del ciclo que están estudiando. Los profesores centran su atención en proponer un aumento de la exigencia matemática en los Ciclos de FPB y en el Bachillerato en el sentido de competencia matemática, orientando la formación hacia situaciones reales, auténticas y contextualizadas, que fomenten el aprendizaje significativo y el aprender a aprender.

Perspectivas de futuro y Orientaciones

Echeverría y Martínez (2019) han analizado el desarrollo de la producción científica publicada en el territorio nacional sobre la Formación Profesional Inicial del sistema español, desde el período anterior a la crisis financiera (2005) hasta el inicio de la recuperación (2017). Entre los temas urgentes que no se están abordando y que requieren una investigación más profunda se encuentran la mejora de la formación y el desarrollo profesional del profesorado de FP, soluciones para los jóvenes desmotivados en la FP y la prevención del abandono escolar de FP.

Con respecto al primero de ellos, autores como Lorente García (2015), París Mañas et al. (2014), Ros-Garrido y Marhuenda-Fluixá (2019) y Tejada Fernández (2012) consideran fundamental que la FP cuente con un profesorado formado y continuamente actualizado. Ros-Garrido y Marhuenda-Fluixá (2019) indican que un problema importante de la FPB tiene que ver con que la formación del profesorado es académica y no profesional, lo que tiende a ampliar la distancia que existe entre la educación y el trabajo, a pesar de los esfuerzos que se han realizado para recortarla, como la formación en alternancia y la formación en el lugar de trabajo. El problema se extiende también al otro lado en la FP no formal, en donde lo que ocurre es lo contrario y la experiencia es a menudo el sustituto de una educación adecuada y de una buena cualificación.

Desde la perspectiva particular de las matemáticas, la idea es romper con el carácter academicista que impera en las clases. Según Dalby y Noyes (2015), las clases de matemáticas en la formación profesional que siguen un enfoque tradicional no motivan a los estudiantes, que necesitan ver la aplicabilidad de las matemáticas que estudian (Berger, 2012; Frejd y Muhrman, 2020). Por tanto, el profesorado debe proponer actividades que muestren la utilidad de la disciplina, evidenciando los vínculos entre lo que se aprende en las aulas y lo que se requiere en el lugar de trabajo (Berger, 2012), y tal entendimiento podría lograrse a través de actividades que promuevan la integración de contenido de distintas disciplinas (Bakker et al., 2011; Dalby, 2021; Diego-Mantecón et al., 2019; Gonçalves y Pires, 2014). Las actividades integradas, como las actividades STEAM, pueden favorecer este aspecto ya que posibilitan la reproducción de condiciones reales en situaciones concretas (Diego-Mantecón et al., 2021a, 2021b, 2022) y además han mostrado que pueden llegar a modificar las actitudes de estudiantes de secundaria hacia las matemáticas, además de motivarlos en el proceso de aprendizaje (Diego-Mantecón et al., 2019). Dichas actividades permiten además incorporar la tecnología, aspecto recomendado en la formación profesional por Cuendet et al. (2014), LaCroix (2014), y Lee (2020) con el objetivo de adquirir conocimientos matemáticos complejos. Como advierten Gonçalves y Pires (2014), la implementación de la educación integrada en la formación profesional no es directa, al igual que en otras etapas educativas y requiere formar al profesorado y dotarlo de recursos educativos. Algunos estudios de la formación profesional han tratado de establecer relaciones entre el entorno de aprendizaje y el aprendizaje de las matemáticas. Los estudiantes puede que contextualicen las matemáticas mejor cuando realizan actividades en espacios que simulan el lugar de trabajo (Dalby y Noyes, 2015; Frejd y Muhrman, 2020; Saló i Nevado y Pehkonen, 2018), y que además se implementan en grupo (Frejd y Muhrman, 2020; Kelly, 2019).

Las directrices anteriores no implican que el conocimiento enseñado a lo largo de la formación profesional deba estar orientado exclusivamente hacia la aplicación de las matemáticas, sino que se deben considerar los aspectos emocionales junto a los teóricos para atender a la desmotivación (Berger, 2012; Jorgensen, 2020; Saló i Nevado y Pehkonen, 2018). El aprendizaje de las matemáticas no debe ser solo estimulado en el centro educativo, sino también durante la estancia en el lugar de trabajo donde culminará la formación (Kelly, 2019; LaCroix, 2014). Dirigiendo la mirada a la FPB, el estudio de Sarceda-Gorgoso et al. (2017), en el que se realiza un diagnóstico de su contribución para paliar el fracaso escolar, concluye que este objetivo no se alcanza. Entre otras evidencias, se constata que en la transición de 1º a 2º se pierde a prácticamente la mitad del alumnado. En lo que respecta al módulo científico-matemático, es plausible pensar que su carácter academicista, continuista respecto a la dinámica de la ESO en la que el alumnado que acoge ha fracasado, tenga que ver en buena parte con ello. Parece claro en este caso, más aún si cabe, la necesidad (y la oportunidad) de aprovechar el carácter interdisciplinar del módulo para desarrollar propuestas STEM que permitan tanto promover las competencias del alumnado como mejorar sus afectos hacia las matemáticas y las ciencias, y el propio sistema educativo. En esta línea, experiencias como la del programa de estímulo matemático con adolescentes en riesgo de exclusión social de Blanco et al. (2021) pueden ser aprovechadas.

En particular, se debe incidir en la necesidad de implementar directrices encaminadas a favorecer la afectividad de las chicas y las niñas en las materias STEM, y en las matemáticas en particular (UNESCO, 2019). Es destacable señalar que las directrices metodológicas encaminadas a acortar la brecha de género y favorecer la afectividad son coherentes con las señaladas para el tratamiento de las matemáticas en la FP: presentarlas de modo aplicado, mediante aprendizaje colaborativo y fomentando la autonomía del alumnado (Dalby y Noyes, 2015; FitzSimons, 1997). Otro aspecto que se debe tener en cuenta es el enfoque curricular (FitzSimons, 1997), prefiriendo currículums abiertos en los que se deje lugar a una aproximación a la matemática desde un punto de vista humanista, en particular en los módulos de FPB. Debemos hacer hincapié, además, en la necesidad de crear referentes positivos mostrando las profesiones STEM lejos de estereotipos masculinos y acercarlos a identidades reales y más próximas a la socialización femenina (uso de las STEM para la mejora de la sociedad, trabajos cooperativos) mediante programas de mentorización (Redmond y Gutke, 2020). Finalmente, se recomienda, en coherencia con lo observado por Fennema (2002), la formación específica en perspectiva de género por parte del profesorado para evitar los sesgos de género en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Centrándonos en la diagnosis, en clave exploratoria, de las matemáticas en la FP española, una de las conclusiones en clave curricular que se puede derivar de los dos estudios que se han incluido en la sección 5, así como de la revisión de modelos para la FP de otros países incluida en 4.1, remitiría al análisis de la viabilidad de introducir en el itinerario formativo de los Ciclos Medios y Superiores un módulo obligatorio de Matemáticas. Este módulo, con un currículum específico para cada familia profesional, estaría impartido por profesorado de la especialidad de matemáticas. Esto permitiría al profesorado de los restantes módulos centrarse en la docencia de su asignatura, por un lado, y facilitar, por otro, que el profesorado de matemáticas pudiese implementar en el aula métodos de formación matemática centrados en el alumnado y en su aprendizaje, basados en proyectos y en actividades integradoras y contextualizadas. Si bien esta no parece una posibilidad que vaya a estar en la agenda educativa a corto plazo.

La alternativa debería partir en cualquier caso del análisis de las matemáticas presentes en los distintos títulos del Catálogo Nacional de Cualificaciones Profesionales. Además, dada la variedad de factores que pueden influir en las matemáticas necesarias en el trabajo, sería conveniente que la comunidad de educación matemática colaborase con la industria local para caracterizar las matemáticas de los grados de formación profesional (Espinas et al., 2020; FitzSimons, 2001; Hogan y Morony, 2000; LaCroix, 2014). A partir de ahí, se podría abrir una línea de investigación que persiguiera como producto el diseño de recursos para la enseñanza de las matemáticas profesionales y acciones formativas dirigidas al correspondiente profesorado. Así mismo, parecería oportuno adaptar el examen de matemáticas de la prueba de acceso a Ciclos Superiores, en función de la familia profesional. Como se ha visto en el apartado 5 para las familias profesionales analizadas, sería pertinente considerar, por ejemplo, contenidos relativos a números complejos, derivadas e integrales.

El estudio de Blanco y Franco-Ferreira (2021) al que nos hemos referido muestra la percepción subjetiva, aunque bien fundamentada en la experiencia, del profesorado de Formación Profesional sobre la competencia matemática del alumnado que accede a Ciclos Superiores. Al no existir estudios previos de referencia, no es posible comparar los resultados. Estando limitado a un centro de formación profesional concreto y a unas familias profesionales determinadas, abre la puerta a un estudio similar más exhaustivo en cuanto a área geográfica y familias profesionales, pudiendo incorporar una componente más cuantitativa sobre la competencia matemática del alumnado que accede a la FP desde las diferentes vías de acceso y contribuir a apuntalar un mapa de necesidades específicas en matemáticas según los distintos ciclos y familias profesionales.

Referencias

Asunda, P. A., Finnell, A. M. y Berry, N. R. (2015). Integration of the Common Core Standards into CTE: Challenges and Strategies of Career and Technical Teachers. *Career and Technical Education Research, 40*(1), 48-62. https://doi.org/10.5328/cter40.1.48

Bakker, A., Wijers, M., Jonker, V. y Akkerman, S. (2011). The use, nature and purposes of measurement in intermediate-level occupations. *ZDM - Mathematics Education, 43*, 737-746. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0328-3

Bakshi, H., Downing, J., Osborne, M. A. y Schneider, P. (2017). *The future of skills: Employment in 2030.* Pearson. https://futureskills.pearson.com/research/assets/pdfs/technical-report.pdf

Berger, J.-L. (2012). Uncovering vocational students' multiple goal profiles in the learning of professional mathematics: differences in learning strategies, motivational beliefs and cognitive abilities. *An International Journal of Experimental Educational Psychology, 32*, 405-425. https://doi.org/10.1080/01443410.2012.674663

Blanco, T. F. y Franco Ferreira, P. (2021). Percepción de los profesores de Formación Profesional sobre la competencia matemática en los Ciclos de Grado Superior. *Profesorado, Revista de Currículum y Formación del Profesorado, 25*(1), 153-175. https://doi.org/10.30827/profesorado.v25i1.8285

Blanco, T. F., Gorgal-Romarís, A. y Núñez-García, C. (2021). A mathematical stimulus programme for an educational intervention with students at risk of social exclusion. Sometido a publicación en *SN Social Sciences.*

Boistrup, L. B. y Hällback, M. (2021). Designing and researching vocational mathematics education. En L. B. Boistrup, y S. Selander, *Designs form Research, Teaching and Learning* (pp. 61-81). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781003096498

Bynner, J. y Parsons, S. (1998). *Use It or Loose It? The impact of time out of work on literacy and numeracy skills.* Londo: The Basic Skills Agency. Recuperado de: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED430160.pdf

Caraballo, R. M., Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2013). Cambios conceptuales en el marco teórico competencial de PISA: El caso de las matemáticas. *Profesorado. Revista de Curriculum y Formación del Profesorado, 17*(2), 225-241.

Cedefop (2020). Digital gap during COVID-19 for VET learners at risk in Europe. Synthesis report on seven countries based on preliminary information provided by Cedefop's Network of Ambassadors tackling early leaving from VET. https://www.cedefop.europa.eu/files/digital_gap_during_covid-19.pdf

Cents-Boonstra, M., Lichtwarck-Aschoff, A., Denessen, E., Haerens, L. y Aelterman, N. (2019). Identifying motivational profiles among VET students: differences in self-efficacy, test anxiety and perceived motivating teaching. *Journal of Vocational Education & Training, 71*(4), 600-622. https://doi.org/10.1080/13636820.2018.1549092

Çevik, M. (2018). Impacts of the project based (PBL) Science, Technology, Engineering and Mathematics (STEM) education on Academic Achievement and Career Interests of Vocational High School Students. *Pegem Eğitim ve Öğretim Dergisi, 8*(2), 281-306. https://doi.org/10.14527/pegegog.2018.012

Cuendet, S., Dehler-Zufferey, J., Arn, C., Bumbacher, E. y Dillenbourg, P. (2014). A study of carpenter apprentices' spatial skill. *Empirical Research in Vocational Education and Training , 6*, 1-16. https://doi.org/10.1186/s40461-014-0003-3

da Silva Pimentel, D., Frossard Souza, A. C. y Chagas e Sá, L. (2021). Um perfil dos professores que compartilham experiências de educação matemática com estudantes da educação profissional e tecnológica. *Bocehm: Boletim Ceatense de Educação e História da Matemática, 8*(24), 19-31. https://doi.org/10.30938/bocehm.v8i24.5441

Dalby, D. (2021). Changing images of mathematics in the transition from school to vocational education. *Adults Learning Mathematics: An International Journal, 15*(1), 45-57. https://alm-online.net/wp-content/uploads/2021/11/almij151.pdf#page=45

Dalby, D. y Noyes, A. (2015). Connecting Mathematics Teaching with Voational Learning. *Adults Learning Mathematics: An International Journal, 10*(1), 40-49. http://eprints.nottingham.ac.uk/id/eprint/32082

Dalby, D. y Noyes, A. (2018). Mathematics education policy enactment in England's Further Education colleges. *Journal of Vocational Education y Training, 70*(4), 564-580. https://doi.org/10.1080/13636820.2018.1462245

Dalby, D., y Noyes, A. (2022). Mathematics curriculum waves within vocational education. *Oxford Review of Education, 48*(2), 166-183. https://doi.org/10.1080/03054985.2021.1940913

Diego-Mantecón, J. M., Arcera, Ó., Blanco, T. F. y Lavicza, Z. (2019). An Engineering Technology Problem-Solving Approach for Modifying Student Mathematics-Related Beliefs: Building a Robot to Solve a Rubik's Cube. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 26*(2), 55-64. https://doi.org/10.1564/tme_v26.2.02

Diego-Mantecón, J. M., Ortiz-Laso, Z. y Blanco, T. F. (2022). Implementing STEM Projects Through the EDP to Learn Mathematics: The Importance of Teacher's Specialization. En P. Richard, M. Vélez, y S. Van Vaerenbergh, *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence. Mathematics Education in the Digital Era* (Vol. 17). Springer, Cham. doi:https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_17

Diego-Mantecón, J. M., Ortiz-Laso, Z. y Blanco, T. F. (2022). Implementing STEM projects through the EDP to learn mathematics: the importance of teachers' specialization. En P. Richard, M. Vélez y S. Van Vaerenbergh (Eds.), *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence* (pp. 399-415). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_17

Diego-Mantecón, J. M., Haro, E., Blanco, T. F. y Romo-Vázquez, A. (2021a). The chimera of the competency-based approach to teaching mathematics: a study of carpentry purchases for home projects. *Educational Studies in Mathematics*, 107(2), 339-357. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10032-5

Diego-Mantecón, J. M., Prodromou, T., Lavicza, Z., Blanco, T. F. y Ortiz-Laso, Z. (2021b). An attempt to evaluate STEAM project-based instruction from a school mathematics perspective. *ZDM - Mathematics Education, 53*(5), 1137-1148. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01303-9

Doherty, S. M. y Harborough Macdonald, I. (2020). Can growth in the availability of STEM technical education improve equality in participation? Evidence from Massachusetts. *Journal of Vocational Education y Training, 72*(1), 47-70. https://doi.org/10.1080/13636820.2019.1578818

Durando, M. (2013). Towards 2020 Priorities for STEM education and careers in Europe. *Conference of the Ingenius project.* European schoolnet. Recuperado de de http://www.ingeniousscience.eu/c/document_library/get_file?uuid=64d8c2fe-a4ea-449c-b6d7-15d21dd44f0fygroupId=10136

Echevarría Samanes, B. y Martínez Clares, P. (2018). Revolución 4.0, competencias, educación y orientación. *Revista Digital de Investigación en Docencia Universitaria, 12*(2), 4-34. https://doi.org/10.19083/ridu.2018.831

Echeverría, B. y Martínez, P. (2019a). *Diagnóstico de la investigación sobre la Formación Profesional Inicial en España (2005-2017).* Madrid: Fundación Bankia por la Formación Dual. Recuperado de https://www.caixabankdualiza.es/recursos/doc/portal/2019/07/08/diagnostico-investigacion-fpi.pdf

Echeverría, B. y Martínez, P. (29 de octubre de 2019b). Formación profesional, investigación y orientación. *Educaweb.* https://www.educaweb.com/noticia/2019/10/29/formacionprofesional-investigacion-orientacion-18961/

Espinas, A. L., Esponilla II, F. D., Tolentino, L. K. y Valenzuela, I. C. (2020). Technical-

Vocational Livelihood Education: Emerging Trends in Contextualised Mathematics Teaching. *Journal of Technical Education and Training, 12*(4), 1-15. https://publisher.uthm.edu.my/ojs/index.php/JTET/article/view/7041

Ewing, B. (2017). An exploration of assessment approaches in a vocational and education training courses in Australia. *Empirical Research in Vocational Education and Training, 9*(1), 1-18. https://doi.org/10.1186/s40461-017-0058-z

Fatimah, A. T. y Prabawanto, S. (2020). Mathematical understanding and reasoning of vocational school students in agriculture-based mathematical tasks. *Journal for the Education of Gifted Young Scientists, 8*(2), 771-782. http://dx.doi.org/10.17478/jegys.702884

Fennema, E. (2002). Mathematics, Gender and Research. En G. Hanna, *Towards Gender Equity in Mathematics* (pp. 9-26). Springer.

Fernández Solo de Zaldívar, I. (2017). Mejora de competencias: introducción de la gestión de calidad en nuevas metodologías educativas. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado, 21*(2), 279-308.

FitzSimons, G. E. (1997). Gender Issues in Adult and Vocational Mathematics Education. *Mathematics Education Research Journal 9(3)*, 292-311.

FitzSimons, G. E. (2001). Integrating mathematics, statistics and technology in vocational and workplace education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32*(3), 375-383. https://doi.org/10.1080/00207390110040193

FitzSimons, G. E. (2014). Commentary on vocational mathematics education: where mathematics education confronts the realities of people's work. *Educational Studies in Mathematics, 86*, 291-305. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9556-0

FitzSimons, G. E. (2015). Learning mathematics in and out of school: A workplace education perspective. En U. Gellert, J. Giménez, C. Hahn, y S. Kafoussi (Eds.), *Educational Paths to Mathematics* (pp. 99-115). Springer.

FitzSimons, G. E. y Boistrup, L. B. (2017). In the workplace mathematics does not announce itself: towards overcoming the hiatus between mathematics education and work. *Educationa Studies in Mathematics, 95*(3), 329-349. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9752-9

Frejd, P. y Muhrman, K. (2020). Is the mathematics classroom a suitable learning space for making workplace mathematics visible? - An analysis of a subject integrated team-teaching approach applied in different learning spaces. *Journal of Vocational Education & Training, 74*(2), 333-351. https://doi.org/10.1080/13636820.2020.1760337

Fundación Bankia. (2020). *Observatorio de la Formación Profesional en España. Informe 2020*. Madrid: Fundación Bankia por la Formación Dual.

Fundación Bankia. (2020). *Observatorio de la Formación Profesional en España. Informe 2020*. Fundación Bankia por la Formación Dual.

Gobierno de España (2011). Real Decreto 1147/2011, de 29 de julio, por el que se establece la ordenación general de la Formación Profesional del Sistema Educativo. Boletín Oficial del Estado, Madrid, 30 de julio de 2011, 182, pp. 86766-86800. https://www.boe.es/boe/dias/2011/07/30/pdfs/BOE-A-2011-13118.pdf

Gobierno de España (2015). Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. Boletín Oficial del Estado, Madrid, 29 de enero de 2015, núm. 25, pp. 6986-7003. https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/29/pdfs/BOE-A-2015-738.pdf

Gonçalves, H. J. y Pires, C. M. (2014). Educação matemática na educação profissioinal de nível médio: análise sobre possibilidades de abordagens interdisciplinares. *Bolema, 28*(48), 230-254. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a12

Gonçalves, H. J., Dias, A. L. y Peralta, D. A. (2018). Estudo Comparativo sobre o Ensino de Matemática en Currículos de Educação Profissional Técnica: Brasil e Estados Unidos. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 32*(60), 31-56. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a02

Hiim, H. (2020). The quality and standing of school-based Norwegian VET. *Journal of Vocational Education and Training, 72*(2), 228-249. https://doi.org/10.1080/13636820.2020.1734062

Hogan, J. y Morony, W. (2000). Classroom Teachers Doing Research in the Workplace. En A. Bessot y J. Ridgway (Eds.), *Education for Mathematics in the Workplace* (pp. 101-113). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47226-0_9

Infoempleo y Adecco (2019). Informe Infoempleo Adecco: Oferta y Demanda de Empleo en España, 2019.

Jang, H. (2016). Identifying 21st Century STEM Competencies Using Workplace Data. *Journal of Science Education and Technology, 25*, 284-301. https://doi.org/10.1007/s10956-015-9593-1

Jorgensen, R. (2020). Creating opprotunnities for vulnerable indigenous learners to succeed in vocational education. *ZDM - Mathematics Education, 52*(3), 571-580. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01117-w

Koreshnikova, Y., Zakharov, A. y Dudyrev, F. (2018). Differences in general education in vocational and high schools: Characteristics of teachers and teaching practices in Mathematics. *Voprosy obrazovaniya/Educational Studies Moscow*, (2), 228-253.

Kelly, B. (2019). Motivating adults to learn mathematics in the workplace: a trade union approach. *International Journal of Lifelong Education, 38*(2), 132-147. https://doi.org/10.1080/02601370.2018.1555190

Kilbrink, N. y Bjurulf, V. (2013). Transfer of knowledge in technical vocational education: a narrative study in Swedish upper secondary school. *Internationa Journal of Technology and Design Education, 23*, 519-535. https://doi.org/10.1007/s10798-012-9201-0

LaCroix, L. (2014). Learning to see pipes mathematically: preapprentices' mathematical activity in pipe trades training. *Educational Studies in Mathematics, 86*, 157-176. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9534-6

Lindberg, L. y Grevholm, B. (2013). Mathematics in VET programmes: The tensions associated with reforms in Sweeden. *International Journal of Training Research, 11*(2), 150-165. https://doi.org/10.5172/ijtr.2013.11.2.150

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE). Boletín Oficial del Estado. Madrid, 10 de diciembre de 2013, núm. 295, pp. 97858-97921. https://boe.es/boe/dias/2013/12/10/pdfs/BOE-A-2013-12886.pdf

Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOMLOE). Boletín Oficial del Estado. Madrid, 30 de diciembre de 2020, núm. 340, pp. 122868-122953. https://www.boe.es/eli/es/lo/2020/12/29/3

Lorente García, R. (2015). Perspectivas del profesorado sobre la mejora y la potenciación de la formación profesional. *Revista Complutense de Educación, 26*(1), 47-66. https://doi.org/10.5209/rev_RCED.2015.v26.n1.42474

Lorente García, R. (2016). Perspectivas del profesorado ante los retos y desafíos de la Formación Profesional. *Quriculumm, 29*, 63-86. Recuperado de de www.ull.es/revistas/index.php/quriculum/article/view/30

Luimes, M. y Karseth, B. (2019). Pre-vocational education in the curriculum: the case of Norwegian lower secondary education. *Journal of Curriculum Studies, 51*(2), 245-261. https://doi.org/10.1080/00220272.2018.1528301

Niss, M. (1999). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Proyect.

Ozdemir, H. y Onder-Ozdemir, N. (2017). Vocational High School Students' Perceptions of Success in Mathematics. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *12*(3), 493-502.

París Mañas, G., Tejada Fernández, J., y Coiduras Rodríguez, J. L. (2014). La profesionalización de los profesionales de la Formación para el Empleo en constante [in] definición en Europa. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, *18*(2), 267-283.

Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo de 2022, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Enseñanza Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial del Estado, 76, de 30 de marzo de 2022. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/29/217/con

Redmer, A. y Dannath, J. (2020). Changes in employment since the 1990s: numeracy practices at work in IALS and PIAAC. *ZDM - Mathematics Education, 52*(3), 447-459. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01112-1

Redmond, P. y Gutke, H. (2020). STEMing the Flow: Supporting Females in STEM. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18*, 221-237.

Ros-Garrido, A., Marhuenda-Fluixá, F. (2019). The Education of VET Teachers and Trainers. En F. Marhuenda-Fluixá (Ed.), *The School-Based Vocational Education and Training System in Spain. Technical and Vocational Education and Training: Issues, Concerns and Prospects* (pp. 87-103). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-13-8475-2_5

Rosvall, P.-A., Hjelmér, C. y Lappalainen, S. (2017). Staying in the comfort zones - Low expectations in vocational education and training mathematics teaching in Sweeden and Finland. *European Educational Research Journal, 16*(4), 425-439. https://doi.org/10.1177/1474904116669154

Saló i Nevado, L. y Pehkonen, L. (2018). Cabinetsmakers' Workplace Mathematics and Problem Solving. *Vocations and Learning, 11*, 475-496. https://doi.org/10.1007/s12186-018-9200-8

Sancha, I. y Gutiérrez, S. (2018). *La formación profesional en España - 2016*. Madrid: Fundae.

Sarceda-Gorgoso, M. C. y Barreira-Cerqueiras, E. M. (2021). La Formación Profesional Básica y su contribución al desarrollo de competencias para el reenganche educativo y la inserción laboral: percepción del alumnado. *Educar, 57*(2), 319-332. https://doi.org/10.5565/rev/educar.1239

Sarceda-Gorgoso, M. C., Santos, M. C. y Sanjuán Roca, M. M. (2017). La Formación Profesional Básica: ¿alternativa al fracaso escolar?. *Revista de Educación*, 378, 78-112. https://doi.org/10.4438/1988-592X-RE-2017-378-362

Schuetze, H. G. (2014). From adults to non-traditional students to lifelong learners in Higher Education: Changing contexts and perspectives. Journal of Adult and Continuing Education, 20(2), 37–55. https://doi.org/10.7227/JACE.20.2.4

Smyth, E. y Steinmetz, S. (2015). Vocational Training and Gender Segregation Across Europe. En C. Imdorf, K. Hegna, y L. Reisel, *Gender Segregation in Vocational Education* (pp. 53-81). Emerald Publishing Limited.

Straesser, R. (2007). Didactics of mathematics: more than mathematics and school! *ZDM–The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 165-171.

Straesser, R. (2015). Numeracy at work: a discussion of terms and results from empirical studies. *ZDM - Mathematics Education, 47*(4), 665-674. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0689-0

Suárez Salas, F. y Celis Guzmán, S. (2021). Caracterización de la enseñanza de matemática en educación superior técnico profesional a través del estudio de las preguntas hechas por docentes en la sala de clases. *Estudios Pedagógicos, 47*(2), 7-29. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052021000200007

Sundtjønn, T. (2021). *Opportunities and Challenges when students Work with Vocationally Connected Mathematics Tasks.* Tesis de Doctorado, University of Adger. https://uia.brage.unit.no/uia-xmlui/handle/11250/2727570

Tejada Fernández, J. (2012). La alternancia de contextos para la adquisición de competencias profesionales en escenarios complementarios de educación superior: marco y estrategia. *Educación XX1: revista de la Facultad de Educación, 15*(2), 17-40.

UNESCO. (2019). *Descifrar el código: La educación de las niñas y las mujeres en ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM).* París: UNESCO.

WEF (2015). New vision for Education. Unlocking the potential of technology. http://widgets.weforum.org/nve-2015/

Weißeno, S., Seeber, S., Kosanke, J. y Stange, C. (2016). Development of mathematical competency in different German pre-vocational training programmes of the transition system. *Empirical Research in Vocational Education and Training, 8*(1), 1-18. https://doi.org/10.1186/s40461-016-0040-1

Las Matemáticas en la educación de personas adultas

Teaching mathematics in the Adults Mathematics Education field

Díez-Palomar, J.
Universidad de Barcelona

Resumen

La enseñanza de las matemáticas en la educación de personas adultas se ha ido transformando desde una aproximación basada en los conceptos básicos de la aritmética hasta estar basada en un concepto de la alfabetización numérica como práctica social. Las matemáticas forman parte de nuestras vidas. Las personas adultas también somos muy diversas. El currículo de matemáticas en las enseñanzas iniciales y en la secundaria, así como en la educación de personas adultas, parte de todas estas especificidades para desarrollar la competencia matemática y tecnológica. Existen dos modelos de educación de personas adultas: el escolar y el social. La investigación en el ámbito sugiere que el segundo produce mejores resultados de aprendizaje. A nivel internacional, la tendencia es hacia incluir las voces de las personas adultas, contextualizar las situaciones de aprendizaje, y presentar la matemática integrada en la vida cotidiana de las personas.

Palabras clave: Alfabetización numérica, Aprendizaje dialógico, Cognición situada, pensamiento crítico, Práctica social, Diálogo igualitario.

Abstract

Teaching of mathematics in adult education has changed from basic arithmetic a concept of numeracy as a social practice. Mathematics is part of our lives. Adults are also very diverse. The curriculum in mathematics for beginners and middle school, as in adult education, draws on these specificities in order to develop the mathematical and technological competence. There are two models of adult education: the "schooling" model and the social model. Research in the field suggests that the latter produces better learning outcomes. At the international level, the trend is towards including the voices of adults, contextualizing the learning situations, and presenting mathematics as integrated into people's daily lives.

Keywords: Numeracy, Dialogic learning, Situated cognition, Critical thinking, Social practice, Egalitarian dialogue.

¿A QUÉ NOS REFERIMOS CUANDO HABLAMOS DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN DE PERSONAS ADULTAS?

Actualmente existe un esfuerzo a nivel internacional por mejorar la enseñanza de las matemáticas que ofrecemos a las personas adultas. La educación de personas adultas (EpA) es un ámbito en sí mismo, diferenciado de otros "niveles" del sistema educativo, que tiene que ver con la propia especificidad de las personas adultas, como tales. La EpA tiene una estructura similar al sistema educativo estándar, que comienza con los niños y las niñas en educación infantil, y llega hasta la formación superior (estudios universitarios de grado y de postgrado). Cuando hablamos de EpA, nos estamos refiriendo a las enseñanzas que corresponden a la educación primaria y la educación secundaria obligatoria (que conducen a la obtención del Graduado de Educación Secundaria, o GES). A partir de aquí se abren las opciones para obtener el grado de bachillerato (de personas adultas), o bien para realizar las pruebas de acceso a la universidad (o ambas opciones), o los ciclos de formación.

La investigación previa aporta evidencias que justifican que las metodologías de trabajo con las personas adultas sean diferentes de las que se emplean en el caso de los niños/as o de los/as jóvenes. Mientras que la investigación educativa y en ciencias del aprendizaje sugiere que existe una "evolución" en el desarrollo de los niños/as, desde que son bebés hasta que alcanzan la madurez, cuando hablamos de las personas adultas estamos trabajando ya con personas con plena capacidad de acción, de pensamiento, de habla, de argumentación, etc.

Como afirma Freire, las personas adultas somos, ante todo, seres de transformación. Toda experiencia nos sirve para cambiar nuestras estructuras cognitivas. La "plasticidad", que Kandel define como la capacidad de las neuronas para generar nuevas sinapsis (nuevas conexiones) y nuevas redes neuronales (Kandel et al., 2000), es siempre vigente a lo largo de toda la vida de las personas. Siempre estamos creando nuestras sinapsis; por tanto, siempre estamos aprendiendo. Todas nuestras experiencias, sean las que sean, producen cambios físicos en nuestro cerebro (nuevas sinapsis), que son permanentes en el tiempo, y forman parte de nuestra identidad (de nuestro yo en términos de Mead -2015-).

Los procesos psicológicos superiores (el habla, el conteo, el cálculo, el razonamiento, la planificación, la anticipación, entre otros) ya se han desarrollado, como resultado de múltiples interacciones que se han ido encadenando a lo largo de la vida, en diferentes contextos. Todas estas interacciones previas nos dotan de un cúmulo de conocimientos que hemos ido aprendiendo a lo largo de nuestras vidas, cada vez que resolvemos un problema, cada vez que vemos a otra persona resolver un problema, cada vez que hablamos, preguntamos, discutimos, compartimos, nuestros pensamientos, nuestros saberes, nuestros conocimientos, nuestras conjeturas, nuestras hipótesis, con otras personas (presentes o a través de algún medio de comunicación, como los libros, las páginas web, los medios audiovisuales, etc.).

La alfabetización numérica

En el ámbito del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas a las personas adultas (*adults learning mathematics*) el concepto clave es el de *numeracy*. Durante las últimas cuatro décadas la investigación sobre alfabetización numérica ha avanzado mucho.[1] Hemos pasado de entenderla como un conjunto de habilidades aritméticas, a una práctica social integrada en nuestra vida cotidiana (Hoogland, Auer, Díez-Palomar, O'Meara, y van Groenestijn, 2019).

Figura 1. Desarrollo conceptual del concepto de numeracy elaborado en el marco del proyecto CENF (Common European Numeracy Framework) (ERASMUS +, 2018-21)

Actualmente el consenso en torno a la encuesta internacional PIAAC define *numeracy* como:

> La alfabetización numérica consiste en acceder, utilizar y razonar críticamente con contenido matemático, información e ideas representadas de múltiples maneras para participar y gestionar las demandas matemáticas de una variedad de situaciones en la vida adulta. (Tout et al., 2021, p. 93)

La alfabetización numérica de las personas adultas presenta cuatro dimensiones clave:

- Procesos cognitivos
- Contenidos

1. Para más información sobre la evolución del concepto de *numeracy* se puede consultar van Groenestijn (2002), Hoogland, Díez-Palomar (2021), o Tout (2020). Se han realizado varias encuestas internacionales que han establecido el marco conceptual de este término, entre las que destacan YALS (1986), NALS (1992), IALS (1992), ALL (1999), PIAAC (2011-2012, 2014-2015, 2017, 2019-2023).

– Representaciones
– Contextos

El concepto de *comportamiento numérico* (*numerate behaviour*) creado por el *ALL Numeracy Group* en 1999 fue redefinido recientemente por el *Numeracy Expert Group* encargado de desarrollar el marco actual para la alfabetización numérica de las personas adultas (Tout et al., 2021), en base a esas cuatro dimensiones.

Tabla 1. Prácticas y comportamientos de alfabetización numérica. Factores clave y sus componentes. PIAAC. (OECD, 2021, p. 94-95)

1. Acceder, usar y razonar críticamente
   · Acceder y evaluar situaciones matemáticamente (evaluar, identificar, acceder y representar)
   · Actuar sobre y usar las matemáticas (ordenar, contar, estimar, computar, medir, graficar, y dibujar)
   · Evaluar, reflexionar de manera crítica, emitir juicios (evaluar, reflexionar, justificar, y explicar)
2. Con contenido matemático
   · Cantidades y números
   · Espacio y forma
   · Relaciones y cambio
   · Datos y azar
3. Representar en múltiples formas
   · Texto o símbolos
   · Imágenes de objetos físicos
   · Información estructurada
   · Aplicaciones dinámicas
4. Para involucrar en y gestionar las demandas matemáticas de diversas situaciones de la vida cotidiana en la vida adulta:
   · Personales
   · Laborales
   · Societales / comunitarias

La capacidad de alfabetización numérica de una persona adulta se basa en la activación de algunos factores y procesos habilitadores:

· Conocimiento contextual/del mundo y familiaridad
· Habilidades de alfabetización (*literacy*)
· Disposiciones, creencias y actitudes
· Prácticas relacionadas con la alfabetización numérica y experiencia

Cualquier currículum de matemáticas en EpA tendría que servir para lograr promover ese comportamiento numérico de las personas adultas, de manera crítica.

Retos de la enseñanza de las matemáticas en la educación de personas adultas

Cuando un docente (o futuro docente) tiene que planificar sus clases para enseñar matemáticas en un centro de educación de personas adultas, se enfrenta a varios retos, de naturalezas diferentes. Como hemos visto antes, las personas adultas cuando llegan al centro educativo no lo hacen como *tabula rasa*; al contrario, todas las personas tenemos múltiples experiencias en un mundo que está repleto de números, cantidades, formas, en el que nos tenemos que ubicar en el tiempo y en el espacio, tomar decisiones, realizar previsiones, y otros muchos procesos que fácilmente podemos relacionar con las matemáticas y el pensamiento matemático. Además, en el caso del Estado Español, las personas que se dedican (o se van a dedicar) a la docencia en la educación de personas adultas se enfrentan a una gran disparidad de contextos, públicos, etc., puesto que la enseñanza de adultos en nuestro país se encuentra muy fragmentada y existen grandes diferencias entre regiones, e incluso entre centros ubicados en un mismo municipio, en todos los sentidos.

Actualmente, algunos de los principales retos que nos podemos encontrar son:

- El contenido
- La evaluación
- El uso de las tecnologías

¿Qué contenido tenemos que enseñar?

Como hemos visto más arriba, existe un consenso general en torno a lo que se considera “alfabetización numérica.” Desde finales de los años noventa en todos los marcos de alfabetización numérica de los programas internacionales que se han sucedido hasta la fecha siempre aparecen los siguientes contenidos (Tout, 2000):

- Cantidades y numeración (p.e., sentido numérico, conteo, cantidades, sistemas de numeración como el romano, el árabe-hindú, propiedades de los números, agrupación, concepto de base numérica, relaciones numéricas, operaciones aritméticas, la divisibilidad, reparto, tipos de números, números en contexto, redondear cantidades, proporcionalidad, etc.)
- Dimensión, forma y medida (p.e., identificación de polígonos, de cuerpos geométricos, la medida como geometría, medición, unidades de superficie, de volumen, medidas en contexto, conversión de unidades, órdenes de magnitud, relaciones, representaciones espaciales, escalas, visualización, movimiento sobre el plano y en el espacio, etc.)

- Patrones y relaciones (p.e., series, sucesiones, regularidades, generalizaciones, etc.)
- Datos y azar (p.e., uso de tablas, gráficos, estadística descriptiva, sucesos aleatorios, predicciones, distribuciones de probabilidad, pensamiento estocástico, inferencia, etc.)
- Cambio (p.e., variables, igualdades y desigualdades, relaciones y funciones, etc.)

En cada programa estos ámbitos generales han sido revisados (algunos se han presentado conjuntamente) y quizás la nomenclatura se ha actualizado, pero los ámbitos matemáticos son, esencialmente, los mismos.

A la hora de pensar en cómo planificar las unidades didácticas para cubrir todos esos contenidos, la investigación en el ámbito de la alfabetización matemática de las personas adultas sugiere poner el énfasis en la utilidad y la conexión de los contenidos matemáticos con la vida cotidiana de las personas. En ese sentido, se acostumbran a destacar la enseñanza de las matemáticas para cuatro usos principales (a partir de los que crear las situaciones de aula, por ejemplo):

- Para propósitos prácticos (p.e., para diseñar, para medir, para construir, etc.) (Boistrup y Keogh, 2017; Galligan, 2013; Hoyles et al., 2001; Keogh et al., 2019; Saló, 2020).
- Para interpretar la sociedad (p.e., interpretar y reflexionar sobre información numérica o gráfica en documentos públicos, en textos, en anuncios, en la prensa, etc.) (Geiger et al., 2018).
- Para motivaciones de organización personal (p.e., gestión de la economía doméstica, organización de un viaje, horarios, etc.) (de Agüero, 2008; Harris, 2000).
- Para aprender (p.e., para realizar un programa de estudios concreto, para hacer cursillos, etc.) (Jarvis, 2004; Safford-Ramus et al., 2016).

A continuación, se adjuntan dos ejemplos para trabajar todos o alguno de los contenidos mencionados más arriba, vinculados a la utilidad que puedan tener.

Ejemplo (con datos procedentes de un diario)

Muchas personas usamos la prensa para informarnos de las noticias del mundo en el que vivimos. A menudo, las informaciones que se publican contienen información numérica y/o matemática, de manera que es preciso usar nuestros conocimientos de matemáticas para comprender el mensaje que se nos quiere transmitir. Existen varios trabajos sobre la lectura de la prensa con un enfoque matemático[2]. La mayor parte

2. Paulos, J. A. (1996). *Un matemático lee el periódico*. Tusquets.

ellos se centran en el pensamiento crítico para interpretar la información que contienen los artículos publicados por la prensa (Evans et al., 2014; Evans et al., 2009).

En un conocido diario podemos ver la siguiente ilustración:

Figura 2. Subida de precios de algunos productos de consumo habitual. Fuente: El País

Con esta ilustración se evidencia la subida de precios de productos cotidianos que está causando la inflación en el segundo trimestre de 2022. La lectura crítica de estos datos implica: reconocimiento de las cantidades, sentido numérico, comparación de dos cantidades (antigua y actual), para apreciar la subida del precio, cálculo de proporciones para tener una idea aproximada de lo que ha supuesto en cada caso la subida de los precios.

Cuando se examinan con más detalle, se aprecia que el porcentaje de incremento del precio del aceite es incorrecto.

Tabla 2. Comparación de los precios antiguos y actuales

	Precio anterior	Precio actual	Diferencia	Porcentaje de incremento
Madalenas	1	2,6	+1,6	$\frac{1{,}6}{1} \times 100 = 160\%$
Aceite	1,59	3,85	+2,26	$\frac{2{,}26}{1{,}59} \times 100 = 142\%$
Guisantes	1,35	2,05	+0,7	$\frac{0{,}7}{1{,}35} \times 100 = 52\%$

Ejemplo

Las personas responsables de organizar las salidas de una grupa ciclista están valorando dos opciones para ir desde Barcelona hasta Montserrat. En la opción 1 el itinerario lleva por Sant Feliu de Llobregat, Sant Andreu de la Barca, Martorell, y Olesa de Montserrat (Fig. 3). El segundo itinerario va por Sant Cugat, Rubí, Viladecavalls y Vacarisses ¿Cuál es el mejor?

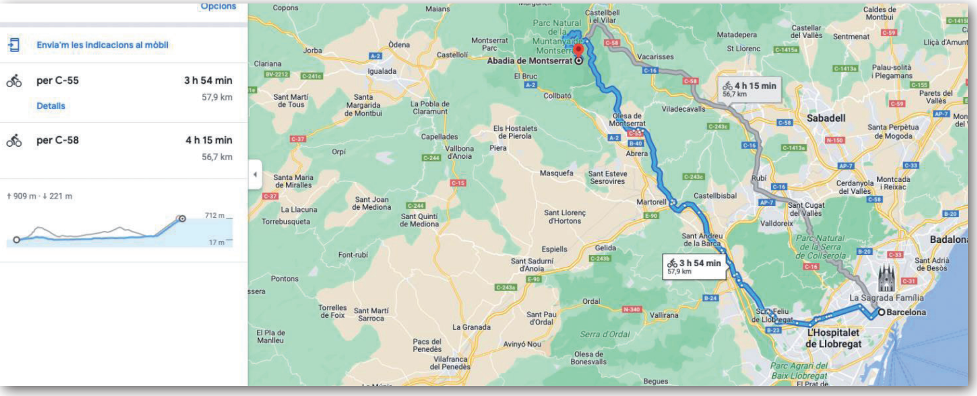


Figura 3. Detalle de la consulta de dos rutas ciclistas en GoogleMaps

Uno de los criterios clave para decidirse es el número total de kilómetros. Otro, el tiempo estimado, que por supuesto va en función del número de kilómetros. En la imagen de la Figura 3 esta información se puede apreciar a simple vista, leyendo la información que sale en el resultado de la búsqueda en Google Maps. Aparecen informaciones numéricas, de distancias en longitud (km) y en tiempo (sobre cada uno de los dos itinerarios). En ambos casos, es preciso considerar unidades de medida (de longitud, tiempo).

Otro criterio, no menos importante, es el perfil de la etapa. Aquí aparece el concepto de desnivel, el cálculo de la pendiente de la carretera, el del desnivel acumulado, etc. En este caso, la información aparece en una representación visual (perfil de la etapa). Cuando seleccionamos cualquiera de los dos itinerarios, aparece información más precisa.

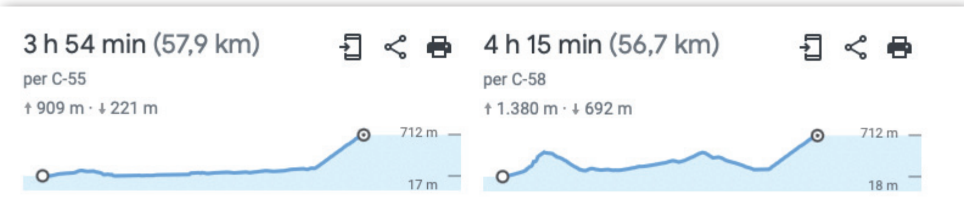


Figura 4. Detalle de la consulta de dos rutas ciclistas en GoogleMaps

¿En cuál de ellos hay más nivel acumulado? ¿Cómo lo podemos calcular?

Por otro lado, el perfil no significa que a lo largo del trayecto no haya rampas, cuyo "efecto" queda diluido en el cómputo global de lo que se asciende, y de lo que se desciende. Hasta Monistrol las rutas son diferentes. A partir de Monistrol el camino ya es el mismo. Dos miembros históricos de la grupa, que conocen ambas rutas, saben que la peor rampa del itinerario 1 (antes de llegar a Monistrol) es un punto donde la pendiente es del 26% durante 115 metros. En cambio, en la segunda ruta la peor rampa es del 27%, durante 92 metros.

Aquí tenemos otra oportunidad para usar las matemáticas, y hablar con cálculo de la pendiente como relación entre el desnivel y la distancia horizontal que hemos recorrido.

$$\frac{Distancia\ en\ vertical}{Distancia\ en\ horizontal} \times 100 = Pendiente\ (\%)$$

¿En cuál de las dos rampas se han ascendido más metros? ¿Qué es mejor, una rampa del 26% durante 115 metros, o una del 27% pero más corta?

La decisión también puede depender del cómputo global. Con un software especial, los defensores de cada itinerario presentan los gráficos de la Fig. 5.

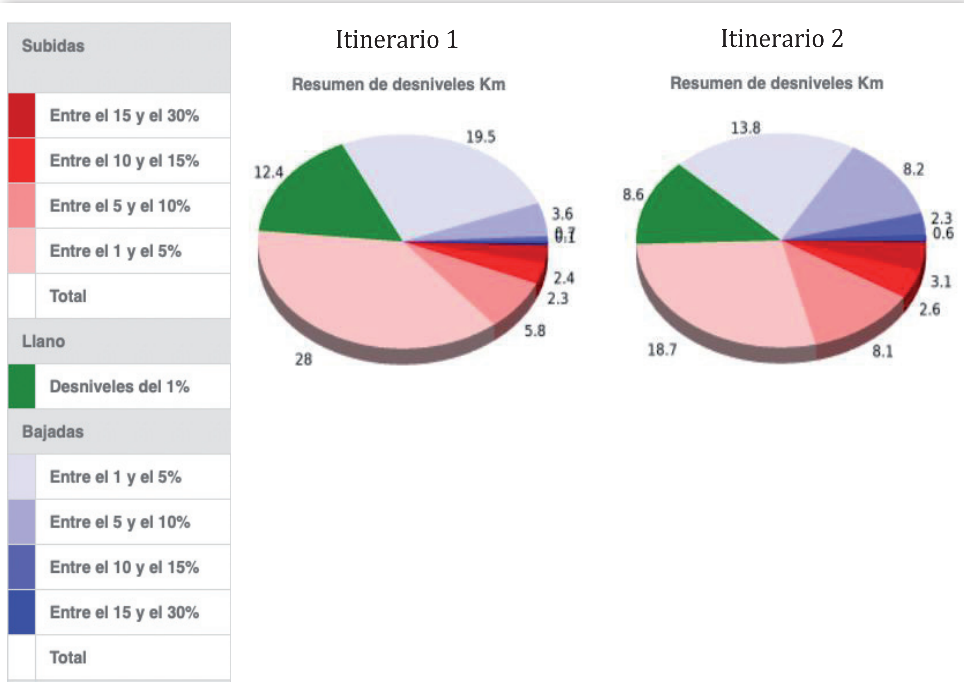


Figura 5. Representación de los desniveles de ambas rutas. Fuente: IBP index

La decisión final es difícil. ¿En cuál de los dos itinerarios hay más subida? ¿Es suficientemente grande la diferencia para aconsejar uno por encima del otro? ¿Son las diferencias en la dureza de las subidas un criterio "definitivo" para escoger uno de los itinerarios, y no el otro? Como se puede ver, ejemplos como éste ilustran el uso que damos en nuestras vidas de las matemáticas, en la toma de decisiones en cualquier ámbito de nuestras vidas.

El primer ciclo de PIAAC (2011-18) sugirió basar la implementación de los contenidos curriculares de matemáticas para personas adultas en lo que denominó *facetas*. En concreto, el grupo de expertos de alfabetización numérica definió cuatro facetas que incluían:

- Evaluar
- Identificar
- Acceder
- Representar

En el marco internacional actual de alfabetización matemática de las personas adultas (Tout et al., 2021) estas cuatro facetas han pasado a ser componentes de una dimensión más general que son los *procesos cognitivos*. De acuerdo con la investigación que se lleva realizando durante la última década en el ámbito de la enseñanza de las matemáticas a personas adultas, resulta mucho más adecuado que el enfoque del currículum de matemáticas sea más orientado al uso de la matemática de forma crítica. En ese sentido, en el marco del PIAAC 2 podemos leer que ahora la orientación es hablar de:

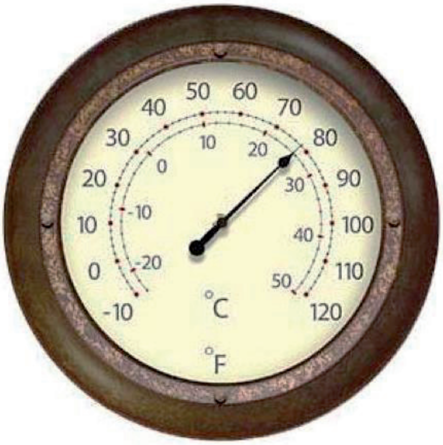
- Acceder y evaluar situaciones matemáticamente (evaluar, identificar, acceder, y representar)
- Actuar sobre y usar las matemáticas (ordenar, contar, estimar, computar, medir, graficar y dibujar)
- Evaluar, reflexionar de manera crítica, juzgar (evaluar, reflexionar, justificar, y explicar).

Por tanto, de acuerdo con las orientaciones internacionales, estos tres elementos tendrían que ser los ejes para diseñar y planificar unidades didácticas orientadas a cubrir los contenidos mencionados más arriba.

Ejemplo

(Ítem liberado de PIAAC, 2013; Evaluación de competencias de adultos (PIAAC). Estímulos de comprensión lectora, cálculo, componentes de lectura y resolución de problemas en contextos informatizados. Instituto Nacional de Evaluación Educativa. Ministerio de Educación, Cultura y Deportes. p. 17)

Termómetro
Observe el termómetro



Pregunta 1

Responda a la pregunta: Si la temperatura marcada baja aproximadamente 30 grados Celsius, ¿cuál sería la temperatura en grados Celsius (ºC)?

En este ejemplo, se puede observar que la persona tiene acceder a la información relevante para responder a la pregunta, reconocer que la temperatura se representa en dos escalas de medida diferentes: una en grados Celsius, y otra en grados Fahrenheit; la persona tiene que identificar cuáles son los datos necesarios para responder (el punto que indica la aguja del termómetro); cuál de los valores (de qué escala) es el que se necesita; y para eso tiene que juzgar de manera crítica cuál de las dos representaciones de temperatura (y por tanto, cuál de las dos series numéricas) es la correcta para poder responder a la pregunta.

El currículum de matemáticas para la educación básica de personas adultas actual

Actualmente la enseñanza de personas adultas en España se estructura en la enseñanza básica, que incluye las enseñanzas iniciales y la educación secundaria, y una vez obtenido el *Graduado de Educación Secundaria* (GES) la persona puede continuar con el bachillerato, los ciclos formativos de grado medio, y/o las pruebas de acceso a la universidad.

En el currículum se dice que el desarrollo de la competencia matemática tiene que servir para usar y relacionar los números, operaciones básicas y otras formas de expresión y razonamiento matemático, en la vida cotidiana:

> Contribución al desarrollo de la competencia matemática
> Contribuye a la adquisición de la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral.
> Favorece la habilidad para interpretar y expresar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones, lo que aumenta la posibilidad real de seguir aprendiendo a lo largo de la vida, tanto en el ámbito escolar o académico como fuera de él, y favorece la participación efectiva en la vida social. (BOE-A-2009-10115).

Tal y como hemos visto más arriba, las matemáticas en la EpA tienen que ser entendidas como algo más que aritmética: alfabetizarse matemáticamente hablando implica desarrollar un comportamiento matemático que quiere decir no solo conocer las operaciones básicas, sino que también aplicar las matemáticas a las situaciones de la vida cotidiana.

En general, la enseñanza de las matemáticas en la EpA tiene que servir para:

– Dotar a las personas adultas del conocimiento necesario para que sepan usar las representaciones formales (académicas) de los números y relacionarlas con situaciones de la vida cotidiana, para resolver problemas y tomar decisiones sabiendo interpretar con precisión los datos, expresiones y procesos matemáticos.
– Saber usar las representaciones de los objetos matemáticos para comunicarse con otras personas.
– Analizar de manera crítica hechos concretos de la realidad.
– Alfabetizarse científica y matemáticamente.
– Organizar el propio razonamiento y pensamiento abstracto.

En las discusiones actuales en los equipos de expertos que estamos discutiendo las orientaciones del próximo currículum de EpA existe el esfuerzo de tratar de alinear nuestro futuro currículum con las líneas internacionales de la enseñanza de las matemáticas en la EpA. Esas tendencias (CENF, PIAAC, NiP, MiA, etc.) van en la línea de que la educación de personas adultas sirva para reconocer la experiencia previa que las personas ya tienen (en todos los ámbitos académicos, y no solo en la enseñanza de las matemáticas), y que tome esa experiencia como punto de partida para, aprender, ampliar y consolidar aprendizajes formales (académicos).

Por tanto, cuando una persona obtenga el título de GES (Graduado de Educación Secundaria), tiene que ser capaz de satisfacer todos los aspectos anteriores. Ahora bien, teniendo en cuenta la especificidad de las personas adultas (en términos de *target* desde el punto de vista del sistema educativo), es preciso no olvidar nunca que las personas adultas ya tenemos experiencias matemáticas en nuestras vidas, vivimos y usamos objetos matemáticos con cierta solvencia, utilizando estrategias que pueden ser académicas (sobre todo en el caso de las personas que sí hemos seguido un proceso de escolarización), o informales (y no formales), en el caso de las personas que no tuvieron la oportunidad de ir a la escuela. Los/as docentes de EpA deben tener en cuenta esta realidad, al igual que la concreción del currículum oficial.

De acuerdo con el currículum actual (y a la espera de que se publique el nuevo), los objetivos de la enseñanza de las matemáticas en la EpA son:

> 8. Utilizar el conocimiento matemático para comprender, valorar y producir informaciones sobre hechos y situaciones de la vida cotidiana y reconocer su carácter instrumental para otros campos de conocimiento.
> 9. Reconocer situaciones de su medio habitual para cuya comprensión o tratamiento se requieran operaciones elementales de cálculo, y formularlas mediante formas sencillas de expresión matemática.
> 10. Conocer, valorar y adquirir seguridad en las propias habilidades matemáticas.
> 11. Identificar formas geométricas del entorno natural y cultural, utilizando el conocimiento de sus elementos para describir la realidad. (BOE-A-2009-10115)

Los currículums de matemáticas de personas adultas actuales de la mayor parte de países ponen el énfasis en el uso de las matemáticas como una práctica social (Yasukawa et al., 2018).

En Europa tenemos algunos ejemplos avalados por la investigación previa en el ámbito, como el currículum enmarcado por el proyecto *Common European Numeracy Framework* (Hoogland, 2018-2021), que integra varios de los elementos que ya habían sido contrastados en *Mathematics in Action* (van Groenestijn y Lindenskov, 2007) o *Matemáticas para la educación de personas adultas* (Díez-Palomar et al., 2002).

Los contenidos del currículum de matemáticas para personas adultas actual

El currículum de matemáticas en nuestro país se organiza en torno a los siguientes descriptores de contenidos:

- Números y operaciones
- Medida
- Geometría
- Tratamiento de la información, azar y probabilidad

La tabla 3 desglosa estos descriptores de manera concreta.

Tabla 3. Contenidos de la enseñanza de las matemáticas en EpA de acuerdo con la normativa vigente

Enseñanzas iniciales I	Enseñanzas iniciales II	Enseñanza Secundaria
Bloque 1. Números y operaciones. Números naturales. Ordenación, operaciones con números naturales. Resolución de problemas y aplicación en la vida cotidiana. El sistema de numeración decimal. Números racionales y decimales. Paso de fracción a decimal. Operaciones con números racionales y decimales. Resolución de problemas y aplicación a la vida cotidiana. Familiarización con el uso de la calculadora para la realización de operaciones elementales. Bloque 2. La medida: Estimación y cálculo de magnitudes. Unidades de medida: Longitud, masa, capacidad y tiempo. Unidades de medida convencionales y no convencionales. Bloque 3. Geometría. Identificación y clasificación de elementos geométricos. Aplicación de estos conocimientos a los objetos del entorno. Bloque 4. Tratamiento de la información, azar y probabilidad. Lectura e interpretación de tablas de doble entrada de uso habitual en la vida diaria. Obtención y utilización de información proveniente de gráficos estadísticos relativos a fenómenos cotidianos. Lectura e interpretación de mapas y planos que impliquen el uso de escalas sencillas.	(ámbito científico-tecnológico) Profundización en los números naturales, decimales y racionales y sus operaciones. Su uso en actividades cotidianas. Números enteros (positivos y negativos). Operaciones con números enteros. Divisibilidad. Múltiplos y divisores. Números primos y compuestos. Expresión de partes utilizando porcentajes. Aplicación en situaciones o problemas habituales; por ejemplo en descuentos, capacidades, encuestas e informaciones sobre temas de actualidad. Profundización en las unidades de medida, longitud, masa, tiempo y capacidad. Medidas de superficie y volumen. Estimación de longitudes, superficies, pesos y capacidades de objetos y espacios conocidos. Las medidas de ángulos. Medida de ángulos y uso de instrumentos convencionales para medirlos. La representación elemental en el plano y el espacio, escalas y gráficas sencillas. Uso de sistemas de referencia. Uso de planos del barrio o de la localidad. Proporcionalidad geométrica: introducción a la semejanza. Aplicaciones y reducciones. Distintas formas de representar la información. Tipos elementales de gráficos estadísticos. Obtención y utilización de información para la construcción de gráficos. Estimación del grado de probabilidad de un suceso.	Modulo 1 Bloque 1. Contenidos comunes. Bloque 2. Números y álgebra. Bloque 3. Funciones y gráficas. Bloque 4. Herramientas tecnológicas. Bloque 5. Los modelos y la medida. Modulo 2 Bloque 1. La resolución de problemas científicos y tecnológicos. Bloque 2. Números y álgebra. Bloque 3. Estadística y probabilidad. Nivel 2 Modulo 3 Bloque 1. Contenidos comunes. Bloque 3. Números y álgebra. Bloque 4. Geometría. Bloque 5. Estadística. Modulo 4 Bloque 1. Contenidos comunes. Bloque 3. Economía de lo cotidiano. Bloque 4. Funciones y gráficas. Probabilidad.

La presentación de estos contenidos difiere según sea el modelo didáctico adoptado. En la educación de personas adultas existen dos enfoques didácticos principales: el escolar y el modelo social.

El primer enfoque presenta los contenidos haciendo un paralelismo con la educación de los niños y de las niñas. Por ejemplo, de acuerdo con Gelman y Gallistel (1986), para desarrollar lo que Baroody y otros han denominado "sentido numérico" hay que adquirir y comprender los principios del recuento:

- Principio de la correspondencia uno-a-uno: asignar un número a un objeto de una colección de objetos, sin dejarse ninguno, ni contarlo dos veces.
- Principio del orden estable: utilizar la serie numérica en el orden correcto (n, n+1, (n+1)+1… (n+1)+n).
- Principio de la cardinalidad: reconocimiento del último numeral de un conjunto como la cantidad de objetos en dicho conjunto.
- Principio de la abstracción: reconocimiento que los principios anteriores se aplican a cualquier tipo de conjunto de objetos, independientemente del tipo de objeto.
- Principio del orden irrelevante: en un conjunto de objetos, no importa por cual se comience a contar, el cardinal del conjunto siempre será el mismo.

Todas las personas adultas a lo largo de nuestras vidas hemos podido adquirir todos estos principios, incluso quienes no han tenido la oportunidad de ir a la escuela y en la vida adulta hacen la opción de ir a la EpA. Por tanto, el currículum de matemáticas de las enseñanzas iniciales no debe comenzar con aspectos tales como la compresión y el uso del recuento, o el significado de las cantidades discretas, por ejemplo. Al contrario, se recomienda dar un enfoque social del número y de sus usos.[3]

Ejemplo (de materiales de enseñanza de niveles iniciales, ámbito científico tecnológico, de la Junta de Andalucía)

A continuación, te ofrecemos algunas cantidades numéricas. Indica cuál de ellas se corresponde con cada una de las siguientes cuestiones. Utiliza la calculadora.

376 – 98.760 – 575 – 8.700 – 168 – 71.175 – 4.200

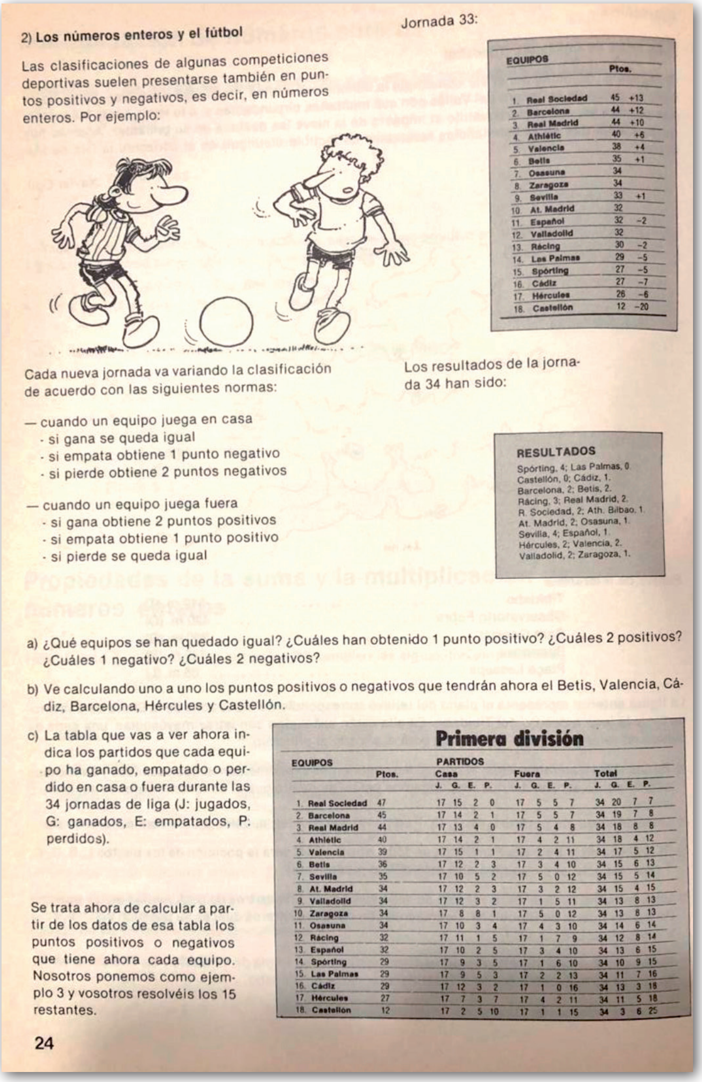
3 En Díez-Palomar (2020) se presenta el caso de una discusión en una tertulia matemática dialógica donde las mujeres participantes reflexionan sobre diferentes sistemas de numeración, y el concepto de base numérica, usando como referente sus recuerdos del uso de monedas cuyas fracciones se solían utilizar usando bases numéricas diferentes de la habitual del sistema numérico decimal. El ejemplo usado se remite a las pesetas, y al uso habitual de la unidad de "duro" como 5 pesetas, pero que a veces se usaba incluso más que la propia "peseta" (unidad decimal), para referirse a precios o a cantidades (p.e., cinco duros por veinticinco pesetas, veinte duros por cien pesetas, etc.).

– Tengo 564 euros y me gasto la tercera parte en un billete de avión. ¿Cuánto me sobra? _____ euros.
– Vendo mi moto que costó 2.300 euros por la cuarta parte de su precio. ¿Por cuánto la vendo? _____ euros.
– Realizo una llamada desde mi móvil cuyo coste es 14 céntimos por minuto. Si he estado hablando durante 12 minutos ¿Cuánto me costarán? ______ céntimos.
– Ahorro mensualmente 175 euros. ¿Cuánto he ahorrado en dos años? ______ euros.
– Recorro diariamente 65 kilómetros en coche. ¿Cuánto supone al cabo de tres años? _____ kilómetros.
– Pago la letra de mi coche por un importe de 145 euros al mes. ¿Cuánto supone al cabo de 5 años? _______ euros.
– En mi casa se gastan mensualmente 8.230 litros de agua. ¿Cuánto se gasta al año? _______ litros.

El modelo social se basa en buscar las conexiones de los contenidos académicos con las situaciones de la vida cotidiana, partiendo de la "psicología de la persona adulta" como sujetos que ya cuentan con experiencias previas. Dentro del modelo social destaca el enfoque comunicativo, caracterizado sobre todo por la inclusión de las voces de todas las personas adultas participantes.

A mediados de los años 80, Ramón Flecha, fundador de la escuela de personas adultas de La Verneda – Sant Martí, juntamente con un grupo de personas adultas, y profesionales de la didáctica de las matemáticas, crearon un libro de matemáticas para personas adultas como resultado de intensos diálogos entre todos ellos y ellas (Lemos et al., 1982). Este libro, reeditado años más tarde (Díez-Palomar, et al., 2002), incorpora enfoques novedosos en aquella época, que luego hemos visto en materiales posteriores que han caracterizado la enseñanza de las matemáticas en la EpA, como el uso de recortes de diario para trabajar la alfabetización numérica crítica, el uso de boletos de la quiniela como material para trabajar las probabilidades, la explicación de la base de un sistema numérico usando la representación de los circuitos eléctricos de las calculadoras para representar la construcción de números decimales a partir de su equivalente en binario, creando una "continuidad" con la *formación ocupacional* (de electrónica, por ejemplo), o la encuesta sobre la sexualidad femenina, para trabajar la estadística. Todos los temas se presentan de manera contextualizada, y parten de las propuestas de las personas adultas, de aquello que les interesa, que tiene sentido en sus vidas, y para lo que las matemáticas les da una herramienta para comprender mejor y saber tomar mejores decisiones. Esta forma de enseñar la matemática fue avalada por investigaciones como el proyecto *Numeracy* (1993), en el que se examinaron las habilidades numéricas de personas como, por ejemplo, los trabajadores de la SEAT en Martorell, y que luego han contribuido a lo que se llama *numeracy at the workplace* (FitzSimons, 2013; FitzSimons y Coben, 2009).

Ejemplo (procedente de la primera edición del libro *Matemáticas en las escuelas de adultos* -1982-, p. 24)



2) **Los números enteros y el fútbol**

Las clasificaciones de algunas competiciones deportivas suelen presentarse también en puntos positivos y negativos, es decir, en números enteros. Por ejemplo:

Jornada 33:

EQUIPOS	Ptos.	
1. Real Sociedad	45	+13
2. Barcelona	44	+12
3. Real Madrid	44	+10
4. Athlétic	40	+6
5. Valencia	38	+4
6. Betis	35	+1
7. Osasuna	34	
8. Zaragoza	34	
9. Sevilla	33	+1
10. At. Madrid	32	
11. Español	32	−2
12. Valladolid	32	
13. Rácing	30	−2
14. Las Palmas	29	−5
15. Spórting	27	−5
16. Cádiz	27	−7
17. Hércules	26	−6
18. Castellón	12	−20

Cada nueva jornada va variando la clasificación de acuerdo con las siguientes normas:

— cuando un equipo juega en casa
- si gana se queda igual
- si empata obtiene 1 punto negativo
- si pierde obtiene 2 puntos negativos

— cuando un equipo juega fuera
- si gana obtiene 2 puntos positivos
- si empata obtiene 1 punto positivo
- si pierde se queda igual

Los resultados de la jornada 34 han sido:

RESULTADOS
Spórting, 4; Las Palmas, 0.
Castellón, 0; Cádiz, 1.
Barcelona, 2; Betis, 2.
Rácing, 3; Real Madrid, 2.
R. Sociedad, 2; Ath. Bilbao, 1.
At. Madrid, 2; Osasuna, 1.
Sevilla, 4; Español, 1.
Hércules, 2; Valencia, 2.
Valladolid, 2; Zaragoza, 1.

a) ¿Qué equipos se han quedado igual? ¿Cuáles han obtenido 1 punto positivo? ¿Cuáles 2 positivos? ¿Cuáles 1 negativo? ¿Cuáles 2 negativos?

b) Ve calculando uno a uno los puntos positivos o negativos que tendrán ahora el Betis, Valencia, Cádiz, Barcelona, Hércules y Castellón.

c) La tabla que vas a ver ahora indica los partidos que cada equipo ha ganado, empatado o perdido en casa o fuera durante las 34 jornadas de liga (J: jugados, G: ganados, E: empatados, P: perdidos).

Primera división

EQUIPOS	Ptos.	PARTIDOS Casa J.	G.	E.	P.	Fuera J.	G.	E.	P.	Total J.	G.	E.	P.
1. Real Sociedad	47	17	15	2	0	17	5	5	7	34	20	7	7
2. Barcelona	45	17	14	2	1	17	5	5	7	34	19	7	8
3. Real Madrid	44	17	13	4	0	17	5	4	8	34	18	8	8
4. Athlétic	40	17	14	2	1	17	4	2	11	34	18	4	12
5. Valencia	39	17	15	1	1	17	2	4	11	34	17	5	12
6. Betis	36	17	12	2	3	17	3	4	10	34	15	6	13
7. Sevilla	35	17	10	5	2	17	5	0	12	34	15	5	14
8. At. Madrid	34	17	12	2	3	17	3	2	12	34	15	4	15
9. Valladolid	34	17	12	3	2	17	1	5	11	34	13	8	13
10. Zaragoza	34	17	8	8	1	17	5	0	12	34	13	8	13
11. Osasuna	34	17	10	3	4	17	4	3	10	34	14	6	14
12. Rácing	32	17	11	1	5	17	1	7	9	34	12	8	14
13. Español	32	17	10	2	5	17	3	4	10	34	13	6	15
14. Spórting	29	17	9	3	5	17	1	6	10	34	10	9	15
15. Las Palmas	29	17	9	5	3	17	2	2	13	34	11	7	16
16. Cádiz	29	17	12	3	2	17	1	0	16	34	13	3	18
17. Hércules	27	17	7	3	7	17	4	2	11	34	11	5	18
18. Castellón	12	17	2	5	10	17	1	1	15	34	3	6	25

Se trata ahora de calcular a partir de los datos de esa tabla los puntos positivos o negativos que tiene ahora cada equipo. Nosotros ponemos como ejemplo 3 y vosotros resolvéis los 15 restantes.

24

Figura 6. Detalle de la página 24 del libro *Matemáticas en las escuelas de adultos*

A inicios de los años 2000, con el paso ya decidido de la idea de la alfabetización numérica reducida a la aritmética, al conocimiento matemático para hacer frente a la vida cotidiana, los materiales de personas adultas comienzan a incorporar la idea de contexto y las matemáticas *situadas* (en términos de Lave y Wenger -1991-). Por ejemplo, en el proyecto MiA (*Mathematics in Action*), en el que participaron Dinamarca, Hungría, los Países Bajos y España, encontramos actividades como "Food- Energy" (sobre el gasto calórico y el cálculo para crear dietas saludables ajustadas a las necesidades calóricas de cada persona según su actividad / ocupación diaria), el diseño del presupuesto doméstico (incluyendo formas de tabular los datos y graficarlos, incluyendo la lectura e interpretación de dichos gráficos y tablas), cálculo de precios rebajados de acuerdo con un determinado porcentaje de rebaja, uso de porcentajes también en las recetas culinarias, etc.

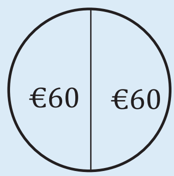
Ejemplo (procedente de *Mathematics in Action*, -2007- p. 72)

Maestro: Un folleto de una óptica dice: "Esta semana 50% de descuento en todas las gafas." ¿Cuánto tenéis que pagar por unas gafas de 120 euros? Coged un papel. Haced los cálculos en el papel. Quiero saber cómo lo habéis resuelto.

Durante la interacción, aparecen tres respuestas: 75 euros, 70 euros, y 60 euros.

Maestro: ¿Por qué pensáis que son 70 euros? ¿Cómo lo habéis calculado? ¿Qué pensáis? ¿Lo podéis hacer otra vez? Os queremos escuchar. ¿Lo podéis escribir en la pizarra? Lo queremos ver.

En la pizarra se escriben estas tres respuestas.

Respuesta 70 euros o 75 euros	Respuesta 60 euros	Respuesta 60 euros
Soraya: €120 – €50 = €70 Carla: Creo que son €75. No te sé explicar por qué. No lo recuerdo. *Carla probablemente calculó €120 – €50, pero tiene problemas con la resta y no lo sabe explicar.*	Joyeuse: $12\cancel{0} \times \frac{5\cancel{0}}{10\cancel{0}} = 60$ €120-€60=€60 50% es multiplicar por 50 y luego dividir entre 100. He aprendido a tachar el cero, no sé por qué.	Nhung  50% es la mitad – la mitad, o sea, la mitad del precio = a la mitad. La mitad de €120 es €60.

CLAVES PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA EPA: APRENDIENDO MATEMÁTICAS A TRAVÉS DE LA PRÁCTICA

Las personas adultas tienen muchas y diversas responsabilidades en sus vidas. Son padres, madres, abuelos, abuelas, vecinos/as, ciudadanos/as, consumidores/as, empleados/as, voluntarios/as, miembros/as de algún club, etc. Y en todos esos roles tienen que hacer frente a diferentes situaciones en las que las matemáticas están presentes. Mieke van Groenestijn en su tesis doctoral (2002), y más tarde en el proyecto MiA (2007), sugiere que la enseñanza de las matemáticas a las personas adultas tiene que servir para darles (darnos) herramientas para desempeñar dichos roles con solvencia. Groenestijn propone una serie de consideraciones a tener en cuenta a la hora de diseñar y/o implementar un currículum de matemáticas para personas adultas, como resultado de diversas investigaciones sobre el aprendizaje de las personas adultas en situaciones de vida reales (Lave et al., 1984; Resnick, 1987; Carraher et al., 1988; Lave, 1988; Lave yW Wenger, 1991; Saxe, 1991; van der Kamp y Scheeren, 1996; Noss y Hoyles, 1996; Tuijnman et al., 1997; Greeno et al. 1999) y que durante los últimos veinte años han continuado produciendo evidencias que confirman la propuesta de Groenestijn (2002, 2007).

Las personas adultas son libres para aprender

Éste es un aspecto importante: las personas adultas que acuden a un centro educativo, no lo hacen porque sea obligatorio; lo hacen porque quieren, porque tienen un proyecto de vida, porque quieren tener mejores oportunidades, porque quieren recuperar una oportunidad que la vida les negó en su momento, … Pero, en cualquier caso, están en el aula del centro educativo de manera voluntaria. Y esto es una diferencia muy importante respecto a una escuela de primaria, o un instituto de secundaria.

El aprendizaje sucede en situaciones que son funcionales

Existe una necesidad para aprender. El aprendizaje responde a una serie de necesidades concretas, que emergen de situaciones de la vida cotidiana. Las personas adultas aprenden para resolver problemas reales. El aprendizaje es resultado de resolver esas situaciones. Todo aprendizaje tiene un motivo, no se aprende porque sí. Ahora bien, tal y como dice Groenestijn, esto puede entrañar dos problemas: por un lado, el aprendizaje depende mucho de la persona y de la situación, si no se ve un problema en cierta situación, entonces no se creará el contexto para que surja el aprendizaje. Por otro lado, el relacionar el aprendizaje con un contexto específico crea el problema de la transferencia hacia otro tipo de contextos. Este problema ha sido discutido más tarde por Evans (2002).

El aprendizaje en la EpA se caracteriza por utilizar materiales que son auténticos

En la investigación en didáctica de las matemáticas se ha discutido mucho a propósito de la autenticidad (o no) de los materiales que usamos en el aula (Turner et al., 2009). Esto es particularmente cierto en el caso de la Epa. Mientras que en la educación primaria o en la secundaria los niños/a suelen utilizar libros de texto, esquemas, o materiales manipulativos, en el caso de la EpA es más frecuente encontrar situaciones reales y materiales auténticos. Por ejemplo, en el libro de *Matemáticas. Educación de personas adultas* (Díez-Palomar et al., 2002) encontramos extractos de cuentas bancarias auténticas, boletos de la lotería de Navidad de verdad, recortes de diario, o nóminas auténticas. Este tipo de materiales facilita el aprendizaje de las matemáticas para las personas adultas. Se ve la utilidad que tienen, a la vez que son un buen recurso para el aprendizaje porque tienen sentido. La discusión que se produce en el aula sirve también para desarrollar un sentido crítico en la interpretación y comprensión de los objetos matemáticos implícitos en dichos materiales. Desde la investigación este enfoque ha sido ampliamente validado, con propuestas como las del learning-by-doing-by-doing (Carlson y Sullivan, 1999; Frijn et al., 2014; Martínez, 2018; Schank, 1996) y el learning-for-doing (FitzSimons, 2004).

Toda situación de aprendizaje está determinada socio-culturalmente

Los trabajos de Vygotksy (1978) ya mostraron en el primer tercio del siglo XX que el aprendizaje es un hecho social que ocurre en un contexto cultural. Esto es cierto para cualquier episodio de aprendizaje, y también lo es en el caso de las personas adultas. Las investigaciones de Saxe (1991) muestran que el aprendizaje está social e históricamente situado. Díez-Palomar (2020) muestra ejemplos en los que mujeres que participan en una tertulia dialógica de matemáticas recurren a sus recuerdos para encontrar unidades de medida que se usaban en sus respectivos pueblos, cuando eran niñas. El trabajar con las personas adultas en el aula con un enfoque basado en el diálogo igualitario abre la puerta a enriquecer las experiencias de aprendizaje incluyendo en las discusiones esos conocimientos.

El aprendizaje se basa más en la "cognición compartida" que en la "cognición individual"

Los trabajos de Resnick (1991), Wertsch (1991), o Hutchins (2000) prueban que el aprendizaje es resultado de un proceso de cognición compartido con otras personas. Cualquier muestra individual de aprendizaje siempre es resultado de haber compartido con otras personas el proceso de aprendizaje. A través de la discusión de materiales (libros de texto, problemas, actividades, etc.), las personas somos capaces de generar conocimiento. Hutchins (2000) uso el concepto de "cognición distribuida" para ilustrar el hecho frecuente que ante un problema cuando es una única persona la que lo aborda, a menudo puede encontrarse con dificultades por no saber encontrar todos los elementos necesarios para dar con la respuesta. En cambio, cuando el mismo problema se presenta ante un grupo de personas, que lo pueden discutir, y compartir así sus diferentes conocimientos, experiencias, etc., creando así una suerte de "zona de desarrollo próximo", entonces entre todas son capaces de resolver el problema, aprendiendo las unas de las otras.

El aprendizaje ocurre por colaboración

Groenestijn (2002) dice que el aprendizaje en práctica ocurre vía *mostrar-imitar-participar-aplicar*. Con esas cuatro palabras en realidad lo que explica es que en el caso de las personas adultas no es necesario crear contextos de aprendizaje específicos; las personas adultas comparten de manera espontánea cuando tienen que resolver una tarea, igual que ocurre en la vida real, cuando en el trabajo, o en casa, tienen que resolver una situación: buscamos siempre la ayuda, apoyo, consejo, o simplemente a "alguien que nos escuche", porque sabemos que ese apoyo sirve para resolver la tarea en la que estamos. De hecho, Vygotsky (1978) ya mostró evidencias de que el propio proceso de verbalización (de explicar a alguien el problema sobre el que estamos trabajando) es una forma no solo de comunicarlo, sino de acotarlo y, en última instancia, de comprenderlo y buscar una respuesta al mismo. Se trata de uno de los procesos psicológicos superiores más cruciales desde el punto de vista del aprendizaje (de niños/as y de personas adultas).

El aprendizaje es una constante negociación de las "reglas del juego."

En la vida real las personas adultas contantemente ajustamos las reglas a la situación que tenemos que resolver en cada momento. Ejemplos claros son, por ejemplo, el uso de recetas de cocina. Cuando vienen a casa 5 personas en vez de las 4 para la que teníamos los ingredientes de la receta, lo que hacemos es ajustar las cantidades de la receta para acomodar a una persona más en la mesa, y que no se quede sin comer. Este hecho marca la forma en que hacemos clase en los centros de EpA, porque las personas adultas no se quedan pasivas esperando a que les demos las fórmulas (las recetas) para resolver los problemas del libro, sino que muchas veces miran cómo ajustar la situación a su experiencia.

El enfoque dialógico en la enseñanza de las matemáticas

Hemos hablado de que existen dos modelos principales en la enseñanza en la EpA: el modelo escolar, y el modelo social.

Éste último es el que la investigación en el ámbito de la EpA ha mostrado que mejores resultados da. Los dos teóricos más importantes cuyos trabajos sustentan este modelo son Freire (1970a, 1970b, 1998, 2000) y Flecha (1997, 2000).

Ramón Flecha es el creador del *Aprendizaje Dialógico* (AD), que es una de las teorías educativas que más se usan en la EpA en todo el mundo. El AD se basa en siete principios:

– Diálogo igualitario
– Inteligencia cultural
– Solidaridad
– Transformación
– Dimensión instrumental
– Creación de sentido
– Igualdad de las diferencias

Esta teoría educativa es la base de lo que se conoce como matemática dialógica (Díez-Palomar y Cabré, 2015; Díez-Palomar, 2017; Díez-Palomar et al., 2021), y da aportaciones para enfocar la práctica de la enseñanza de las matemáticas en la EpA, siguiendo los mencionados principios.

Diálogo igualitario

Este principio se refiere a la igual oportunidad que debe tener cada persona para participar en el diálogo que se crea cuando se propone resolver conjuntamente una actividad matemática. Parte del hecho de que toda persona tiene capacidad de habla y acción, como una capacidad innata por el simple hecho de nacer "persona." A diferencia de otras formas de vida, las personas nos comunicamos, sea oralmente, mediante textos, por signos, o por cualquier otro medio de comunicación. Esta capacidad es la base sobre la que autores como Habermas (1981, 1985) sustentan su teoría de la acción comunicativa. Habermas (1981, 1985) estudió el habla y los diferentes actos de la comunicación. En su estudio intentó dar con las condiciones que determinan que un acto de habla sea aceptable, y señaló que la validez del mismo viene dada por tres aspectos: la pretensión de verdad, la pretensión de rectitud normativa y la pretensión de veracidad. Según él, la racionalidad tiene un carácter discursivo porque los actos comunicativos se sustentan sobre la defensa argumentada de las pretensiones de validez. Frente a los argumentos de poder, Habermas defiende el poder de los argumentos, como forma de crear consensos en torno a los enunciados. Flecha afirma que las personas podemos crear consensos cuando usamos el diálogo de manera igualitaria, siendo "igualitario" el hecho de que todas las personas tenemos la capacidad de emitir actos de habla para intercambiar nuestros argumentos basados en pretensiones de validez (verdad, rectitud normativa, y veracidad), de manera que el consenso se alcanza como resultado del acuerdo sobre la validez de esos argumentos, no por la posición de poder que ocupe quién los use. Aplicado a la enseñanza (no solo la de las personas adultas, sino la enseñanza en general), el diálogo igualitario se refiere a que todas las personas que están participando en un episodio de aprendizaje pueden aportar argumentos para sustentar sus afirmaciones, propuestas de resolución de la actividad, etc., de manera que la discusión y el convencimiento del resto del grupo (para llegar al acuerdo) pone de manifiesto las posibles inconsistencias, errores, o aciertos, que haya en los argumentos esgrimidos, y abre la posibilidad de que todas las personas puedan participar y enriquecerse explícitamente de este diálogo, generando pues mejores aprendizajes. Es importante, por tanto, abrir espacios en el aula de personas adultas para que aparezcan oportunidades para el diálogo igualitario, ya sea a partir de la organización de aula, o de cómo gestione el/a docente las dinámicas del aula.

Inteligencia cultural

Existe un gran número de evidencias científicas que prueban que hay más de un tipo de "inteligencia." Vygotsky (1978) y Luria (1976) afirman que los procesos psicológicos superiores se desarrollan por mediación de objetos culturales, como el lenguaje, la escritura o los sistemas de notación matemática. Siguiendo la línea de trabajo de Vygotsky, Scribner y Cole (1978) sugieren que el pensamiento es resultado del uso que hacemos las personas de las herramientas en contextos de práctica e interacción. La inteligencia presenta varias formas, no solo la "académica" o "escolar", sino que también encontramos lo que se denominaría "inteligencia práctica", ligada a situaciones contextuales, de la vida real. En el ámbito de las matemáticas tenemos trabajos clásicos, como el que realizaron Carraher, Carraher y Schlieman (1985) de los *meninos da rua*, o el enfoque de las "matemáticas del supermercado" de Lave (1988). De hecho, tal y como escribe Lave, "básicamente ningún problema en la tienda o la cocina se resuelve en forma de algoritmo académico." Este tipo de estudios ha servido para mostrar que muchas personas adultas llevan al aula del centro de educación otras formas de inteligencia que son diferentes de la que conocemos con "escolar" o "académica." Skemp (1976) propuso los términos de *procedural learning* y *conceptual learning* para distinguir justamente entre estos diferentes "tipos" de inteligencias. Un ejemplo que ilustra este diferente "tipo de inteligencias" lo encontramos en el siguiente enunciado: ¿Cuál es la proporción entre el área de estos dos triángulos?

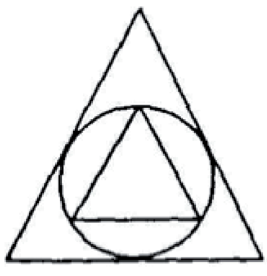


Figura 7. Enunciado propuesto por Skemp para distinguir entre *procedural learning y conceptual learning*

Para alguien que esté pensando en la explicación "escolar", puede resultar evidente que la forma de responder a esta pregunta es primero identificar los lados del triángulo con letras, y luego medirlos con una regla, por ejemplo. Después, tomando las medidas de esos lados, y usando los criterios de semejanza de los triángulos, puede razonar que:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

Observando el resultado de estas comparaciones es fácil deducir la relación de proporcionalidad entre ambos triángulos. Sin embargo, ésta no es la única manera de responder a la pregunta inicial. Otra persona podría tener la siguiente idea: "voy a girar el triángulo que está dentro del círculo, a ver qué pasa." Y al hacerlo, ocurre lo siguiente:

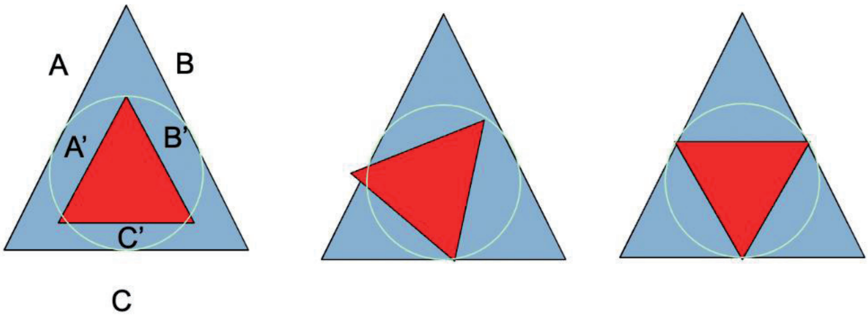


Figura 8. Ejemplo de resolución usando el *procedural learning*

De repente, con un "movimiento de giro" de uno de los triángulos podemos comprobar de manera visual que la relación entre ambos triángulos es que uno es una cuarta parte que el otro. El tipo de "inteligencia" que hemos usado aquí sería más acorde con lo que Scribner denomina "inteligencia práctica." En la EpA este tipo de situaciones ocurre constantemente, porque las personas adultas relacionan todo lo que escuchan en clase con su vida cotidiana (laboral, doméstica, etc.). Existen innumerables ejemplos de procedimientos prácticos matemáticos para realizar tareas y resolver problemas (Saló, 2020; Keogh et al., 2019; Albertí, 2010). Las habilidades comunicativas de las personas (Soler y Flecha, 2010) integran todas estas inteligencias en los actos de habla comunicativos.

Solidaridad

En la investigación educativa se ha hablado mucho sobre los actores que participan en la práctica de enseñanza y aprendizaje. Bruner (Wood, Bruner y Ross, 1976) propuso la teoría del andamiaje (*scaffolding*). Pero más tarde, los resultados de su investigación le llevaron a reconocer que el proceso de aprendizaje es un proceso intersubjetivo en el que participan todas las personas y en el que todas hacen sus contribuciones. En 1996 propuso el concepto de *comunidades de aprendices mutuos* para referirse al hecho de que todas las personas, a través de la intersubjetividad, aprenden las unas de las otras, de acuerdo con sus habilidades. Estos conceptos nacen de constatar que en la práctica las personas, cuando estamos resolviendo una tarea, si compartimos lo que estamos haciendo con las personas que tenemos al lado, creamos espacios de aprendizaje en los que otros principios como el diálogo igualitario, o la inteligencia cultural, pueden enriquecer los aprendizajes de todos y todas.

Transformación

Freire (1997) escribió que las personas somos "seres de transformación, no de adaptación." Para aprender es necesario transformar el contexto. En la EpA encontramos perfiles de personas muy diferentes, desde jóvenes que abandonaron los estudios, a personas que nunca tuvieron la oportunidad de ir a la escuela, inmigrantes de otros países, refugiados, etc. Las matemáticas tienen que crear universos de posibilidad para aprendizajes de máximos. El currículum tiene que estar basado en las posibilidades que todas las personas tienen de alcanzar los aprendizajes de los contenidos curriculares, no en sus déficits. El *Aprendizaje Dialógico* parte de estas ideas, porque existen muchas evidencias que una educación que Freire llamaría "bancaria" lo que hace es reproducir las desigualdades y etiquetar a las personas. Los estudios del *Interaccionismo Simbólico* de Mead (2015) han mostrado el impacto negativo que tienen las interacciones sobre la agencia y la identidad humanas. La identidad (el *I* en inglés – el *yo*-) es resultado de la interiorización de la imagen que tienen los demás de nosotros/as mismos. A través de prácticas sociales interiorizamos la imagen social de nosotros mismos (el *me* en inglés, -el mí-), y eso marca nuestro *self* (nuestra identidad). En educación Rosenthal y Jacobson (1968) estudiaron este fenómeno al que denominaron *Efecto Pigmalión*, y que puede marcar profundamente la disposición para aprender de una persona concreta. La implementación del currículum que se basa en altas expectativas transforma las oportunidades de aprendizaje. En el ámbito de la didáctica de las matemáticas también tenemos evidencias del mismo fenómeno. Pólya (1945), por ejemplo, escribió en la introducción de su libro *How to solve it* que ofrecer problemas muy fáciles a los y las estudiantes no servía para nada, porque no suponía un reto para ellos y ellas (que es la base del aprendizaje tal y como muestran estudios desde la psicología del aprendizaje, como los de Piaget). En cambio, proponer problemas fuera del alcance de los y las estudiantes, contribuye a generar frustración y fracaso. Ahora sabemos que generar espacios heterogéneos, donde las personas sean muy diversas, y que funcionen en base al diálogo igualitario y a la inteligencia cultural, abre la posibilidad al aprendizaje a través de las cadenas de solidaridad (García-Carrión, 2012) que enriquecen los aprendizajes porque transforman las condiciones de partida.

La dimensión instrumental

Apple en *Escuelas democráticas* (Apple y Beane, 2007) escribió que un currículum democrático incluye la enseñanza del currículum oficial. El enfoque del AD se basa en el criterio del currículum de la competencia y del esfuerzo (frente a los llamados "currículums de la felicidad y de la sociabilidad"). Se trata de ofrecer un currículum de máximos, no adaptado ni rebajado, sino basado en la calidad, en la excelencia, en incluir los mejores aprendizajes en cada uno de los ámbitos del saber. En el caso de la enseñanza de las matemáticas en la EpA, implica incluir todos los contenidos que aparecen en el currículum oficial, tal y como se menciona en el apartado correspondiente de más arriba. Consiste en superar la oposición entre la dimensión humanista y la dimensión tecnocrática de la educación, en palabras de Freire (1997). Flecha, el creador del AD, lo explica con las siguientes palabras (1997, p. 33): "El aprendizaje instrumental se intensifica y profundiza cunado se sitúa en un adecuado marco dialógico. La capacidad de selección y procesamiento de la información es el mejor instrumento cognitivo para desenvolverse en la sociedad actual (…) La reflexión es imprescindible para comprender con profundidad las tareas a realizar y para tener creatividad en la construcción de nuevas respuestas a los problemas que se van planteando. Cuando el diálogo es igualitario fomenta una intensa reflexión, al tener que comprender los argumentos ajenos y aportar los propios."

La creación de sentido

A inicios del s. XX Weber publicó uno de los libros referentes de la teoría social (y sociológica), *La ética protestante y el espíritu del capitalismo* (1901-1905). En este libro analiza una de las consecuencias más dramáticas de la modernidad, que es la perdida de sentido. Para las personas que acuden a los centros de EpA a aprender, la escuela responde a sus sueños, a sus proyectos personales, y eso es una "creación de sentido." La enseñanza surge de la necesidad, pero también del deseo de aprender, de conocer y crecer intelectualmente hablando. Para ello, es necesario que el currículum sea de calidad, que incluya los saberes matemáticos que nos han legado las personas que vivieron antes que nosotros y nosotras (tal y como vemos en el principio del aprendizaje instrumental), porque esos conocimientos, esos objetos matemáticos, son los que van a generar mayor interés por aprenderlos. Ejemplo de ello son las *tertulias matemáticas dialógicas*, donde se leen libros de matemáticas reconocidos por la comunidad científica internacional como libros de referencia (libros que presentan una "buena matemática", una "matemática de calidad"). Entre las personas adultas de la escuela de La Verneda, que llevan participando varios años en la tertulia matemática dialógica, se aprecian especialmente los libros de historia de las matemáticas, que presentan con rigor los contenidos matemáticos (a veces con textos difíciles, repletos de lenguaje simbólico como fórmulas, teoremas, proposiciones, y formas de representación que incluyen gráficos, tablas, o notaciones de sistemas numéricos históricos en desuso actualmente); pero que son fuente de profundas reflexiones, que enriquecen el aprendizaje más allá de lo que se puede encontrar en un libro de texto de matemáticas de enseñanzas iniciales, por ejemplo (Ocampo, 2021).

La igualdad de las diferencias

Muchos currículums, también los de matemáticas, se basan en el principio de igualdad de oportunidades. Su motivación es ofrecer unos estándares que guíen el diseño de los proyectos educativos de centro, así como el diseño de las planificaciones docentes (secuencias didácticas, criterios de evaluación, materiales, etc.). Sin embargo, la investigación que hemos ido acumulando en educación y teorías del aprendizaje sugiere que ese criterio de igualdad de oportunidades no es suficiente (Flecha, 2014). No sirve cuando el contexto de aula se caracteriza por ser muy diverso; cuando tenemos perfiles de estudiantes (personas participantes en términos de EpA) que son muy diferentes, con motivaciones distintas, historias personales diferentes, y trayectorias académicas desiguales. Ante esto, los currículums que tienen a la homogeneización están destinados al fracaso. Tal y como dice Flecha (1997), la implementación de un currículum nunca tiene que conducir ni hacia una igualdad homogeneizadora, ni hacia una diversidad desigual; sino hacia el criterio de igualdad de resultados. La excelencia se consigue gracias a la diversidad, tal y como han mostrado las mejores experiencias educativas de todo el mundo (Apple y Beane, 2007; Flecha, 2014). Pero eso se logra gracias a reconocer la diversidad y sus beneficios, cuando se abren espacios para que todas las personas puedan aportar su conocimiento basado en la experiencia. Ejemplos en el caso de la enseñanza de matemáticas en la EpA los encontramos en personas que usan de manera solvente estrategias de cálculo mental para calcular porcentajes sin necesidad de usar procedimientos académicos como puedan ser "la regla de tres", o el algoritmo que usa la representación del porcentaje como fracción con el denominador igual a cien. Pedro Plaza (2021) cita a Soto [y Rouche] (1995) describiendo un método no académico para calcular porcentajes:

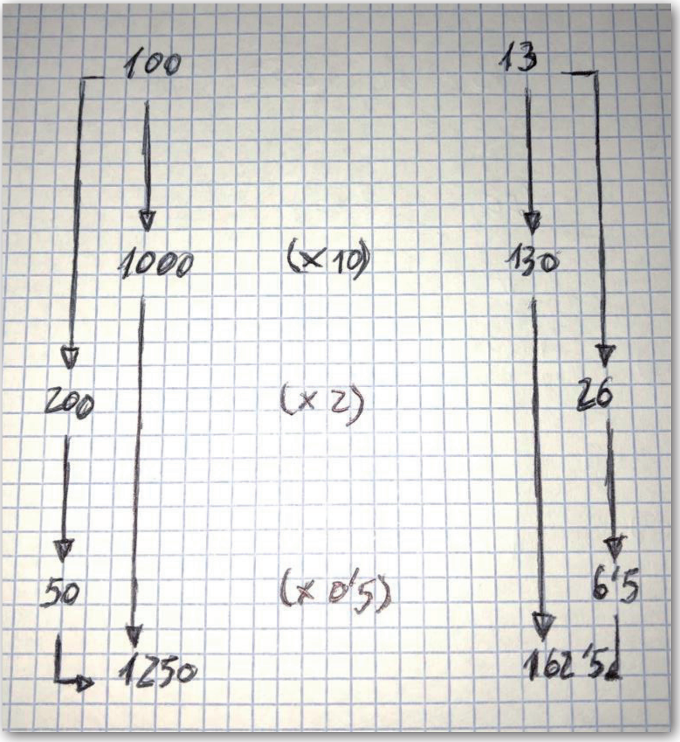


Figura 9. Cálculo del 13% de 1250. Basado en Plaza (2021)

Orientaciones para la práctica

Cerramos este capítulo con algunas propuestas basadas en lo que sabemos a raíz de las investigaciones en el área de la enseñanza de las matemáticas en la EpA, a modo de orientaciones para la práctica.

El objeto de enseñanza: las matemáticas

Hay muchas "matemáticas", pero la matemática es una igual para todo el mundo. Esto quiere decir que las personas adultas tenemos muchas formas diferentes de hacer y usar las matemáticas. Los enfoques constructivistas han hecho mucho daño, porque han sido usados para justificar las adaptaciones curriculares diciendo que tenemos que presentar, organizar y enseñar las "matemáticas" de acuerdo con cómo las "construye" cada persona. De esa manera, la concreción de los contenidos, el nivel de lo que se enseña, etc., difiere de un centro a otro. De hecho, esta diversidad es una de las dificultades principales que están presentes en el sistema educativo de

EpA actualmente, y que se manifiesta en aspectos tales como las pruebas VIA (valoración inicial del alumno). La falta de criterios comunes provoca que la experiencia "educativa" que puedan tener dos personas que vayan a centros diferentes (incluso en el mismo municipio) pueda resultar completamente distinta (Peréz-Gómez et al., 2020). Sin embargo, las investigaciones en educación han identificado que una de las variables que explican el éxito de aprendizaje es que el diseño, planificación e implementación del currículum utilice estrategias y recursos didácticos para lograr que todos los y las estudiantes alcancen las mismas metas de aprendizaje (y que estas metas estén basadas en máximos, no en mínimos). Ejemplos de actuaciones educativas de éxito los podemos encontrar en Flecha (2014) y en el documento *Actuaciones de éxito en escuelas Europeas* publicado por la Secretaría General Técnica, Centro de Publicaciones, del Ministerio de Educación y Ciencia.

Conexiones

En el libro *Principios y Estándares para la Educación Matemática* (editado por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES en España), el *National Council of Teachers of Mathematics* de USA publicaba a inicios de los años 2000 una serie de procesos clave para la enseñanza de las matemáticas: la resolución de problemas, el razonamiento y prueba, la comunicación, las conexiones y la representación. Estos procesos han ido implantándose en las propuestas curriculares que se han llevado a cabo en diferentes países en los últimos veinte años, y el caso de España no es excepción. La nueva ley de educación primaria (1 de marzo de 2022) dice que las competencias específicas se organizan en torno a cinco ejes fundamentales: resolución de problemas, razonamiento y prueba, conexiones, comunicación y representación, y (lo que no encontramos en otros lugares, ni tampoco en la investigación previa), destrezas socioafectivas. En el caso de la enseñanza de las matemáticas en la EpA la noción de competencia también ha ido ocupando lugar (sobre todo como resultados de las definiciones de *numeracy* y *numerate behavior* desarrollados por el *ALL Numeracy group* (Tout, 2000) y que hemos continuado usando en el NEG (Numeracy Experts Group) actualmente en 2022. En términos concretos, esto quiere decir que las personas tienen diferentes formas de expresar y poner en práctica esa competencia numérica / matemática, y es preciso diseñar entornos de aprendizaje para que dichas formas emerjan y supongan un enriquecimiento de la práctica de aprendizaje. Un ejemplo que ilustra este aspecto lo podemos encontrar en Gloria, una mujer que no había ido nunca a la escuela. En el centro de EpA esta señora asiste a clase para "aprender a restar." El maestro de matemáticas está explicando la resta "con llevadas", el algoritmo de la resta por valor posicional. Gloria no entiende por qué tiene que "pedir prestado", se hace un lio al pedir a las decenas del minuendo, o dar a las decenas del sustraendo. No sabe si usar el "número de arriba" o el "número de abajo" para completar la decena que necesita para poder restar 9 de 3 (le piden que a 23 le reste

19). Finalmente, cuando le preguntan, ella explica que no resta de esa manera; lo que hace es "ir -mentalmente- desde el 19 hasta el 23" (es decir, aplica el algoritmo de suma inversa, o compensa lo que falta desde el sustraendo hasta el minuendo). A través de los argumentos en el espacio de diálogo igualitario que se genera tanto Gloria como el maestro (y el resto de las personas de la clase) son capaces de conectar ambos algoritmos, y comprender de esa manera el funcionamiento de la resta de manera más profunda.

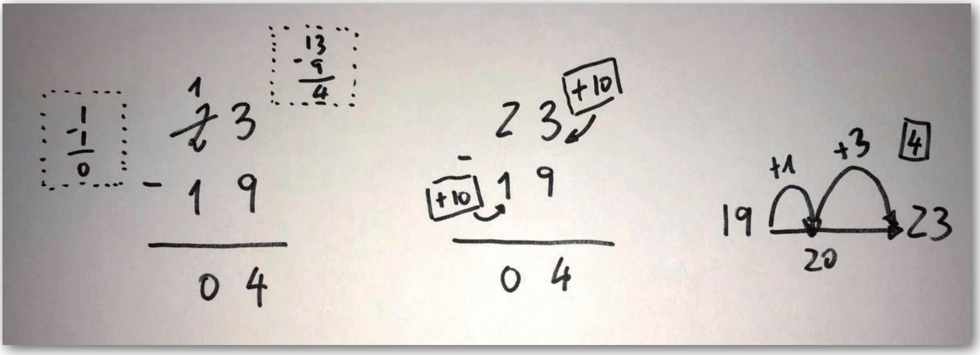


Figura 10. Ejemplo de tres formas diferentes de hacer la resta (dos -escolares- basadas en algoritmos de valor posicional, y otra como "suma inversa", o compensación de la diferencia entre minuendo y sustraendo -estrategia de cálculo mental

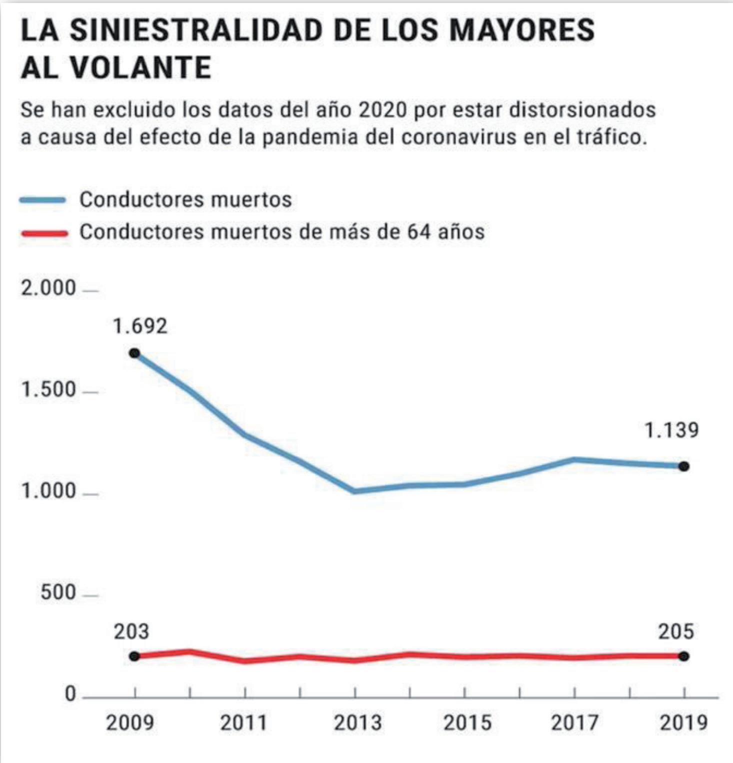
El pensamiento crítico

Otro aspecto clave de la enseñanza de las matemáticas en la EpA es la relación que tienen con el desarrollo y uso del pensamiento crítico. Un ejemplo que usó Pedro Plaza en una charla en 2021 ilustra esta idea: dice que, si queremos que una cantidad parezca más grande, se la puede comparar con una longitud, pero si queremos que parezca más pequeña, usamos entonces el volumen: un billón de monedas de un euro, una detrás de la otra, darían 600 vueltas a la Tierra, pero todas ellas cabrían en una caja cúbica de menos de 140 metros de lado. Darrell Huff (1993) en *How to llie with statistics* explica que en una empresa al jefe le interesará expresar el salario medio de sus trabajadores con la media aritmética (porque está muy afectada por los valores extremos), de manera que su salario queda "camuflado" por el peso que tiene el salario de los peones; mientras que si son los peones quienes tienen que protestar por sus bajos salarios preferirán siempre usar la moda (puesto que al ser más en la empresa, representa mejor su situación).

Ejemplo (procedente del blog http://www.malaprensa.com/)

En el blog "malaprensa.com" podemos leer:

> En un diario de marzo de 2022 podemos leer: "Tráfico falla con los conductores mayores. No reduce su siniestralidad con la intensidad que había previsto (un 10% en la pasada década). Tampoco se ha modificado el sistema para renovar el carné, el mismo con 65 que con 90 años." En la noticia se dice que de los 13 objetivos que tenía Tráfico en 2011, en 2020 (con datos de 2019) solo se habían cumplido 4. Se dice: "Uno de los que no se ha alcanzado era "recortar en un 10% la siniestralidad de los conductores mayores de 64 años." Eso obligaba a que, en 2019, se hubiese bajado a 185 fallecidos. La cifra real fue de 205, casi los mismos que se habían contabilizado en 2009."



Fuente: Del blog malaprensa.com

El autor del blog explica que estos datos no tienen en cuenta que entre 2009 y 2019 el número de conductores mayores de 64 ha cambiado. Recuperando datos, concluye lo siguiente:

Tabla

Variación en la mortalidad de conductores en España, 2009-2019.			
	2009	2019	Variación
Todos los conductores			
Conductores (millones)	25,73	27,32	6,18%
Fallecidos	1.692	1.139	-32,68%
Fallecidos/millón	65,76	41,69	-36,60%
Mayores de 64			
Conductores (millones)	2,86	4,38	53,15%
Fallecidos	203	205	0,99%
Fallecidos/millón	70,98	46,80	-34,06%

Fuente: Del blog malaprensa.com

Por tanto, aunque 203 y 205 sean dos cantidades muy similares, si las ponemos en contexto y las comparamos con el total de conductores mayores de 64 años que hay en 2009 y en 2019, la tasa de variación indica un descenso del 34,06% (mucho más que el objetivo del 10%).

El contexto

El ejemplo anterior nos lleva a otro aspecto importante en la enseñanza de las matemáticas en la EpA: el contexto. Las matemáticas siempre se dan en contexto, aparecen relacionadas con aspectos de la vida cotidiana (con el trabajo, con el hogar, con la familia, con la salud, etc.). Por tanto, cuando hay que pensar cómo diseñar secuencias didácticas para enseñar los objetos matemáticos que aparecen en la descripción de los contenidos del currículum en la competencia matemática y tecnológica, es importante tener en cuenta que el conocimiento matemático está siempre situado (en términos de Lave y Wenger -1991-). Muchos materiales curriculares de matemáticas (tanto de niveles iniciales, como de secundaria) utilizan libros de texto, recortes de periódico, prospectos de medicamentos, facturas de la luz o del gas, recetas de cocina, etc. Existen muchos materiales, y de calidad, que aprovechan situaciones de la vida cotidiana, eventos (p.e., unas elecciones, la planificación de la salida de fin de semana según la interpretación de la predicción del tiempo, etc.). Algunos autores, como Plaza et al., (2004), sostienen que el desplegamiento del currículum de matemáticas en la EpA tiene que ser de manera transversal, pensado a partir de situaciones. Flecha (2014), en base las contribuciones de la investigación internacional en educación sugieren que los materiales y recursos tienen que basarse en obras clásicas, o cuyos contenidos han sido reconocidos y validados por la comunidad científica internacional (en este caso, por la comunidad de matemáticas).

La inclusión de la voz de las personas participantes

Finalmente, queremos resaltar aquí la importancia de contar siempre con la voz de las personas adultas (usando las orientaciones del AD). Ellas son quienes van a participar en la clase, para aprender matemáticas, y como hemos visto, tienen no solo conocimientos ya de una gran cantidad de objetos matemáticos, sino que también tienen necesidades y motivaciones para usar las matemáticas en sus vidas. Concretar el currículum a través de situaciones, usar las matemáticas para modelizar la vida real, para tener herramientas de toma de decisiones, para resolver problemas (o crearlos como recurso de aprendizaje), tiene que contar con las contribuciones de las propias personas adultas. A través de sus argumentos, de sus diálogos, las matemáticas toman sentido (se crea sentido en torno a ellas), y esto es una condición *sine qua non* para incentivar un aprendizaje con comprensión.

Referencias

Albertí, M. (2010). Situated mathematical research: The interaction of academic and non-academic practices. *For the Learning of Mathematics*, *30*(2), 32-39.

Apple, M. W. y Beane, J. A. (Eds.). (2007). *Democratic schools: Lessons in powerful education*. Heinemann.

Benn, R. (1997). *Adults Count Too. Mathematics for Empowerment*. National Institute of Adult Continuing Education.

BOE (Boletín Oficial del Estado). (2009). Orden EDU/1622/2009, de 10 de junio, por la que se regula la enseñanza básica para personas adultas presencial y a distancia, en el ámbito de gestión del Ministerio de Educación (páginas 51252 a 51349). Gobierno de España. BOE-A-2009-10115.

Boistrup, L. y Keogh, J. (2017). The context of workplaces as part of mathematics education in vocational studies: Institutional norms and (lack of) authenticity. In Dooley, T. y Gueudet, G. (Eds.). (2017). *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME10, February 1 – 5, 2017). DCU Institute of Education y ERME.

Carlson, L. E. y Sullivan, J. F. (1999). Hands-on engineering: learning by doing in the integrated teaching and learning program. *International Journal of Engineering Education*, *15*(1), 20-31.

Carraher, T., Carraher, D. y Schlieman, A.D. (1988). Mathematics in the streets and in the schools. *British Journal of Developmental Psychology, 3,* 21-29.

CREA. (1993). *Numeracy*. UNESCO y Departament de Benestar Social de la Generalitat de Catalunya.

de Agüero, M. (2008). When women cook mole and men build a wall. In Colleran, N., Tipperary, N. R., y Safford-Ramus, K. (Eds.), *The Changing Face of Adults Mathematics Education: Learning from the Past, Planning for the Future*, (pp. 121-137). ALM.

Díez-Palomar, J. (2017). Mathematics Dialogic Gatherings: A Way to Create New Possibilities to Learn Mathematics. *Adults Learning Mathematics, 12*(1), 39-48.

Díez-Palomar, J. (2020). Dialogic mathematics gatherings: Encouraging the other women's critical thinking on numeracy. *ZDM, 52*(3), 473-487.

Díez-Palomar, J., y Cabré, J. (2015). Using dialogic talk to teach mathematics: The case of interactive groups. *ZDM, 47*(7), 1299-1312.

Díez-Palomar, J., Chan, M. C. E., Clarke, D. y Padrós, M. (2021). How does dialogical talk promote student learning during small group work? An exploratory study. *Learning, Culture and Social Interaction, 30*, 100540.

Díez-Palomar, J., Flecha, A., Lemos, L., Ortega, Mª A., Flecha, R., Giménez, F., Valls, R. y Escolà, FJ. (2002). *Matemáticas. Educación de personas adultas*. El Roure Editorial.

Evans, J. (2002). *Adults' mathematical thinking and emotions: A study of numerate practice*. Routledge.

Evans, J., Tsatsaroni, A. y Czarnecka, B. (2014). Mathematical images in advertising: Constructing difference and shaping identity, in global consumer culture. *Educational Studies in Mathematics*, *85*(1), 3-27.

Evans, J., Tsatsaroni, A. y Staub, N. (2007). Images of Mathematics in Popular Culture/ Adults' Lives: A Study of Advertisements in the UK Press. *Adults Learning Mathematics*, *2*(2), 33-53.

FitzSimons, G. E. (2004). An overview of adult and lifelong mathematics education. In *Keynote presentation at Topic Study Group 6, 10th International Congress on Mathematics Education ICME* (Vol. 10).

FitzSimons, G. E. (2013). Doing Mathematics in the Workplace: A Brief Review of Selected Literature. *Adults Learning Mathematics, 8*(1), 7-19.

FitzSimons, G. y Coben, D. (2009). Adult numeracy for work and life: Curriculum and teaching implications of recent research. In R. Maclean, D. Wilson, (eds) *International Handbook of Education for the Changing World of Work* (pp. 2731-2745). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-5281-1_179

Flecha, R. (1997). *Compartiendo palabras: el aprendizaje de las personas adultas a través del diálogo*. Paidós.

Flecha, R. (2000). *Sharing words: Theory and practice of dialogic learning*. Rowman y Littlefield.

Flecha, R. (2014). *Successful educational actions for inclusion and social cohesion in Europe*. Springer.

Freire, P. (1970a). *Pedagogy of the oppressed*. Continuum.

Freire, P. (1970b). The adult literacy process as cultural action for freedom. *Harvard Educational Review*, *40*(2), 205–225.

Freire, P. (1997). *A la sombra de este árbol*. El Roure.

Freire, P. (2000). *Pedagogy of freedom: Ethics, democracy, and civic courage*. Rowman y Littlefield Publishers.

Galligan, L. (2013). Becoming competent, confident and critically aware: Tracing academic numeracy development in nursing. *Adults Learning Mathematics: An International Journal*, *8*(1), 20–30.

García-Carrión, R. (2012). Out of the Ghetto: Psychological bases of dialogic learning. *International Journal of Educational Psychology*, *1*(1), 51-69.

Geiger, V. (2019). Using mathematics as evidence supporting critical reasoning and enquiry in primary science classrooms. *ZDM, 51*, 929-940.

Gelman, R. y Gallistel, C. R. (1986). *The child's understanding of number*. Harvard University Press.

Greeno, J., Eckert, P., Stuckey, S., Sachs, P. y Wenger, E. (1999). Learning in and for participation and society. In *How adults learn. Proceedings*. Georgetown University Conference Center, Washington DC.

Groenestijn, M. van (2002). *A gateway to numeracy. A study of numeracy in adult basic education*. Utrecht CD-B Pres.

Groenestijn, M. van y Lindenskov, L. (eds.) (2007). *Mathematics in Action, Communalities across differences. A handbook for teachers in Adult Education*. ALL Foundation, Netherlands.

Habermas, J. (1981). *The theory of communicative action: Volume 1: Reason and the rationalization of society* (Vol. 1). Beacon press.

Habermas, J. (1985). *The theory of communicative action: Volume 2: Lifeword and system: A critique of functionalist reason*(Vol. 2). Beacon press.

Harris, M. (2000). Women, mathematics and work. In Coben, D., O'Donoghue, J., y Fitzsimons, G. E. (Eds.), *Perspectives on Adults Learning Mathematics* (pp. 171-190). Springer.

Hoogland, K. (2018-2021). *Common European Numeracy Framework*. ERASMUS +. European Commission.

Hoogland, K., Auer, M., Díez-Palomar, J., O'Meara, N. y van Groenestijn, M. (2019). Initiating a common european numeracy framework. In *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Freudenthal Group; Freudenthal Institute; ERME. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02409293/document

Hoyles, C., Noss, R. y Pozzi, S. (2001). Proportional reasoning in nursing practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(1), 4-27.

Huff, D. (1993). *How to lie with statistics*. Norton y Company.

Hutchins, E. (2000). Distributed cognition. *International Encyclopedia of the Social and Behavioral Sciences. Elsevier Science*, *138*.

Jarvis, P. (2004). *Adult education and lifelong learning: Theory and practice*. Routledge.

Kamp, M. van der y Scheeren, J. (1996). *Functional literacy and numeracy skills of older adults in the Netherlands*. Max Goote Kenniscentrum, University of Amsterdam.

Kandel, E. R., Schwartz, J. H., Jessell, T. M., Siegelbaum, S., Hudspeth, A. J., y Mack, S. (Eds.). (2000). *Principles of neural science*. McGraw-Hill.

Keogh, J. J., Maguire, T. y O'Donoghue, J. (2019). *Adults, Mathematics and Work: From Research into Practice*. Brill Sense.

Lave, J. (1988). *Cognition in Practice*. Harvard University Press.

Lave, J. y Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge university press.

Lave, J., Murtaugh, M. y de la Roche, O. (1984). The dialectic of arithmetic in grocery shopping. In B. Rogoff, and J. Lave (Eds.), *Everyday Cognition* (pp. 67-95). Harvard University Press.

Lemos, L., Ortega, Mª A., Flecha, R., Giménez, F., Valls, R. y Escolà, FJ. (1982). *Matemáticas. Educación de personas adultas*. El Roure Editorial.

Luria, A. R. (1976). *Cognitive development: Its cultural and social foundations*. Harvard university press.

Martinez, A. (2018). *Teacher Perceptions of the Learning by Doing Program* (Doctoral dissertation).

Mead, G. H. (2015). *Mind, self, and society*. University of Chicago Press.

Noss, R. y Hoyles, C. (1996). *Windows of mathematical meanings: Learning cultures and computers*. Kluwer Academic Press.

O Campo, M. (2020). *Tertulias matemáticas dialógicas para el aprendizaje de las matemáticas en mujeres adultas no escolarizadas y sin titulación académica*. PhD Dissertation. University of Barcelona.

Pérez-Gómez, P. Díez-Palomar, J., Valls, R. y Sánchez Santamaría, J. (2020). Diseño de un modelo de evaluación y acreditación de competencias básicas en la población adulta. Informe Nacional. European Association for the Education of Adults y Ministerio de Educación. Gobierno de España.

Plaza, P. (2021). Las matemáticas en la educación de personas adultas. *Ciclo Matemàtiques per a persones adultes. CESIRE. https://www.youtube.com/watch?v=kWL2sSK-4eA*

Plaza, P., González, M.J., Montero, B. y Rubio, C. (2004). *Matemáticas críticas y transformadoras en la educación de personas adultas*. Aljibe.

Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton university press.

Resnick, L. B. (1991). Shared cognition: Thinking as social practice.

Resnick, L.B. (1987). Learning in school and out. *Educational Researcher, 16*, 13-20.

Rogoff, B. E. y Lave, J. E. (1984). *Everyday cognition: Its development in social context*. Harvard University Press.

Rosenthal, R. y Jacobson, L. (1968). Pygmalion in the classroom. *The urban review*, *3*(1), 16-20.

Safford-Ramus, K., Misra, P. K. y Maguire, T. (2016). *The Troika of adult learners, lifelong learning, and mathematics*. Springer.

Saló, L. (2020). *Problem solving and use of mathematics at work. Hanging around farmers and cabinetmarkers*. PhD dissertation. University of Helsinki.

Saxe, G. (1991). *Culture and Cognitive Development. Studies in Mathematics Understanding*. Lawrence Elrbaum Associates, Publishers.

Schank, R. C. (1996). Goal-based scenarios: Case-based reasoning meets learning by doing. In *Case-based reasoning: Experiences, lessons y future directions* (pp. 295-347). AAAI Press/ The MIT.

Scribner, S. y Cole, M. (1978). Literacy without schooling: Testing for intellectual effects. *Harvard Educational Review*, *48*(4), 448-461.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, *77*(1), 20-26.

Soler, M. y Flecha, R. (2010). Desde los actos de habla de Austin a los actos comunicativos: Perspectivas desde Searle, Habermas y CREA. *Revista signos*, *43*, 363-375.

Soto, I. y Rouche, N. (1995). Problemas de proporcionalidad resueltos por campesinos chilenos. *Educación matemática*, *7*(01), 77-95.

Tout, D. (2000). Numeracy Up Front: Behind the International Life Skills Survey. *ARIS Resources Bulletin*, *11*(1), 1–5.

Tout, D., Demonty, I., Díez-Palomar, J., Geiger, V., Hoogland, K. y Maguire, T. (2021). PIAAC Cycle 2 assessment framework: Numeracy In OECD, *The Assessment Frameworks for Cycle 2 of the Programme for the International Assessment of Adult competencies*, OECD Skills Studies (pp. 65-154). OECD Publishing. http://doi.org/10.1787/4bc2342d-en

Tuijnman, A., Kirsch, I. y Wagner, D. (1997). *Adult basic skills, innovations in measurement and policy analysis.* Hampton Press.

Turner, E. E., Gutiérrez-Varley, M., Simic-Muller, K. y Díez-Palomar, J. (2009). "Everything is math in the whole world": Integrating critical and community knowledge in authentic mathematical investigations with elementary Latina/o students. *Mathematical Thinking and Learning*, *11*(3), 136-157.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: Development of higher psychological processes*. Harvard university press.

Weber, M. (2012). *La ética protestante y el espíritu del capitalismo*. FCE. Fondo de Cultura Económica.

Wertsch, J. V. (1991). A sociocultural approach to socially shared cognition.

Withnall, A. (1995). Towards a definition of numeracy. In D. Coben (Ed.), *Proceedings of the inaugural conference of adults learning maths–A research forum* (pp. 11-17). ALM.

Wood, D., Bruner, J. S. y Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Child Psychology y Psychiatry y Allied Disciplines, 17(2), 89–100.* https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.1976.tb00381.x

Yasukawa, K., Rogers, A., Jackson, K. y Street, B. V. (2018). *Numeracy as Social Practice: Global and Local Perspectives*. Routledge.

Pensemos en unas matemáticas para todo el alumnado

Let's think about mathematics for all students

Bruno, A.[a]; Gil-Clemente, E.[b]; Gutiérrez, A.[c]; Jaime, A.[c]; Polo-Blanco, I.[d]
[a] *Universidad de La Laguna,*
[b] *Universidad de Zaragoza,*
[c] *Universidad de Valencia,*
[d] *Universidad de Cantabria.*

Resumen

En este capítulo se reflexiona sobre el aprendizaje matemático de alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo, centrándonos en tres tipologías: síndrome de Down, trastorno del espectro autista y alta capacidad matemática. Se presentan descripciones de lo que se conoce sobre las principales características de cada tipo de alumnado, en cuanto a sus procesos de aprendizaje de las matemáticas. Asimismo, se exponen algunas orientaciones metodológicas que pueden ayudar al profesorado a atenderlos y que se concretan a través de ejemplos.

Palabras clave: Necesidades educativas especiales, Matemáticas, Síndrome de Down, Trastorno del espectro autista, Alta capacidad matemática.

Abstract

In this chapter we reflects on the learning of mathematics by students with specific educational needs. We have focused on three types of students: Down's syndrome, autism spectrum disorder and high mathematical ability (or mathematical giftedness). We describe what is known about the main characteristics of each type of students' processes of learing mathematics. We also present some methodological guidelines that can help teachers to deal with these pupils and which are demostrated by means of examples.

Keywords: Special educational needs, Mathematics, Down syndrome, Autism spectrum disorder, Mathematical giftedness.

Introducción[2]

La Unesco (2017) presenta un mensaje, respecto a la equidad e inclusión en educación que resulta simple, pero a la vez muy rotundo: "Cada estudiante cuenta y cuenta por igual" (p. 12). Aunque se han hecho avances en los últimos años, es reconocible que esto muchas veces no se cumple y que en la práctica diaria es un objetivo complejo, en concreto, para un amplio grupo de estudiantes con necesidades especiales que requieren de apoyos educativos. Esos apoyos comienzan por ser identificados en las administraciones educativas y culminan en el aula. Así, en España, la ley educativa denominada *Ley Orgánica de Modificación de la LOE* (LOMLOE, 2020), en su artículo 71 señala que:

> Corresponde a las Administraciones educativas asegurar los recursos necesarios para que los alumnos y alumnas que requieran una atención educativa diferente a la ordinaria, por presentar necesidades educativas especiales, por retraso madurativo, por trastornos del desarrollo del lenguaje y la comunicación, por trastornos de atención o de aprendizaje, por desconocimiento grave de la lengua de aprendizaje, por encontrarse en situación de vulnerabilidad socioeducativa, por sus altas capacidades intelectuales, por haberse incorporado tarde al sistema educativo o por condiciones personales o de historia escolar, puedan alcanzar el máximo desarrollo posible de sus capacidades personales y, en todo caso, los objetivos establecidos con carácter general para todo el alumnado.

Focalizándonos en el aprendizaje de las matemáticas, el *Comité de Educación de Matemáticas* (CEMAT, 2021) también manifiesta que la educación matemática tiene que llegar a *todo el alumnado* y además que esta debe ser de calidad:

> La excelencia en la educación matemática requiere equidad, expectativas altas y un fuerte apoyo para todo el alumnado. En la equidad educativa se pueden identificar dos dimensiones: la imparcialidad y la inclusión. Es decir, asegurar que las circunstancias personales y sociales no constituyan un obstáculo para conseguir el máximo potencial educativo y garantizar un estándar mínimo para todo el alumnado. (CEMAT, 2021, p. 5)

Aunque los autores del citado documento no profundizan en el significado de esta declaración de principios, una interpretación de la cita nos lleva a plantear que, para alcanzar la excelencia en la educación matemática, se requiere que todo el estudiantado reciba una formación que le permita llegar al desarrollo máximo de sus capacidades matemáticas.

Otro aspecto resaltable en la ley educativa en España (LOMLOE, 2020), respecto al alumnado con necesidades especiales, es su inclusión en el aula ordinaria.

2. Para facilitar la lectura, en este capítulo usaremos el masculino genérico haciendo referencia tanto al género masculino como al femenino.

La inclusión es un reto importante para el que se requieren medios, tiempo y una planificación curricular adecuada. Por ejemplo, para el caso del alumnado con discapacidad intelectual, no tiene sentido una integración en el aula que implique la realización de las mismas actividades matemáticas que el resto de compañeros, sin ninguna adaptación, cuando estas realmente les supongan retos imposibles. O, por el contrario, que realicen siempre actividades diferenciadas, de modo que no compartan nada matemático con sus compañeros. La integración útil es aquella que entiende el aula como heterogénea, que adapta los contenidos a la necesidad especial, a la situación de cada estudiante y que se realiza a través de una coordinación estrecha entre el profesor del aula, el de apoyo (si fuera el caso) y la familia, o bien, siguiendo los principios del Diseño Universal para el Aprendizaje (Pastor, 2016). Esto, que parece obvio, no siempre ocurre.

La variedad de necesidades educativas especiales hace que las metodologías sean complejas de aplicar y materializar en el aula. Cada una de ellas demanda un acercamiento a las matemáticas con adaptaciones diferentes, pero todas ellas implican una toma de decisiones sobre qué matemáticas son fundamentales. Así, la discapacidad intelectual requiere abordar las dificultades con la memoria que suelen presentar y centrar esfuerzos en lograr la generalización de lo que aprenden, más allá de los ejemplos concretos. Con otra mirada, la alta capacidad matemática implica el planteamiento de actividades ricas con las que estos estudiantes sientan que pueden poner en funcionamiento su conocimiento matemático y que les supongan retos estimulantes.

Lo que mostramos a continuación son reflexiones sobre aprendizaje matemático en tres tipos de estudiantes con necesidades educativas especiales: síndrome de Down, trastorno del espectro del autismo y alta capacidad matemática. En los dos primeros tipos presentamos ideas para ayudarles a alcanzar un desarrollo pleno de sus capacidades y a avanzar lo máximo posible, aunque este avance sea lento. En las altas capacidades abordamos la problemática diametralmente opuesta del estudiantado con capacidades matemáticas superiores a la media. Estos estudiantes también tienen que recibir una formación que les permita progresar lo máximo posible en el aprendizaje de las matemáticas y hacerlo a su ritmo, por grande y rápido que sea ese avance. Presentamos ideas para que el profesorado pueda ayudarles en este proceso. En todos los casos, se persigue una educación matemática que contribuya a hacer de los estudiantes personas libres y con pensamiento propio.

Síndrome de down: buscando la comprensión

El síndrome de Down es una condición de discapacidad derivada de una circunstancia genética, la trisomía en el cromosoma 21, que lleva consigo limitaciones, que varían entre las personas que lo presentan, relativas al movimiento (lentitud, falta de sincronización de movimientos voluntarios e involuntarios), la memoria (escasa memoria a corto plazo), la atención (limitado campo de atención) y las emociones (más intensas y duraderas que en otras personas).

La Guía Internacional para la Educación de Estudiantes con Síndrome de Down, editada en 2020 por Down Syndrome International, recuerda además posibles problemas visuales y auditivos, problemas cardíacos y afecciones en el área del lenguaje y la comunicación. Tanto esta publicación, como los estudios recientes (Zimpel, 2016), subrayan la variabilidad individual y hablan de la fortaleza en la memoria a largo plazo, especialmente si va ligada a sentimientos y emociones.

A finales del siglo XX, los estudios sobre el aprendizaje de las personas con síndrome de Down se concentraron, esencialmente, en la adquisición del lenguaje y la alfabetización (Bird y Buckley, 2001), concluyendo que la mayoría tienen más dificultades con el cálculo que con la lectura y la escritura. Como consecuencia, se ha tendido a establecer objetivos muy limitados en el campo de las matemáticas, circunscritos a los números, que han implicado menos logros en el rendimiento escolar.

Monari (2002) subraya la exigencia de poner en juego una visión cultural de la matemática elemental que no la reduzca a puro cálculo. Se trata de un cambio de enfoque pertinente, no solo para los alumnos con síndrome de Down sino para la enseñanza en general: pasar de la aritmética de la vida cotidiana a un "nuevo árbol de las matemáticas" que incluya geometría, problemas, gráficos y álgebra [Figura 1]. Dejar así atrás una concepción limitada y jerárquica de las matemáticas, según la cual el dominio de la aritmética es el fundamento necesario para cualquier otro avance (Faragher y Gil-Clemente, 2019).

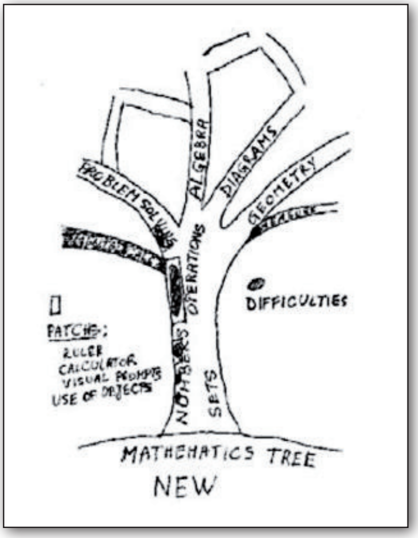


Figura 1. El árbol de las matemáticas (Monari, 2002)

En los últimos años, una serie de investigaciones han explorado esta línea de trabajo. Se ha mostrado, por ejemplo, que algunos adolescentes con síndrome de Down pueden trabajar con éxito áreas como álgebra y geometría analítica sin tener dominada la aritmética (Monari y Pellegrini, 2010). Paralelamente, se ha planteado la necesidad de abordar contenidos diferentes a lo puramente numérico, ligando el aprendizaje de las matemáticas a los modelos de calidad de vida (Faragher y Brown, 2005). Hemos explorado con éxito el aprendizaje de la geometría desde la primera infancia: su impacto en la consciencia del mundo de los niños, en la comprensión de números y medidas y su efecto en la mejora del lenguaje y la comunicación (Cogolludo-Agustín y Gil-Clemente, 2019; Gil-Clemente, 2020). No hemos abandonado el empeño por trabajar el número y su aritmética de una forma comprensiva fomentando un aprendizaje conceptual (Bruno y Noda, 2019; Tuset et al., 2019).

Todas estas investigaciones comparten una misma filosofía: pasan de ver las matemáticas como un obstáculo infranqueable para las personas con síndrome de Down a verlas como una oportunidad para superar sus limitaciones individuales, en particular en el ámbito intelectual. Enlazan con el ingenio educativo del padre de la educación especial Édouard Séguin (1812-1880) que proyectó materiales educativos basados en la geometría como medio para estimular la inteligencia, la acción y la voluntad (Gil-Clemente y Millán-Gasca, 2021). Poner a los estudiantes con síndrome de Down en contacto con retos propios de las matemáticas, les ayudará a superar las dificultades derivadas de una condición que tiene raíces biológicas, pero a la que se añade el desconocimiento de la sociedad. Es ineludible para investigadores y profesorado diseñar formas de acercárselas, con creatividad y optimismo sobre su capacidad de aprender.

Orientaciones para el diseño de actividades matemáticas para alumnos con síndrome de Down

1. *Superar el concepto clásico de funcionalidad/utilidad*

Predomina la idea de que, cuando enseñamos matemáticas a las personas con discapacidad intelectual, debemos centrarnos en aquello que va a resultarles útil en su presente y en su futuro. Sin embargo, las matemáticas no se enseñan únicamente por su utilidad, sino por su potente valor formativo para el ser humano. Si creemos que las matemáticas tienen una fuerza transformadora que hace frente a condicionamientos biológicos de partida y que son parte de nuestro acervo cultural, acercárselas es una forma efectiva de incluirles como miembros de pleno derecho de nuestra sociedad.

2. *Buscar siempre la comprensión*

A través de la comprensión, las personas damos sentido a nuestro mundo; es un proceso no necesariamente progresivo, en el que se van añadiendo formas de comprensión, corpórea, oral, alfabetizada, que intervienen también en la comprensión de las matemáticas (Egan, 1998). Las personas con síndrome de Down tienen una forma de estar y entender la realidad, desde la que hay que partir para construir las propuestas de enseñanza. Es necesario no infravalorar lo que son capaces de entender, proponerles tareas ricas, con sentido humano, que movilicen esta comprensión. En el caso de la aritmética se puede realizar un acercamiento favoreciendo el significado de la construcción del sistema de numeración decimal que permita al mismo tiempo introducir las operaciones (Bruno y Noda, 2019), pero fomentando el uso de la calculadora si los algoritmos les resultaran costosos. Es interesante plantearles retos matemáticos insertos en relatos y cuentos que trabajen con el mundo de la fantasía y la imaginación (Gil-Clemente, 2022; Millán-Gasca y Vale, 2021).

3. *Ampliar el campo de los contenidos elegidos para el currículo dando espacio a la geometría*

Las matemáticas implican una sólida red conceptual en la que unos conceptos ayudan a comprender otros. La geometría (forma) es la aliada de la aritmética (números): sumar, restar y comparar números está íntimamente ligado a componer, descomponer y comparar cuerpos, superficies y segmentos. Las dificultades con la aritmética de las personas con síndrome de Down se agudizan cuando estas conexiones no se manifiestan en clase. Aunque es necesario animar nuevos estudios que exploren la naturaleza y origen de estas dificultades, en las aulas tenemos la oportunidad de construir alternativas. La geometría es uno de los campos más fértiles desde los que comenzar el trabajo con las matemáticas desde la escuela infantil (Cogolludo-Agustín y Gil-Clemente, 2019). En los niños con síndrome de Down, la intuición geométrica es superior a la aritmética y esto es razón suficiente para introducirles en las matemáticas a partir de ella.

4. *No eludir el paso a la abstracción en las actividades y tareas que proponemos*

La discapacidad intelectual es identificada a menudo con la falta de pensamiento abstracto, a la que se atribuye la raíz de las dificultades de algunas de estas personas para aprender matemáticas. Sin embargo, sorprendentemente, Zimpel (2016) argumenta que el pensamiento abstracto es uno de los puntos fuertes de las personas con síndrome de Down y enmarca en esta hipótesis los éxitos de Monari (2012) con el álgebra frente a las dificultades con la aritmética. Concentrar los esfuerzos en entender una idea general que englobe muchos casos concretos puede ayudar a compensar el limitado campo de atención del que se tiene constancia en las personas con síndrome de Down. El horizonte de las experiencias visuales, motoras y táctiles que las hace interesantes y ricas en significado, es el espacio geométrico (abstracto). Por ejemplo, ver estrellas, pinchar con un punzón puede llevar a los niños a pensar en el punto. Estas ideas nos animan a preparar actividades para los niños con síndrome de Down que comiencen poniendo en juego todos los sentidos, para, a partir de ellas, avanzar hacia otras más abstractas y abrir así paso al simbolismo de las cifras y las letras.

Un plan en siete lecciones-modelo entrelazando forma y número para alumnado de 10-14 años

En la Tabla 1 resumimos un plan de siete lecciones –no tienen por qué ser impartidas secuencialmente– que ilustra las cuatro orientaciones metodológicas sugeridas en el epígrafe anterior (Cogolludo-Agustín, Gil-Clemente y Millán-Gasca, 2021): trabajan los conceptos de manera independiente, pero interrelacionada; explotan alguna relación crucial entre geometría y aritmética elementales; comienzan entrando en contacto con los conceptos-objetivo a través del cuerpo y los sentidos y, a partir de ellas, exploran formas de construir ideas más abstractas; están ambientadas en un tema de fantasía elegido para que conecte y dé un "sentido humano", una narración, a las tareas que se proponen.

Las lecciones que proponemos están basadas en la investigación desarrollada con éxito con un grupo de niños con síndrome de Down entre 10 y 14 años, en un contexto de tiempo libre extraescolar. Este alumnado había trabajado en los dos años anteriores con un programa de geometría basado en tareas sobre conceptos y relaciones primitivas: punto, línea recta, plano, "estar entre", "pasar por", tomadas de la axiomática de Hilbert (Cogolludo-Agustín y Gil-Clemente, 2019).

Tabla 1. Siete lecciones de geometría para alumnado con Síndrome de Down (Cogolludo, Gil-Clemente y Millán-Gasca, 2021)

Título de la lección	Contenido aritmético	Base geométrica
1.Trabajando con geoplanos	Contar	Punto
2. Clasificando polígonos	Significado cardinal de los números	Punto, segmento
3. Construimos paredes	Producto de dos números	Rectángulo: lados y área
4. Cortamos una cinta	Fracciones unitarias	Razón geométrica (mitad y cuarto)
5. Repartimos el pastel	Fracciones unitarias/ Proporcionalidad aritmética	Razón geométrica (mitad y cuarto)
6. ¡Qué alto es mi árbol!	Medida de longitudes	Suma de segmentos
7. ¿A qué distancia está mi planeta?	Medida de longitudes	Línea recta suma de segmentos

En lo que sigue, exponemos, a modo de ejemplo, dos grupos de actividades incluidas en las lecciones 4-5 y 6-7, respectivamente. Se observará que la última actividad del segundo grupo se liga a las actividades del primer grupo: es un ejemplo de la necesidad de cuidar la interconexión en la organización de las sesiones para introducir acertadamente la interconexión entre los conceptos.

Proporcionalidad aritmética y proporcionalidad geométrica

Entendiendo las fracciones como una forma de comparar, ligaremos la proporción geométrica con la proporción aritmética, utilizando fracciones 1/*n* (inversos de los números naturales, repartir en *n* partes) a partir de los dos ejemplos fundamentales, presentes continuamente en la historia de la medida (Kula, 1980) «mitad» y «cuarta parte». La secuencia didáctica que se plantea es la siguiente:

Actividad 1. Los niños comienzan jugando con el concepto de «mitad» en su entorno. Obtienen la mitad de un palo, la mitad de una barra de regaliz o la mitad de diferentes mitades de rebanadas de pan. En todos los casos comparan la mitad con el objeto entero. Toman conciencia de cómo las dos mitades en las que partimos los objetos son idénticas y juegan a reconstruir el objeto a partir de las dos mitades.

Actividad 2. Se contextualiza la tarea en un viaje por el espacio donde unas cintas serán las cuerdas galácticas que les ayudarán a explorar el espacio sin soltarse de la nave. Los estudiantes obtienen la mitad exacta de algunas longitudes. Para ello se proporcionan a cada uno dos cintas. Una de ellas la doblarán en dos partes iguales y la cortarán. Realizarán un doble proceso: el primero, comprobar que las dos cintas tienen la misma longitud, poniendo una mitad al lado de otra [Figura 2a]*; y el segundo, recomponer la cinta inicial a partir de las dos mitades iguales* [Figura 2b].

Figura 2a y 2b. Actividad sobre comparación de longitudes y recomposición de la unidad

Actividad 3. A partir de esta experiencia sensorial (visual y táctil), los estudiantes se introducen en la notación (representación simbólica) de la fracción ½. En la representación ligamos siempre las dos longitudes que estamos comparando, de manera que la comparación geométrica ayude a comprender esta representación simbólica. De esta manera, en actividades posteriores se puede trabajar con la idea de fracción.

Actividad 4. El proceso realizado con las longitudes y con la mitad, se puede ampliar fácilmente en dos direcciones que ayudarán a generalizar las ideas. En primer lugar, podemos *obtener la cuarta parte de la longitud y compararla con la mitad y con la longitud entera. Es una tarea que se relaciona fácilmente con el contexto elegido y es una forma de introducir a los niños en la idea de infinito (podemos cortar sucesivamente cada objeto por la mitad). En segundo lugar, se puede trabajar con la superficie (repartiendo tortas galácticas entre los viajeros con forma circular…). De esta manera los estudiantes comprueban de otra manera que las dos mitades son iguales (por superposición) y esto les anima a recomponer el objeto inicial* [Figura 3a y 3b]. *Aparecen de forma natural relaciones entre los conceptos que llevan a los niños a pensar y a descubrir: "se puede hacer la mitad de la mitad"; "con dos medios círculos hago un círculo"; "yo lo hago con cuatro"…*

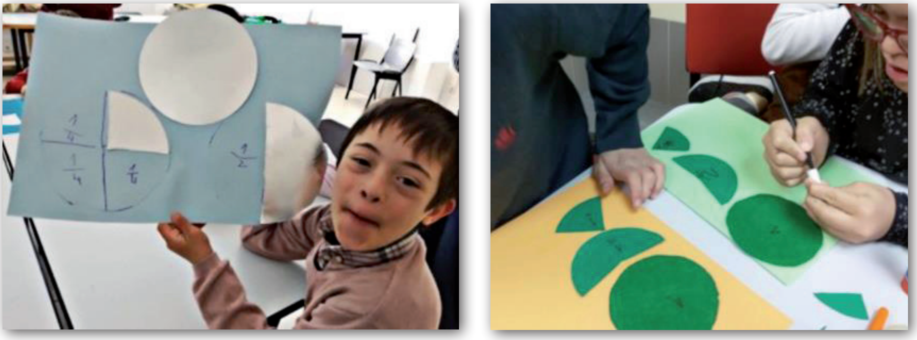


Figura 3a y 3b. Comparación de superficies y representación simbólica usando fracciones

Actividad 5. Las regletas de Cuisenaire ayudan a transitar desde la proporcionalidad geométrica a la aritmética. Trabajamos primero las ideas anteriores con las regletas, hasta que los estudiantes vean con claridad cómo son dos longitudes que están en relación ½ [Figura 4a]. *Como ya conocen el valor numérico de cada regleta, la relación ½ entre números aparece también de forma natural: 2 y 4; 3 y 6; 4 y 8; 5 y 10 están en esa relación* [Figura 4b].

Figura 4y 4b. De la proporcionalidad geométrica (razones entre sólidos) a la aritmética (razones entre números naturales)

Introducción a la medida de las longitudes

La siguiente secuencia de cinco actividades [Figura 5a, 5b, y 5c] constituye un itinerario para llegar a medir longitudes, en este caso la distancia de una nave espacial a cualquiera de los planetas, siguiendo las dos fases indicadas por Alexandrov, Kolmogorov y Laurentiev (2014): (1) fase geométrica: las tres primeras actividades ilustran la identificación del segmento a medir, la elección del "segmento unidad" y el recubrimiento del segmento con el segmento de referencia y (2) fase aritmética: las últimas dos actividades consisten en contar el número de segmentos-medida utilizados y sembrar una inquietud sobre la precisión que preludia a la introducción de las fracciones como resultado de la medida.

Actividad 1. Imaginar la línea recta que une dos puntos (la nave y el planeta). Para lograrlo es útil haber trabajado previamente con los conceptos primitivos geométricos de punto y línea.

Actividad 2. Elegir un segmento-medida: la vara-galáctica. Los niños comprobarán que todas las varas son iguales (congruencia geométrica).

Actividad 3. Cubrir la línea recta imaginaria que une la nave con el planeta con la vara galáctica y comparar las dos longitudes (distancia y vara-medida).

Actividad 4. Contar las varas galácticas que se necesitan para unir los dos puntos anteriores. Este número es la medida de la distancia.

Actividad 5. Utilizando la idea de mitad trabajada en la secuencia anterior, se puede ajustar la medida (media vara-galáctica) y utilizar este concepto en un nuevo contexto.

Figura 5a, 5b y 5c. Proceso de medida

Más allá de las propias capacidades naturales…: la fuerza transformadora de las matemáticas

Por último, queremos resaltar que el trabajo con las matemáticas puede ayudar a superar los condicionantes biológicos de partida de los estudiantes con síndrome de Down. Ya se ha indicado anteriormente las dificultades que tienen las personas con síndrome de Down con el uso del lenguaje. Sin embargo, en el transcurso de la puesta en práctica de estas actividades, hemos escuchado frases como: “con dos círculos puedo hacer otro”, “voy a hacer cuatro trozos con la mitad de la mitad”, “mi nave está a tres varas galácticas de Marte”, “pues la mía está a cuatro varas y media de Plutón”... Frases que son precisas, ricas y llenas de significado. Frases propias del lenguaje matemático, que ayudan a las personas con síndrome de Down a expresar mejor sus ideas y, por tanto, su pensamiento. Muestran el efecto de la fuerza transformadora que las matemáticas tienen en las personas que se acercan a ellas y por lo que merece la pena buscar caminos para lograr este acercamiento.

Trastorno el espectro autista: la búsqueda de las acciones y de la comprensión

El trastorno del espectro autista (TEA) es una disfunción neurológica crónica de base genética que se manifiesta con dificultades en la interacción social y la comunicación y con un repertorio restringido de intereses y comportamientos (DSM-5; American Psychiatric Association, 2013). La asociación Autism-Europe, con datos de 2015, apunta a una prevalencia de aproximadamente 1 caso de TEA por cada 100 nacimientos, con un considerable aumento de casos diagnosticados en los últimos años. El Centers for Disease Control and Prevention en Estados Unidos establece que aproximadamente el 31% de los niños con TEA presentan discapacidad intelectual severa (CI <70), el 25% discapacidad moderada (CI entre 71-85) y un 44% está en un rango superior (CI >85). Aunque el propio espectro hace que la diversidad de este alumnado sea especialmente amplia, un porcentaje importante de ellos va a requerir apoyo educativo y las dificultades que presentan, con y sin discapacidad intelectual, en el aprendizaje de las matemáticas se deben a sus deficiencias en habilidades asociadas al funcionamiento ejecutivo y al lenguaje.

La función ejecutiva está relacionada con acciones cognitivas como la planificación, la organización, la memoria de trabajo, la flexibilidad mental, la atención y el control de impulsos. Estas acciones son básicas en matemáticas y, muy especialmente, en la resolución de problemas. Una débil comprensión del lenguaje puede afectar negativamente en el trabajo matemático, por ejemplo, para comprender el significado de conceptos, usar términos matemáticos o dar sentido a los textos de los enunciados de problemas. Por otra parte, hay rasgos que presentan muchas personas con TEA asociados a buen dominio de lo visual y una atención excepcional hacia los detalles que pueden favorecer la adquisición de contenidos matemáticos.

La investigación sobre aprendizaje matemático de estudiantes con TEA ha puesto su interés en desarrollar propuestas formativas que faciliten las habilidades cognitivas funcionales y la comprensión lingüística, mostrándose efectiva aquellas que se apoyan en representaciones visuales. (Rockwell et al., 2011; Bae, 2013).

Orientaciones para el diseño de actividades matemáticas para estudiantes con TEA

Tareas estructuradas en pasos. Para poner una menor exigencia en la memoria de trabajo, a la hora de realizar tareas matemáticas con estudiantes con TEA, se recomienda proporcionarles tareas estructuradas en pequeños pasos, con instrucciones cortas. Esto apoya sus dificultades en la planificación de su actuación. Utilizar una hoja de papel que sirva de borrador, en la que puedan realizar las anotaciones necesarias, evita la retención de datos mentalmente (Oswald et al., 2016). Con este mismo fin, pueden requerir leer los enunciados (o pedir que se los lean) varias veces, tantas como el estudiante lo requiera.

Apoyos para la comprensión del lenguaje. Para proporcionar apoyos en la comprensión verbal y lectora, puede resultar útil acompañar los enunciados y las instrucciones con pictogramas. Es importante también poner enunciados con poca carga lingüística y con frases sencillas.

Temas de interés. Los estudiantes con TEA suelen presentar dificultades para comprender situaciones en las que se describen temáticas desconocidas (Bae et al., 2015). Merecen atención particular las situaciones en las que aparece, implícita o explícitamente, alguna norma o habilidad social. Por ejemplo, en las situaciones de manejo de dinero, se requiere que hayan desarrollado un conocimiento con un componente social, como es la asignación de valor a los objetos. En contrapartida, un rasgo característico de las personas con TEA es que suelen presentar un foco de interés hacia determinados temas, el cual puede ayudar a contextualizar problemas, con el fin de ayudarles a motivarse o implicarse en su resolución (Polo-Blanco, González y Bruno, 2021). Mediante el uso de problemas de matemáticas relacionados con sus intereses y/o con su vida cotidiana, aprenden a buscar sentido a las matemáticas y cuándo y por qué usarlas.

Apoyo visual. Grandin (1995) resalta las habilidades de este colectivo frente a estímulos visuales y afirma la existencia de un pensamiento visual, es decir, una facilidad para pensar y razonar por medio de imágenes y sistemas visuales. La autora recomienda que los profesores de estudiantes con TEA adapten el entorno y los métodos de enseñanza a este modo de comunicación. Es fundamental, por tanto, que los educadores detecten estas y otras fortalezas para poder trabajar con los puntos fuertes de este alumnado (Mesivob y Howley, 2010). Teniendo esto en consideración, se han diseñado varios programas para niños con TEA que se apoyan en sus habilidades y así compensar los déficits propios del trastorno. El programa TEACCH, por ejemplo, les enseña a seguir horarios visuales, proporciona rutinas estructuradas y predecibles, y organiza el entorno y las tareas utilizando indicadores visuales, con el fin de promover el trabajo independiente (Mesivob y Howley, 2010). En la Figura 6 mostramos una síntesis de las orientaciones desarrolladas anteriormente.

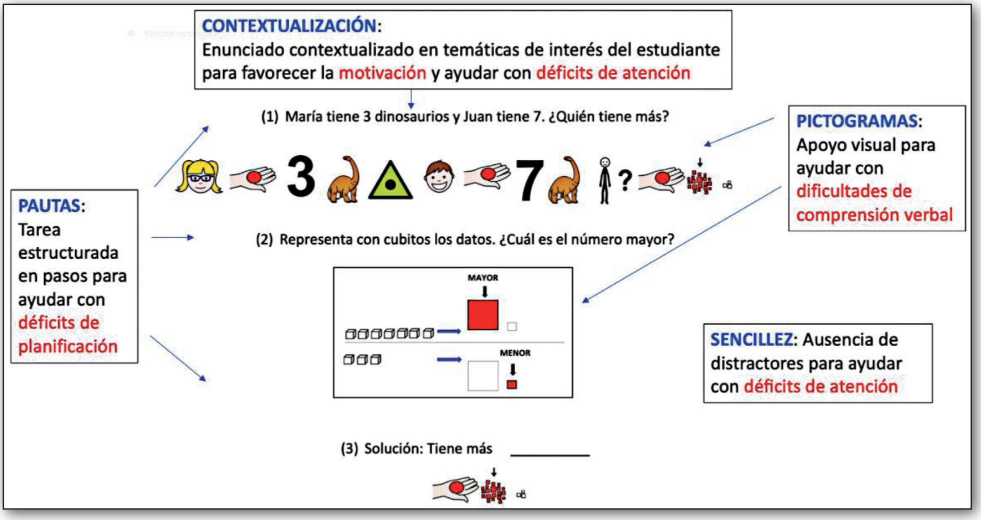


Figura 6. Síntesis de las orientaciones didácticas propuestas para alumnado con TEA

Propuestas prácticas para la enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas

Algunas metodologías utilizadas en el aprendizaje de la resolución de problemas en alumnado con dificultades se han mostrado beneficiosas también en alumnado con TEA. Se muestran a continuación tres ejemplos de instrucción en las que hemos trabajado: la Instrucción Basada en Esquemas, el Modelo Conceptual y el Modelo CRA.

Instrucción Basada en Esquemas

La denominada Instrucción Basada en Esquemas (SBI, por sus siglas en inglés) presenta una hoja de trabajo que incorpora esquemas visuales para modelizar la situación del problema, de lo que se pueden beneficiar al alumnado con TEA dado su buen procesamiento visual. Además, incluye una lista de instrucciones de las fases de resolución, semejante a las de Polya (1945), que compensa sus dificultades con la planificación. Algunas adaptaciones de la instrucción SBI que se han mostrado beneficiosas con estudiantes con TEA (Polo-Blanco et al., en prensa), incluyen una lista de pautas en la que se acompañan las acciones con pictogramas para ayudar con las dificultades de comprensión verbal [Figura 7, derecha].

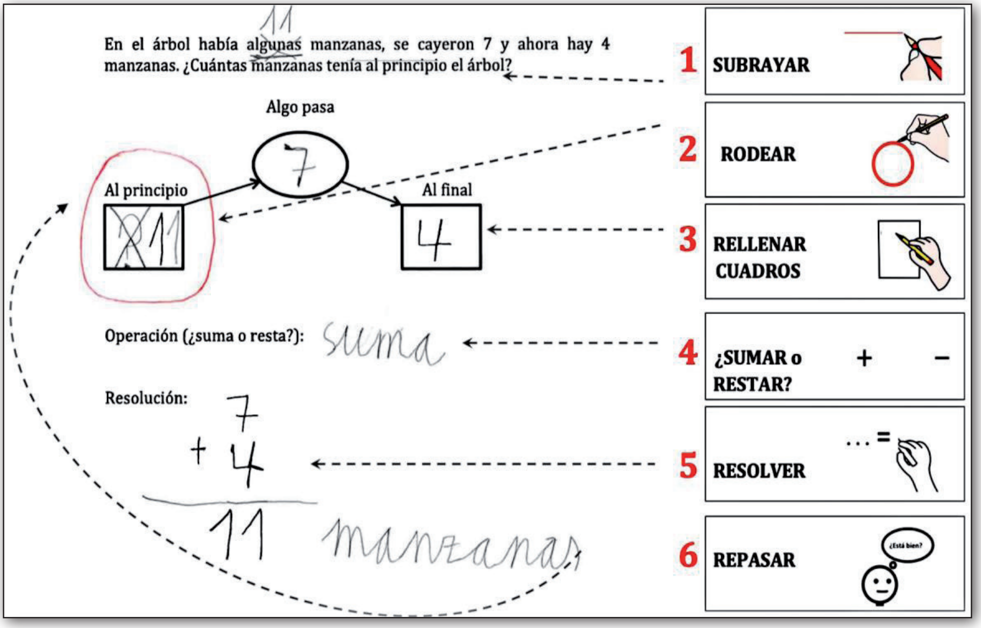


Figura 7. Instrucción Basada en Esquemas

Modelo Conceptual (COMPS)

Otra metodología, que tiene aspectos comunes con la anterior, que se ha investigado con alumnado con dificultades se denomina Modelo Conceptual (COMPS). Hemos adaptado también este modelo a alumnado con TEA (Polo-Blanco, Van Vaerenbergh, Bruno y González, 2022) para compensar algunas de las dificultades mencionadas y apoyarse en los puntos fuertes del trastorno, como el buen procesamiento visual.

En el ejemplo de la Figura 8 mostramos la respuesta de un estudiante con diagnóstico TEA (14 años) a una tarea de instrucción basada en el Modelo Conceptual COMPS, para la enseñanza de resolución de problemas de multiplicación de combinación ("Tengo 2 camisetas y 4 pantalones. ¿Cuántas combinaciones distintas de ropa puedo hacer en total?"). En la mesa tiene una hoja con un listado de instrucciones [Figura 8, derecha], a través de pictogramas, que le ayudan a seguir los pasos para resolver los problemas. Estos se le proponen en una ficha organizada con los mismos pasos [Figura 8, izquierda]. En primer lugar, se deja un espacio para que escriba o dibuje la información del enunciado. A continuación, debe colocar los números dados en unos recuadros en los que se indica la relación multiplicativa con los datos dados en el enunciado. Esto ayuda a distinguir si el problema es de multiplicación o de división. Pues puede darse el caso en que en el enunciado los datos sean "cuantos de" y "total de combinaciones". Dicho modelo combina la representación pictórica con el uso de esquemas y la identificación de la operación.

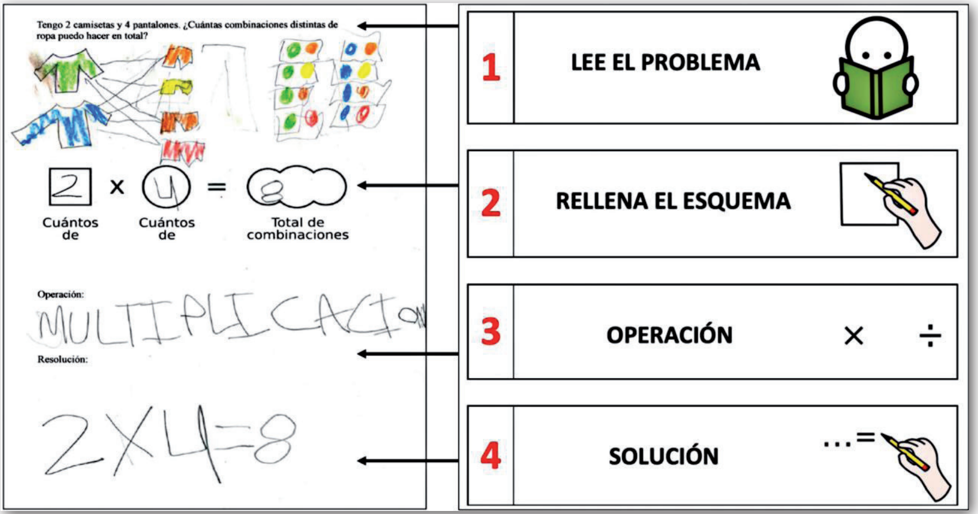


Figura 8. Instrucción siguiendo el Modelo Conceptual (COMPS)

El la Figura 9 mostramos la respuesta del mismo estudiante en la que utilizamos la temática de los molinos, por ser este su foco de interés. Además, aprovechamos el gusto de este estudiante por el dibujo para vincular su propio modelo de la situación, con el esquema y la identificación de la operación. En este caso el problema es el siguiente: "En un campo hay 5 molinos y cada molino tiene 3 aspas. ¿Cuántas aspas hay en total?"

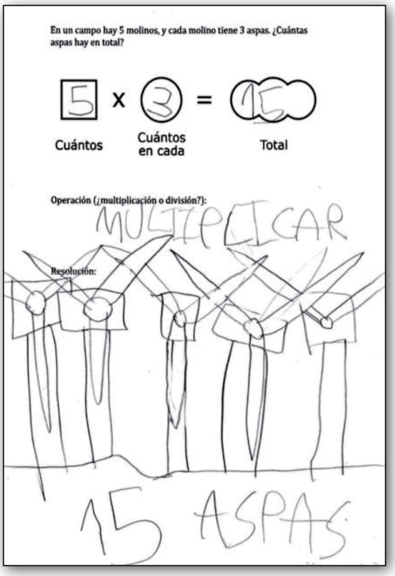


Figura 9. Respuesta de un estudiante con TEA a un problema en su contexto de interés

El alumnado con TEA puede beneficiarse del aprendizaje de las matemáticas mediante la resolución de problemas, a través de contextos, situaciones y modelos reales. Los conocimientos procedimental y conceptual no se bifurcan; contextos y modelos proporcionan significado a medida que los estudiantes aplican procedimientos hacia una solución.

Secuencia Concreto Representacional Abstracto

Otra forma de enseñanza que se ha mostrado útil en alumnado con dificultades de aprendizaje es la denominada CRA (Concreto-Representacional-Abstracto). Esta metodología introduce secuencialmente las etapas (1) concreta: en la que se manipulan objetos físicos, (2) representacional: donde se utilizan modelos e imágenes que representan los objetos y (3) abstracta: en la que se usan números y símbolos. Este tipo de secuenciación se ha mostrado beneficiosa para enseñar problemas verbales y otros conceptos matemáticos a estudiantes con TEA. En la Figura 10ª y 10b mostramos dos situaciones en la etapa concreta de manipulación con objetos y pictomaterial adaptado para la resolución de problemas de división (Polo-Blanco y otros, 2019).

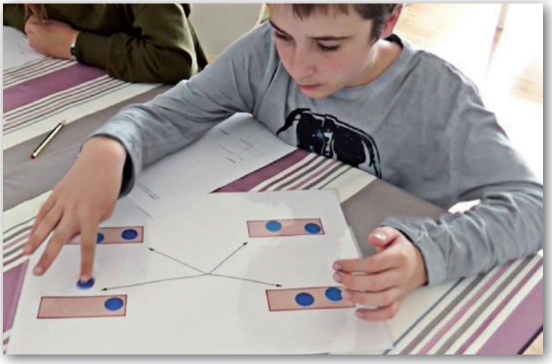


Figura 10a y 10b. Resolución de problemas de reparto mediante material y pictomaterial (estudiante con TEA)

Alta capacidad matemática: potenciar el gusto por las matemáticas

En esta sección se presentan primero ideas teóricas sobre la alta capacidad general y sobre la alta capacidad matemática (en adelante, ACM) en particular. Después, se muestran dos ejemplos de actividades concretas, que responden a la propuesta teórica, adecuadas para estudiantes con ACM (también denominados estudiantes con *talento matemático*).

Tourón (2019), refiriéndose al talento general, ayuda a comprender, en particular, las características y necesidades de los niños con ACM: "potencial no significa rendimiento... el talento no se desarrolla de manera espontánea", es decir, que el estudiantado con ACM no alcanzará su máxima capacidad si el profesorado no pone medios para que puedan ganar la experiencia y práctica necesarias. "Precisan ayudas educativas específicas... la capacidad sólo se transforma en talento con trabajo y si se dan las medidas educativas adecuadas", es decir, que es necesario realizar previsiones en las programaciones del profesorado que incorporen una atención diferenciada. Estas ideas son apoyadas actualmente por numerosos estudiosos de la alta capacidad general, como Gagné, Pfeizzer y Renzulli y la ACM, como Diezmann, Leikin, Pitta-Pantazi o Jaime y Gutiérrez.

El alumnado con ACM es capaz de resolver tareas matemáticas complejas para estudiantes ordinarios de su edad o nivel educativo y pueden hacerlo utilizando métodos no usuales y/o estableciendo conexiones entre conocimientos que han adquirido previamente y la tarea actual. Los estudiantes con ACM "se sitúan en un nivel más alto que sus pares, desde el cual 'visualizan' el constructo matemático inferior y se mueven por él cómodamente" (Jaime y Gutiérrez, 2014, p. 155).

La actividad en torno a estudiantes con ACM se debe centrar, entre otros aspectos, en la identificación y la atención en el aula. En relación con el primero, es necesario diferenciar entre estudiantes con alto rendimiento en matemáticas y estudiantes con ACM. Los primeros son los que obtienen buenos resultados escolares, pero no siempre tienen ACM. Pallardó (2021) observó que la motivación para resolver problemas de los estudiantes con alto rendimiento en matemáticas se basa en obtener una recompensa académica, es decir, calificaciones altas, prefiriendo que los profesores les planteen ejercicios que puedan resolver aplicando directamente lo que han aprendido en clase. Sin embargo, Pallardó también observó que la motivación del alumnado con ACM se basa en disfrutar resolviendo los problemas y prefieren que sus profesores les planteen problemas que les supongan un desafío. Algunos estudiantes con ACM son también de alto rendimiento en matemáticas, pero otros suelen obtener calificaciones más bajas, incluso mediocres, cuando no hacen los deberes escolares porque les resultan demasiado fáciles y repetitivos.

En este texto, usaremos el término *tarea* en sentido amplio (actividades exploratorias y cualquier otro tipo de actividad matemática de aula). Diezmann (2005) y Diezmann y Watters (2002) consideran esencial que las tareas planteadas a los estudiantes con ACM les supongan un reto y proponen cuatro tipos de tareas adecuadas para ello: (1) tareas retadoras que requieran el uso de destrezas metacognitivas; (2) tareas que les lleven más allá de lo que se espera de su grupo de edad o curso; (3) investigaciones abiertas; (4) tareas interesantes para estos estudiantes. Por otra parte, dichos autores también indican que los estudiantes con ACM deberían poder intercambiar ideas y trabajar con compañeros de su mismo nivel intelectual e interés por las matemáticas.

Al diseñar tareas para aulas con alumnado con ACM, son importantes los aspectos matemáticos (contenidos, complejidad del problema, etc.) y los cognitivos, en particular el tipo de razonamiento matemático preferido por ellos. Krutetskii (1976) muestra la existencia de tres tipos de pensamiento matemático: geométrico (preferencia por lo visual y gráfico), analítico (preferencia por lo lógico-verbal) y armónico (uso de una forma u otra según interese). Con frecuencia se minusvalora el potencial y la forma de razonar de los pensadores geométricos cuando, en las clases, se presentan los contenidos con un enfoque aritmético-algebraico o se rechazan resoluciones visuales, aunque sean más simples y elegantes que las numéricas. Esto hace que las clases resulten poco adecuadas y atractivas para los pensadores geométricos, incluso teniendo ACM, y algunos de estos fracasan académicamente (Diezmann y Watters 2002). Es necesario, por tanto, que el profesorado promueva y valore positivamente tanto el pensamiento analítico como el visual y que incluya en sus clases problemas o actividades que puedan ser resueltos mediante procedimientos de cada tipo o, preferiblemente, de ambos.

La *creatividad matemática* se considera un componente necesario de la ACM. En este texto utilizamos la definición de Leikin y Lev (2013) o Pitta-Pantazzi et al. (2011). Para estos autores, la creatividad matemática está formada por tres componentes, fluidez, flexibilidad y originalidad. La *fluidez* se refiere a la agilidad en la realización de actividades matemáticas, mediante un flujo ágil de ideas y asociaciones de conocimientos; se valora teniendo en cuenta la cantidad de soluciones correctas distintas producidas por un estudiante en una cantidad prefijada de tiempo. La *flexibilidad* se manifiesta cuando un estudiante cambia de enfoque durante la resolución de un problema porque identifica una forma más eficaz de resolverlo, se queda bloqueado, etc.; se evalúa teniendo en cuenta la cantidad de soluciones correctas diferentes a un problema que aporta el estudiante. La *originalidad* se muestra al producir soluciones siguiendo procedimientos diferentes a los usuales; se valora teniendo en cuenta las distintas resoluciones de un problema producidas por un grupo de estudiantes y diferenciando las menos frecuentes. Leikin y Lev (2013) proponen desarrollar o evaluar la creatividad matemática del estudiantado utilizando *tareas de múltiples soluciones*, que son problemas abiertos que admiten varias resoluciones y que permiten poner de manifiesto los tres componentes de la creatividad.

Al diseñar tareas adecuadas para estudiantes con ACM, es necesario aplicar las propuestas anteriores a las clases reales, en las que conviven estudiantes con diversos intereses y capacidades matemáticas. No podemos ignorar el punto de vista del profesorado, quienes, en ocasiones, preparan para sus alumnos con ACM una programación diferente de la ordinaria, que les supone una sobrecarga de trabajo. Sin embargo, para Castro et al., (2015) es posible preparar adaptaciones curriculares para estudiantes con ACM de manera que trabajen los mismos contenidos que sus compañeros, pero con variaciones adecuadas a su mayor capacidad matemática. Estos autores proponen cuatro formas de reformular las tareas ordinarias de las clases de matemáticas para convertirlas en retos adecuados para los estudiantes con ACM: (a) modificar datos, (b) cambiar la naturaleza de los números, (c) modificar condiciones y (d) plantear retos análogos. Además, basándonos en nuestra experiencia, podemos añadir otras tres estrategias que nos han resultado eficaces para añadir a las tareas ordinarias de clase extensiones adecuadas para estudiantes con ACM: (e) utilizar la información disponible en la literatura didáctica sobre errores y dificultades cometidos por los estudiantes, para incluir en las tareas casos que los provoquen y así poder corregirlos, (f) tener en cuenta variables o propiedades de los conceptos matemáticos implicados para plantear variantes de profundización o ampliación de lo que se enseña normalmente y (g) utilizar planteamientos que requieran un nivel mayor de dominio de las matemáticas, lo cual, según el contexto, se puede identificar con un nivel superior de razonamiento matemático de Van Hiele (Jaime y Gutiérrez, 1990), mayores requisitos de abstracción al demostrar la veracidad de conjeturas (Marrades y Gutiérrez, 2000) o mayor nivel de demanda cognitiva (Smith y Stein, 1998; Benedicto et al., 2015).

Para poner en práctica estas propuestas, resulta interesante la metodología basada en el diseño de *actividades matemáticas ricas* (Piggot, 2011). Son tareas con varias partes, todas referidas a los mismos contenidos matemáticos y con un contexto común, de manera que las primeras partes se centran en los contenidos mínimos objeto de aprendizaje para todo el grupo, son sencillas para que estén al alcance incluso de los estudiantes con dificultades y requieren un esfuerzo cognitivo bajo para el nivel del grupo. En las siguientes partes de la actividad se formulan nuevas preguntas que llevan implícita una complejidad creciente y cada una requiere un esfuerzo cognitivo más alto. En la página web de NRICH (2022) y en Jaime y Gutiérrez (2014) se muestran ejemplos de actividades matemáticas ricas.

Un objetivo de las actividades matemáticas ricas es que los profesores solo tengan que preparar una tarea, que esté graduada para permitir a todos los estudiantes del grupo llegar tan lejos como su interés y capacidad matemática les permitan, pues es necesario tener en cuenta que la capacidad matemática es un atributo individual (Applebaum y Leikin, 2007; Jaime y Gutiérrez, 2021). En los siguientes párrafos presentamos ejemplos de actividades matemáticas ricas para Primaria y Secundaria.

Isometrías en los primeros cursos de Primaria

Las isometrías (o movimientos) y, en particular, las simetrías constituyen uno de los temas presentes en los bloques de contenidos de geometría de los currículos de Primaria. Por ejemplo, en el currículo actual de Primaria de la Comunidad Valenciana, en 2º curso se plantea la "iniciación a la simetría" y en 3º se propone estudiar "Regularidades y simetrías... Descripción de movimientos con la utilización del vocabulario adecuado. Identificación y realización de movimientos".

La siguiente actividad matemática rica puede plantearse en 1º a 3º de Primaria. Sus objetivos de enseñanza son el concepto de imagen por una simetría y, operativamente, la obtención de la figura simétrica de una dada. Los elementos manipulativos son una base cuadriculada, una recta como eje de simetría y puntos rojos de cartulina, plástico, etc. para colocar sobre la base.

Actividad 1. Tenemos un tablero de juego formado por la cuadrícula que ves debajo, puntos rojos que podemos poner en los cuadraditos y un espejo. Ten en cuenta que en cada cuadradito de la cuadrícula sólo puedes poner un punto.

1.1. (con espejo) Coloca 4 puntos en los cuadraditos a la derecha de la línea morada [Figura 11a]. *Pon el espejo sobre la línea morada de forma que mire hacia los puntos. ¿Cuántos puntos ves en total?*

Ahora, coloca 5 puntos en los cuadraditos encima de la línea morada [horizontal]. *Pon el espejo sobre la línea morada de forma que mire hacia los puntos. ¿Cuántos puntos ves en total?*

1.2. (sin espejo) Coloca los puntos que ves en la cuadrícula b) [Figura 11b]. *Si pusieras el espejo sobre la línea morada, de forma que mire hacia los puntos, ¿cuántos puntos verías en total? Verifica tu respuesta con el espejo.*

Ahora, coloca los puntos como ves en la cuadrícula c) [Figura 11c]. *Si pusieras el espejo sobre la línea morada, de forma que mire hacia los puntos, ¿cuántos puntos verías en total? Verifica tu respuesta con el espejo.*

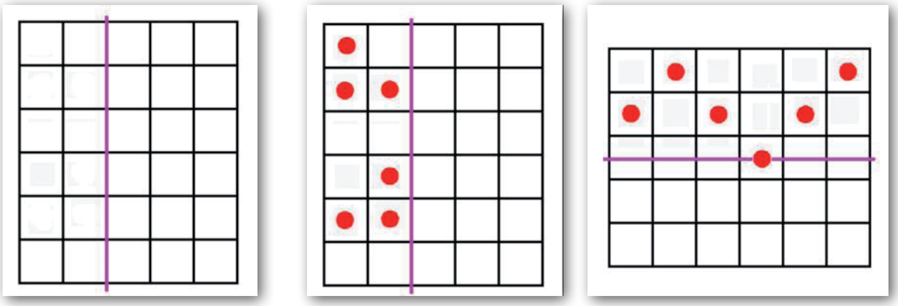


Figura 11a, 11b y 11c. Actividad 1.1 y 1.2 de ACM

1.3. Pon los puntos que necesites en la cuadrícula d) [Figura 12a] *para que, si pones el espejo sobre la línea morada, veas en total 18 puntos.*

¿Hay varias soluciones? ¿Cuál es la cantidad mínima de puntos que puedes poner en la cuadrícula? ¿Y la cantidad máxima?

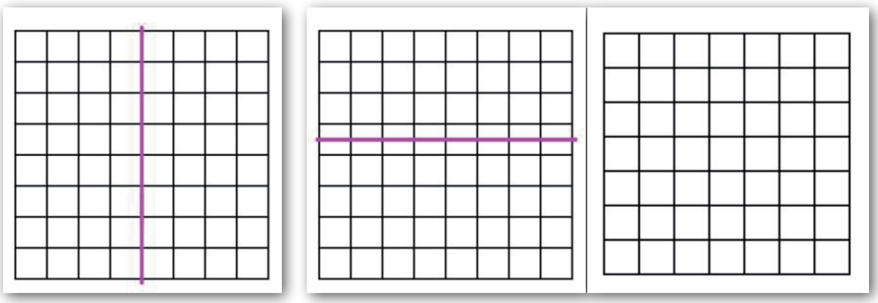


Figura 12a, 12b y 12c. Actividad 1.3, 1.4 y 1.5 de ACM

1.4. Repite el ejercicio 1.3 con la cuadrícula e) [Figura 12b] *para que se vean en total 15 puntos.*

1.5. Coloca en la cuadrícula f) [Figura 12c] *los puntos que necesites y dibuja la recta morada del espejo donde haga falta para ver en total 20 puntos. Modifica esta solución para que se vean 21 puntos.*

1.6. Si colocamos varios puntos en la cuadrícula, de forma que exactamente dos puntos están cortados por el eje del espejo, ¿qué cantidad de puntos veremos? Explica tu respuesta.

Hemos ampliado el ejercicio básico (1.1 y 1.2b) a otra variante en la que el eje corta algunos puntos (1.2c), pero la respuesta se obtiene mediante manipulaciones directas en la cuadrícula. En experimentaciones que hemos realizado, hemos comprobado que niños de 1º de Primaria con ACM duplican la cantidad de puntos, sin tener en cuenta que los puntos cortados por el espejo no se duplican. Las partes de la actividad en las que el eje corta puntos son de mayor demanda cognitiva que las anteriores. Las partes siguientes de la actividad (1.3 a 1.5) plantean variantes de complejidad creciente pues, para resolverlas, hay que tener en cuenta algunas respuestas dadas en apartados anteriores y, además, puede haber varias soluciones. El apartado 1.6 no propone ninguna cantidad concreta de puntos, por lo que plantea el descubrimiento de la relación general.

Globalmente, esta es una actividad abierta que en algunos apartados tiene varias soluciones y que cada nueva parte requiere mayor esfuerzo cognitivo que las anteriores, por lo que es adecuada tanto para estudiantes medios como con ACM.

Polígonos estrellados en ESO

En los primeros cursos de ESO se estudia la divisibilidad y, a lo largo de la ESO, se estudian elementos y propiedades de los polígonos. Un contexto interesante para integrar ambos temas es el de los *polígonos estrellados*. Presentamos una actividad rica que integra contenidos de divisibilidad con polígonos regulares y polígonos estrellados. Se utilizan tramas circulares impresas en papel con puntos igualmente espaciados. Es un planteamiento utilizado desde hace muchos años, pero interesante y original para los estudiantes de ESO con ACM.

Actividad 2. Ves una circunferencia en la que hay dibujados 20 puntos igualmente espaciados [Figura 13a]. *Empezando en el punto rojo, contamos una determinada cantidad de puntos y trazamos un segmento uniéndolo con el nuevo punto. Desde este punto, contamos la misma cantidad de puntos y trazamos un segmento al nuevo punto. Seguimos así hasta llegar al punto rojo. Por ejemplo, si unimos los puntos de dos en dos obtenemos el polígono que ves en la figura* [Figura 13b].

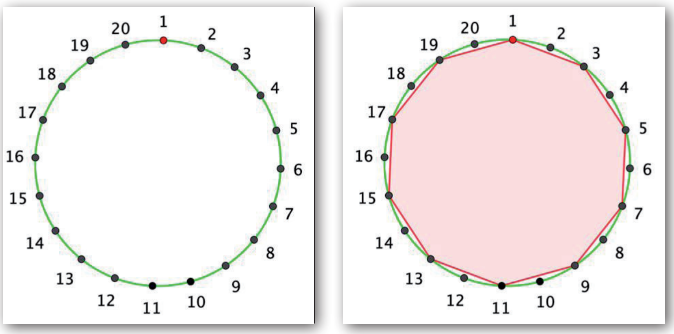


Figura 13a y 13b. Actividad 2 de ACM

2.1. Encuentra todos los polígonos regulares distintos (por su número de lados) que puedas hacer con estos 20 puntos. ¿Cómo puedes calcular cuántos hay?

2.2. Dibuja el polígono que sale contando de seis en seis.

Has tenido que dar varias vueltas hasta llegar al punto inicial y has obtenido una figura cuyos lados se cruzan [Figura 14]. Estas figuras se llaman "polígonos cruzados". Además, ves que el polígono que has dibujado tiene forma de estrella, por lo que estos polígonos cruzados particulares se llaman "polígonos estrellados". ¿Cuántos vértices (puntas) tiene el polígono estrellado que has dibujado?

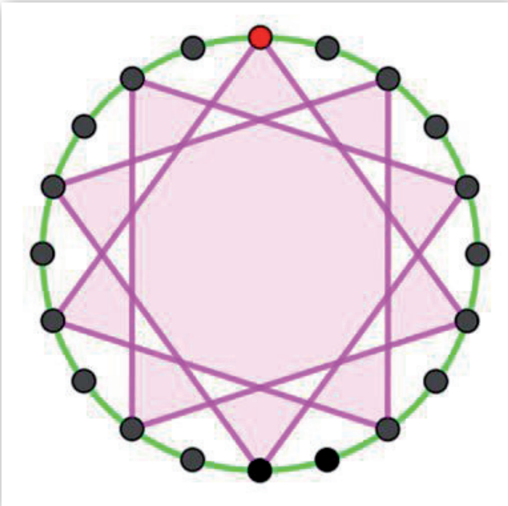


Figura 14. Actividad 2.2 de ACM

2.3. Dibuja polígonos uniendo cada 3 puntos, cada 4, cada 5, cada 6, cada 7, ... ¿Puedes saber, antes de dibujarlos, la cantidad de vértices de cada polígono?

2.4. Si tenemos una circunferencia con 385 puntos, ¿cuántos polígonos regulares y cuántos estrellados podrás hacer? ¿Por qué? ¿Cómo puedes demostrar este resultado?

2.5. Has observado que, para llegar al punto inicial, algunas veces solo das una vuelta a la circunferencia, pero otras tienes que dar varias vueltas. ¿Puedes saber, sin dibujar, cuántas vueltas darás en cada caso del 2.3.? ¿Por qué? ¿Cómo puedes demostrar este resultado?

2.6. Diseña tus propios polígonos estrellados. Justifica los resultados que te salen: tipos de polígonos (simple o estrellado), número de lados, etc.

Esta actividad lleva a los estudiantes a utilizar la divisibilidad en un contexto novedoso. Las partes 2.1 a 2.3 son introductorias y permiten descubrir, y justificar rápidamente, que, si el salto es divisor de la cantidad de puntos, se obtiene un polígono regular simple. En 2.3 hay también saltos que no son divisores de 20 y, en 2.4, empieza la extensión del problema básico planteando a los estudiantes con más capacidad matemática que analicen la relación entre la cantidad de puntos y los saltos que no son divisores suyos. La parte 2.4 propone un caso más complejo, porque no se puede dibujar, donde los estudiantes mostrarán si han entendido y generalizado las relaciones entre cantidad de puntos y salto. La parte 2.5 plantea la otra parte de esa relación, más difícil de explicar, y la 2.6 sirve para integrar todos los conocimientos descubiertos en las partes anteriores y ofrecer a los estudiantes que la resuelvan una visión global práctica.

Esta actividad rica, muestra cómo utilizar las propuestas de contenidos de los currículos ordinarios de ESO para hacer una ampliación a un contexto adecuado para estudiantes con ACM y ampliar sus conocimientos geométricos más allá de los que proporciona el currículum, en la línea de las sugerencias hechas por los autores citados. También es posible relacionar estos contenidos geométricos con el arte.

Recordando los tipos de tareas que Diezmann y Watters (2002) consideran adecuadas para los estudiantes con ACM, esta actividad corresponde a varios de ellos: lleva más allá de lo que se espera de su grupo de edad o curso, propone una investigación abierta y es interesante para estudiantes que se sientan atraídos por los diseños artísticos geométricos. Además, tiene un soporte gráfico que permite a los pensadores visuales avanzar en su resolución del problema.

Reflexión final

La potencia que tienen las matemáticas para desarrollar el pensamiento, poner en juego capacidades intelectuales y mejorar la comunicación, las convierten en una disciplina privilegiada para hacer crecer a las personas. Las metodologías y actividades expuestas en este capítulo se han llevado a la práctica de forma exitosa con estudiantado al que hacen referencia. Aunque están focalizadas en tres necesidades educativas especiales, revelan un mensaje importante: a poco que creamos en ellos, encontraremos avances en su aprendizaje matemático. Por lo tanto, no pongamos límites a lo que pueden aprender de matemáticas. Cuando diseñamos las actividades pensado en cada estudiante, en sus dificultades y sus fortalezas, la mayoría de las veces se consiguen avances en su aprendizaje matemático. Los ejemplos que hemos mostrado tienen en cuenta una secuenciación, estableciendo mayor o menor complejidad, para que se realicen en clase integrando a todo el alumnado. Lo mismo podemos decir de las metodologías citadas, las cuales favorecen la inclusión. Pero ello debe estar amparado por un currículo amplio y flexible pues de lo contrario, será complejo atender a la diversidad del alumnado.

Kilpatrick et al. (2001) indican que los estudiantes con necesidades educativas especiales aprenden matemáticas con los mismos principios generales que el resto del alumnado: el aprendizaje se construye sobre lo que ya se conoce; aprender con comprensión implica conectar u organizar el conocimiento previo y el nuevo. Muchas veces esto supone comenzar con un conocimiento informal para llegar, posteriormente, a niveles más altos de abstracción y formalización.

Lograr que cada estudiante alcance su potencial máximo en matemáticas supone adaptar contenidos, contar con materiales curriculares, guías de aprendizaje bien planificadas y, en su puesta práctica, respetar los tiempos de aprendizaje que cada estudiante necesita. El profesorado debe ver la clase como grupo heterogéneo, en el que cada estudiante tiene fortalezas en las que apoyarse para avanzar. Promover una disposición positiva en el aprendizaje de las matemáticas es una manera de lograr mejores resultados. Los profesores tenemos el deber de creer en todos y de diseñar formas de actuar que fomenten esta buena disposición.

Agradecimientos

Proyectos PID2020-117395RB-I00 (MCIN/AEI/10.13039/501100011033; PID2019-105677RB-I00 (AEI, UE); PID2020-113601GB-I00 (AEI, UE); y 2018-1-ES01-KA203-050986 (ANFoMAM).

Referencias

Aleksandrov, A. D., Kolmogorov, A. N. y Laurentiev, M. A. (2014). *La matemática, su contenido, métodos y significado*. Alianza Editorial.

Applebaum, M. y Leikin, R. (2007). Teachers' conceptions of mathematical challenge in school mathematics. En J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (eds.), *Proceedings of the 31st Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 9-16). PME.

Bae, Y. S. (2013). *Word problem solving of students with Autistic Spectrum Disorders and students with typical development* (tesis doctoral). Columbia University.

Bae, Y. S., Chiang, H. M. y Hickson, L. (2015). Mathematical word problem solving ability of children with autism spectrum disorder and their typically developing peers. *Journal of Autism and Developmental Disorders, 45*(7), 2200–2208. https://doi.org/10.1007/s10803-015-2387-8

Benedicto, C., Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2015). Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en educación matemática XIX* (pp. 153-162). SEIEM.

Bird, G. y Buckley, S. (2001). *Number skills for individuals with Down syndrome – An overview, Down Syndrome issues and information*. The Down syndrome Educational Trust.

Bruno A. y Noda, A. (2019). The concept of tens and hundreds in students with Down syndrome. *International Journal of Disability, Development and Education, 66*(2), 1, 171-185

Castro, E., Ruiz, J. F. y Castro-Rodríguez, E. (2015). Retos, profesores y alumnos con talento matemático. *Aula, 21*, 85-104.

CEMAT (2021). *Bases para la elaboración de un currículo de matemáticas en educación no universitaria*. Recuperado el 12 de marzo de 2022 en: https://matematicas.uclm.es/cemat/wp-content/uploads/bases2021.pdf

Cogolludo-Agustín, J. I. y Gil-Clemente, E. (2019). The effectiveness of teaching geometry to enhance mathematical understanding in children with Down syndrome. *International Journal of Disability, Development and Education, 66*(2), 1-20.

Cogolludo-Agustín, J.I, Gil-Clemente, E. y Millán-Gasca, A. (2021). Arithmetical achievements of children with Trisomy 21 supported on geometrical basis. Preprint, Long presentation, International Congress of Mathematical Education-14 (Shanghai).TSG4 Special needs.

Diezmann, C.M. (2005). Challenging mathematically gifted primary students. *Australasian Journal of Gifted Education, 14*(1), 50-57.

Diezmann, C. M. y Watters, J. J. (2002). Summing up the education of mathematically gifted students. En B. Barton, K. C. Irwin, M. Pfannkuch y M. O. J. Thomas (eds.), *Proceedings of the 25th Annual Conference of the MERGA* (pp. 219-226). MERGA.

Egan, K. (1988). *La comprensión de la realidad en la educación infantil y primaria*. Morata.

Faragher, R. y Brown, R. (2005). Numeracy for adults with Down syndrome: it´s a matter of quality of life. *Journal of Intellectual Disability Research, 49*, 761-765.

Faragher, R. y Gil-Clemente, E. (2019). Mathematics education research in the field of Down syndrome: latest developments and emerging trends. *International Journal of Disability, Development and Education. Special Issue, 66*(2), 111-118.

Gil-Clemente, E. (2020). *Matemáticas que suman*. Horsori.

Gil-Clemente, E. (2022). *Talleres temáticos para la educación matemática de niños con discapacidad intelectual: guía multimedia*. Prensas Universitarias de Zaragoza. Disponible en: https://zaguan.unizar.es/record/110895

Gil-Clemente E. y Millán-Gasca, A. (2022). Geometry as "forceps of intelligence": lines, figures, and the plane in Édouard Séguin's educational thought. *Bolletino di Storia delle Scienze Matematiche 41*(2), 315-339.

Grandin, T. (1995). *Thinking in pictures*. Vitage Books.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele. En S. Llinares y M. V. Sánchez (eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-384). Alfar.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2014). La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de educación primaria con altas capacidades matemáticas. En B. Gómez y L. Puig (Eds.), *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán* (pp. 147-190). Valencia, Spain: PUV.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2021). La alta capacidad matemática: caracterización, identificación y desarrollo. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 24*(3), 597–621.

Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell, B. (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics*. National Academies Press.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. The University of Chicago Press.

Kula, W. (1980). *Las medidas y los hombres*. Siglo XXI.

Leikin, R. y Lev, M. (2013). Mathematical creativity in generally gifted and mathematically excelling adolescents: what makes the difference? *ZDM Mathematics Education, 45*(2), 183-197.

LOMLOE (2020). Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *BOE* de 30-12-2020.

Marrades, R. y Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1/2), 87-125.

Mesivob, G. y Howley, M. (2010). *El acceso al currículo por alumnos con Trastornos del Espectro del Autismo: uso del programa TEACCH para favorecer la inclusión*. Autismo Ávila.

Millán-Gasca, A. y Vale, P. (2021). Re-placing mathematics into cultural heritage: A path for educational and social inclusión. En A. Poce (ed.), *Promoting inclusion through heritage.*

Some results of the inclusive memory project from Roma Tre University (pp. 195-232). Edizioni Scientifiche Italiane.

Monari, E. (2002). Learning mathematics at school… and later on. Down syndrome *News and Update, 2*(1)*,* 19-23.

Monari, E. y Pellegrini, K. (2010). Algebra and problem-solving in Down syndrome: a study with 15 teenagers. *European Journal of Special Needs Education*, *25*(1), 13-29.

NRICH (2022). *Maths at home* (página web). https://nrich.maths.org/

Oswald, T. M., Beck, J. S. Iosif, A., McCauley, J. B., Gilhooly, L. J., Matter, J. C. y Solomon, M. (2016). Clinical and cognitive characteristics associated with mathematics problem solving in adolescents with Autism Spectrum Disorder. *Autism Research*, *9*, 480-490.

Pallardó, V. (2021). *Atenció a estudiants d'alt nivell matemàtic mitjançant la resolució de problemes a l'Ensenyament Secundari* (trabajo final de máster). Universidad de Valencia.

Pastor, C. A. (2016). *El Diseño Universal para el Aprendizaje: educación para todos y prácticas de enseñanza inclusivas*. Morata.

Piggott, J. (2011). *Rich tasks and contexts*. NRICH, University of Cambridge. https://nrich.maths.org/5662

Pitta-Pantazi, D., Christou, C., Kontoyianni, K. y Kattou, M. (2011). A model of mathematical giftedness: integrating natural, creative, and mathematical abilities. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 11*(1), 39-54.

Polo-Blanco, I., González, M. J. y Bruno, A. (2019). An exploratory study on strategies and errors of a student with autism spectrum disorder when solving partitive division problems. *Brazilian Journal of Special Education 25*(2), 247-264.

Polo-Blanco, I., González, M. J. y Bruno, A. (2021). Influencia del contexto en problemas de multiplicación y división: estudio de caso de un alumno con autismo. *Siglo Cero, 52*(1), 59-78.

Polo-Blanco, I., González, M. J., Bruno, A. y González, J. (en prensa). Teaching students with mild intellectual disability to solve word problems using schema-based instruction. *Learning Disability Quarterly*. https://doi.org/10.1177/07319487211061421

Polo-Blanco, I., Van Vaerenbergh, S., Bruno, A. y González, M. J. (2022). Conceptual model-based approach to teaching multiplication and division word-problem solving to a student with Autism Spectrum Disorder. *Education and Training in Autism and Developmental Disabilities*, *57*(1), 31-43.

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press.

Rockwell, S. B., Griffin, C. C. y Jones, H. A. (2011). Schema-based strategy instruction in mathematics and the word problem-solving performance of a student with autism. *Focus on Autism and Other Developmental Disabilities, 26*, 87-95.

Smith, M. S. y Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: from research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(5), 344-350.

Tourón, J. (2019). Los alumnos con altas capacidades en España: esa realidad invisible. Conferencia en la *III Jornada de Altas Capacidades y Superdotación*. Oviedo. https://www.youtube.com/watch?v=u13r89hd418

Tuset, I., Bruno, A. y Noda, A. (2019). Subitisation in number tasks in children with Down syndrome. *International Journal of Disability, Development and Education, 66*(2), 162-170.

Unesco (2017). *A Guide for ensuring inclusion and equity in education*. UNESCO.

Zimpel, A.F. (2016). *Trisomy 21: what we can learn from people with Down syndrome.* Vandenhoeck y Ruprecht GmbH y Co.

Parte 3

Cuestiones transversales en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Cross-cutting issues in mathematics teaching and learning

Introducción

Cada vez más, nuestra sociedad es consciente de la necesidad de una formación básica y sólida de los ciudadanos en matemáticas para enfrentar los retos del siglo XXI. Muchas de las cuestiones que nos rodean son consecuencia de los avances realizados en matemáticas. Buena prueba de ello, tiene que ver, por ejemplo, con la pandemia que llevamos sufriendo desde marzo de 2020 (ya más de dos años) y la manera que han tenido los diferentes gobiernos de implementar las medidas más adecuadas determinadas, entre otras, por las recomendaciones de grupos de matemáticos. Estos grupos han modelizado diferentes cuestiones como la propagación del virus, los efectos del transporte y la movilidad de los ciudadanos o los riesgos de la apertura de medidas.

Desde los actuales currículos publicados por el Ministerio de Educación (Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero de 2022, Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo de 2022 y Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo de 2022) se percibe ese potencial del conocimiento matemático en cuestiones muy diversas. Así, se menciona la importancia de las matemáticas en relación con

> los desafíos sociales y medioambientales a los que el alumnado tendrá que enfrentarse en su futuro, como instrumento para analizar y comprender mejor el entorno cercano y global, los problemas sociales, económicos, científicos y ambientales y para evaluar modos de solución viables, contribuyendo de forma directa a los Objetivos de Desarrollo Sostenible planteados por las Naciones Unidas (BOE, 2 de marzo de 2022, p. 24485).

Tal como se plantea, la enseñanza de las matemáticas debe ser una enseñanza inclusiva en el sentido más amplio que permita a todos los alumnos alcanzar un conocimiento matemático adecuado para desenvolverse en nuestra sociedad independientemente de sus capacidades, habilidades o intereses. Para ello, es necesario ser consciente de que hay que desarrollar en los alumnos competencias ligadas al razonamiento matemático, al establecimiento de múltiples conexiones, a la utilización de diferentes representaciones, a la resolución de problemas y a la modelización matemática, al desarrollo del pensamiento computacional, entre otras.

Esta parte está organizada en cinco capítulos en los que se abordan cuestiones transversales inherentes a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas como son el discurso matemático en el aula, la resolución de problemas y la modelización matemática, los entornos tecnológicos, los recursos didácticos para finalizar con algunas tareas de matemáticas transversales.

El profesor que diseña tareas y gestiona la actividad en el aula, debe ser consciente del papel que tiene para desarrollar buenas prácticas de enseñanza. Así, en el primero de los capítulos se aborda una cuestión fundamental como es el discurso matemático en el aula. Se tienen en cuenta tres puntos de vista relativos a las tensiones que se producen en las aulas y que se muestran como ejemplos de retos para lograr aulas inclusivas en el sentido más amplio posible. Para ello, es importante posibilitar espacios de interacción tanto entre el profesor y el alumno, como entre los alumnos, pues de esta forma el docente podrá percibir las competencias que va desarrollando el alumno, así como posibilitar que se comunique con sus pares usando un lenguaje matemático cada vez más preciso. Hay que tener en cuenta que la comunicación, tanto oral como escrita, es un aspecto esencial del aprendizaje de las matemáticas, pues es la forma de compartir y aclarar ideas, razonar, reflexionar, dar significado a los conceptos con lo cual se va encaminando el alumno hacia la comprensión.

Todos estamos de acuerdo en que una de las actividades más características de las aulas de matemáticas es la resolución de problemas. Pero, ¿entendemos todos lo mismo por resolución de problemas? El capítulo 2 se centra en esta cuestión, considerando un problema como una tarea en la que no se conoce el método de resolución de antemano y, por lo tanto, supone un reto para los alumnos. Para resolver un problema los alumnos tienen que poner en juego sus conocimientos matemáticos, pero también deben pensar, razonar, decidir, reformular, representar, usar diferentes estrategias y sobre todo conectar las matemáticas con otros ámbitos de conocimiento y con diferentes situaciones en las que de forma natural es imprescindible este conocimiento. Esto liga con la noción modelización matemática que también se aborda en este capítulo. Debemos preguntarnos si las matemáticas que se trabajan en el aula tienen sentido para los estudiantes, o sólo se abordan los procedimientos algorítmicos y no se trabaja a partir de los contextos que dan sentido a cada uno de los contenidos del currículo.

Los entornos tecnológicos. que se abordan en el tercer capítulo, nos muestran algunos ejemplos sobre el pensamiento computacional relacionados con los diferentes niveles educativos. La tecnología nos provee de herramientas que, usadas adecuadamente, ayudan a hacer matemáticas y a aprender matemáticas. Los conceptos matemáticos se pueden desarrollar usando diferentes tecnologías a partir de imágenes y del razonamiento que surge de la interacción con dichas imágenes. Hemos de pensar que no sustituyen a otros tipos de actividades más manipulativas o abstractas que se realizan en el aula, pero constituyen un apoyo esencial para fundamentar mejor el conocimiento matemático de nuestros estudiantes. También obligan al profesor a repensar el conocimiento matemático y la forma de organizar el aula.

Existen multitud de recursos para la enseñanza de las matemáticas. En el capítulo cuarto se mencionan algunos junto con ejemplos de su uso en el aula. Estos materiales constituyen un nexo que permite a los estudiantes conectar las matemáticas con otros aspectos más o menos reales y, por tanto, dotar de sentido a los contenidos matemáticos. Dependiendo del nivel educativo y de los conceptos matemáticos estos recursos pueden ser más o menos sofisticados. Puzles, cajas, cuentas, papel, piezas, mecanos, juegos de construcción, ábacos, regletas Cuisenaire, bloques multibase, juegos de cartas, dominós, juegos de mesa, dados, ruletas, figuras geométricas, ... El listado es interminable. Hay que tener en cuenta que lo interesante no es el material sino la tarea diseñada por el profesor para que se produzca un aprendizaje significativo a través de la interacción con dicho material. También hay que considerar, como decía Puig Adam (1958) que no se debe “prolongar su uso más allá de lo estrictamente indispensable. Graduar el salto a lo abstracto pasando antes de lo concreto tangible a lo concreto imaginable” (p. 29).

Finalmente, el último capítulo trata actividades que permiten conectar los diferentes contenidos matemáticos entre sí, así como con otras disciplinas o situaciones diversas, aunque actuales y motivadoras para los estudiantes. Se centra fundamentalmente en actividades interdisciplinares y transversales en el que se abordan cuestiones como los objetivos de desarrollo sostenible, la perspectiva de género, las actividades de divulgación matemática, las matemáticas al aire libre o en los museos, la conexión con otras materias STEAM, la realización de rutas matemáticas por la ciudad o la perspectiva de género.

Referencias

Puig Adam, P. (1958) *El material didáctico matemático actual*. Publicaciones de la revista de Enseñanza Media. Ministerio de Educación Nacional.

Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero de 2022, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil. *Boletín Oficial del Estado, 28*, de 2 de febrero de 2022. https:// https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/02/01/95.

Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo de 2022, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado, 52*, de 2 de marzo de 2022. https://www.boe.es/buscar/act.php?id=BOE-A-2022-3296.

Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo de 2022, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Enseñanza Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado, 76*, de 30 de marzo de 2022.
https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/29/217/con

González-Astudillo, M.T. (Coord.)
Universidad de Salamanca

Tensiones y prácticas inclusivas en la enseñanza de las matemáticas

Tensions and inclusive practices in the teaching of mathematics

Planas, N.[a], Alfonso, J. M.[b], Arnal-Bailera, A.[c], Beltrán-Pellicer, P.[c], Morell, M.[d]

[a] *Universitat Autònoma de Barcelona,*

[b] *INS de Lliçà,*

[c] *Universidad de Zaragoza,*

[d] *IES Ausiàs March*

Resumen

En el marco de la actual ley educativa, los currículos de matemáticas siguen avanzando en la dirección de pedagogías centradas en el alumno y sus procesos de aprendizaje. Esta opción no debe equipararse con una menor importancia o impacto de las prácticas de enseñanza en el aula. Un cierto papel del profesor y de la enseñanza es crucial en el desarrollo de un proyecto de educación matemática inclusiva que valore los aportes y características de todos los alumnos. En este capítulo, recomendamos tres prácticas de enseñanza relativamente sencillas y respetuosas con la distribución equitativa de oportunidades de aprendizaje matemático. Asociamos cada práctica a tensiones subyacentes en la enseñanza institucional de matemáticas: entre lenguas formales e informales, entre contextos académicos y cotidianos, y entre comunicación verbal y no verbal. Finalizamos reflexionando sobre cómo estas tensiones se relacionan entre ellas y pueden regularse para facilitar la participación en el discurso matemático mediante la resolución de problemas.

Palabras clave: Educación matemática inclusiva, Prácticas de enseñanza en el aula, Participación en el discurso matemático, Tensiones entre lenguas formales e informales / contextos académicos y cotidianos / comunicación verbal y no verbal.

Abstract

Within the context of the current educational law, the set of mathematics curricula keep moving in the direction of pedagogies centered on the student and the learning processes. This option must not be merged with a lower importance or impact of the classroom teaching practices. A certain role of the teacher and the teaching is critical to the development of an inclusive mathematics education project that values the contributions and characteristics of all the students. In this chapter, we recommend three teaching practices, relatively simple and responsible towards the equitable distribution of mathematics learning opportunities. We associate every practice with underlying tensions in the institutional mathematics teaching, namely: between formal and informal languages, between academic and everyday contexts, and between verbal and non-verbal communication. We finish with reflections on how these tensions relate to each other, and how they can be regulated by classroom cultures of participation in the mathematical discourse through problem solving

Keywords: Inclusive mathematics education, Classroom teaching practices, Participation in the mathematical discourse, Tensions between formal and informal languages / academic and everyday contexts / verbal and non-verbal communication.

El reto de la educación matemática inclusiva

Los currículos de matemáticas que se han elaborado en el marco de la nueva ley de educación (LOMLOE) suponen un paso más en la dirección de una educación matemática social y abierta, que sitúe el aprendizaje como objetivo principal de la enseñanza. En los años noventa, los currículos de la ley educativa en ese momento (LOGSE) empezaron a cuestionar de una manera radical la enseñanza de las matemáticas orientada al conocimiento de hechos y al entrenamiento individual de rutinas. Ahora se refuerza la concepción social y abierta de la educación matemática y el trabajo rutinario individual se supedita todavía más explícitamente al trabajo exploratorio compartido, orientado más a la comprensión relacional que a la comprensión de hechos. De acuerdo con esta concepción, el aula de matemáticas es sobre todo un contexto social de comunicación y producción de significados mediante la participación en tareas matemáticamente interesantes. Ya en la LOE se introdujeron las competencias básicas que, para adaptarlas a las recomendaciones europeas, pasaron a denominarse competencias clave en la LOMCE y en la LOMLOE. La novedad con esta última ley es que, además de las competencias clave, se desarrollan competencias específicas en cada materia que contribuyen a lo que se denomina "perfil de salida" del alumnado. Esto es un paso adelante, pues al ser específicas, orientan mejor el trabajo de aula en articulación con los saberes. No hay, en este sentido, un cambio importante de perspectiva sobre el papel con respecto a la LOGSE, pero sí una intención de avanzar hacia una enseñanza de las matemáticas que aporte a todos los alumnos una educación matemática significativa y positiva a nivel personal, social y académico. Esto, en parte, se recoge con competencias matemáticas que atienden a destrezas socioafectivas y de resolución de problemas.

El reto sigue siendo avanzar hacia una educación matemática más respetuosa y sensible con la sociedad y con el desarrollo matemático y bienestar global de las personas, menos clasista y etiquetadora de grupos y de capacidades. En este volumen, el capítulo 'Pensemos en unas matemáticas para todo el alumnado' comparte muy especialmente el interés por lograr que en el aula de matemáticas cada alumno cuente y que cuente por igual. En nuestro capítulo, al apostar por aulas inclusivas, estamos en particular pensando en unas matemáticas también para alumnos con síndrome de Down, con altas capacidades matemáticas, con características dentro del espectro autista… entre otras diversidades. Las características de una propuesta inclusiva son esencialmente las mismas, sin perjuicio de las variaciones y adaptaciones que puedan tener lugar según necesidades específicas.

La investigación en educación matemática no acostumbra a aportar respuestas rápidas a cuestiones sobre la práctica, ni recetas para la generación automática de prácticas inclusivas de enseñanza de las matemáticas. En su lugar, proporciona recomendaciones basadas en resultados de décadas de estudios bajo distintos enfoques (Planas, 2015; Planas et al., 2021). Estas recomendaciones pueden orientar a los profesores de matemáticas en su planificación, desarrollo, evaluación y mejora continua de la enseñanza. Con base en resultados y conocimientos de la investigación en educación matemática, presentamos tres prácticas de enseñanza, cada una asociada a tensiones subyacentes en la educación matemática. No explicamos el detalle de estas tensiones, sino que las planteamos como el escenario en el cual dar sentido a las prácticas que recomendamos.

Como en Skovsmose y Godoy Penteado (2015), con tensiones nos referimos a la existencia simultánea de dos o más aspectos importantes de la educación matemática que, sin embargo, a menudo se piensan y se tratan como opuestos o en competición. Resaltamos tres tensiones en la educación matemática, aunque hay más sin duda, y proponemos ejemplos de prácticas para contribuir a reducir el impacto de las tensiones:

- Tensiones entre lenguas formales e informales
  - Compartir formas del discurso matemático
- Tensiones entre contextos académicos y cotidianos
  - Contextualizar tareas matemáticas en entornos cercanos
- Tensiones entre comunicación verbal y no verbal
  - Trabajar con materiales y representaciones matemáticas visuales

Compartir formas del discurso matemático, contextualizar tareas matemáticas en entornos cercanos y trabajar con materiales y representaciones matemáticas visuales son prácticas de enseñanza relativamente simples, que valen para la actual ordenación curricular, para las anteriores y para las venideras. Son prácticas de naturaleza inclusiva que no renuncian al trabajo matemático interesante y riguroso. Nos consta que ya guían la enseñanza de muchos profesores en sus clases de matemáticas. Así se disminuyen las desigualdades de distribución y aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje creadas en la enseñanza, esto es, las oportunidades de participar en discusiones de contenidos matemáticos orientadas a la comprensión y resolución de tareas. Es urgente, sin embargo, que estas prácticas sean comunes en todavía más aulas.

Cada día hay alumnos que dejan de asistir a la escuela o que asisten sin participar en el discurso matemático en las clases de matemáticas; suelen ser alumnos con capitales culturales, sociales y lingüísticos distintos a los que representan la institución escolar, las pruebas estandarizadas, las agrupaciones por 'nivel' o 'capacidades' ligadas a miradas de déficit… Lo importante no es tanto si estos alumnos son minoría o mayoría en términos estadísticos, sino lo que estas historias humanas implican para quienes las viven y lo que nos cuentan sobre el sistema educativo y sobre cómo puede llegar a fallar el proyecto de la educación matemática. Si bien la mención a la perspectiva de género en los nuevos documentos curriculares es relevante, echamos en falta la mención explícita a las desigualdades y desventajas de los alumnos (y naturalmente las alumnas) en situación de pobreza económica. Las familias de clases trabajadoras más humildes apenas disponen de tiempo y dinero para 'complementar' las tareas escolares que otras familias sí 'complementan' con recursos que no se están ofreciendo en las aulas. El esfuerzo de estos alumnos y sus familias para encajar en la cultura dominante, y superar en parte lastres derivados de las representaciones sociales sobre sus capacidades y posibilidades académicas, es enorme. El aula no es un espacio inmune a las desigualdades, pero la elección de unas u otras prácticas de enseñanza puede hacer que el sistema sea algo menos injusto.

De las tensiones y prácticas de enseñanza resaltadas, se deduce un proyecto de educación matemática inclusiva, discutido hace más de una década en Alsina y Planas (2009), con acceso de todos los alumnos a participar en el discurso matemático en culturas de aula que aprovechan diversos conocimientos, recursos e historias de vida. El desarrollo de este proyecto necesita equipos de profesores comprometidos con el logro académico de todos los alumnos, con elevadas expectativas respecto del rendimiento de todos ellos y con suficiente autonomía para adecuar el currículo. Está claro que se necesita mucho trabajo de enseñanza, parte del cual tiene que ver con el trabajo deliberado, proactivo y sostenido de resolución equilibrada de tensiones entre lenguas formales e informales; contextos académicos y cotidianos; y comunicación verbal y no verbal.

Tensiones y prácticas de enseñanza de las matemáticas

Con la introducción del desarrollo de competencias socioafectivas en el nuevo currículo de matemáticas, se refuerza el apoyo a las pedagogías centradas en el alumno y en las condiciones de su aprendizaje. Cuando un alumno aborda un problema de matemáticas, en interacción con la demanda cognitiva, tiene lugar una demanda afectiva (Beltrán-Pellicer y Godino, 2020) que engloba significados personales, en forma de emociones, actitudes, creencias y valores (Gil et al., 2005). Estos afectos, con menor o mayor grado de estabilidad, se interrelacionan entre sí y con la cognición, influyendo de distintas maneras en los procesos de aprendizaje de las matemáticas (Blanco, 2012). Ante una emoción de bloqueo durante la resolución de un problema, por ejemplo, una actitud de perseverancia será clave para la puesta en marcha de estrategias de corte metacognitivo y heurísticas. O haber desarrollado ciertas creencias hacia un objeto de aprendizaje (su utilidad, su dificultad, su importancia en el currículo y en la evaluación, etc.), por ejemplo, podrá condicionar el nivel de implicación en la actividad del aula. Para identificar y actuar pedagógica y didácticamente sobre estos afectos, es importante que la cultura del aula facilite al profesor el acceso a producciones de los alumnos durante su participación en el discurso matemático. Si el profesor es el único que participa en la construcción del discurso matemático en las clases, no solo se están limitando las oportunidades de aprendizaje, sino que además difícilmente se tiene información sobre cómo se relaciona cada alumno con la matemática escolar.

Aunque la distinción entre pedagogías centradas en el profesor y pedagogías centradas en el alumno es algo simplista, la utilizamos para contrastar culturas de clases de matemáticas según el papel del profesor y de las prácticas de enseñanza.

En el extremo de unas pedagogías, el profesor es el experto en el contenido de la materia y el participante que asume la responsabilidad principal de comunicar este contenido a los alumnos; la participación de los alumnos en el discurso matemático acostumbra a basarse en responder preguntas del profesor en la instrucción al grupo clase, trabajar en parejas para resolver tareas del libro, o salir a la pizarra a compartir soluciones por escrito sin que se discutan los procesos ni las soluciones. En el extremo de las otras pedagogías, el trabajo en grupos pequeños, las dinámicas de resolución de problemas, de exploración e indagación son prácticas comunes más o menos guiadas; la participación del profesor y los momentos de instrucción acostumbran a ser mínimos o concentrados en la presentación y el cierre de las sesiones de clase. Nosotros no nos posicionamos en ninguno de estos extremos pedagógicos porque creemos que hay un continuo de opciones interesantes entre ellos. No nos pasa desapercibido, sin embargo, el valor epistemológico y ético de considerar los significados personales a lo largo de las prácticas de enseñanza de significados institucionalizados. En cualquier caso, sea en pedagogías con mucha o con poca participación del profesor, la calidad de esta participación es clave en el desarrollo de una educación matemática que apoye a los alumnos durante su participación en el discurso matemático.

Sin excepciones, la investigación en educación matemática recomienda prácticas de enseñanza para avanzar en el desarrollo del proyecto de educación matemática inclusiva, porque este proyecto es el que a la vez permite avanzar en el desarrollo de la participación de los alumnos en el discurso matemático. Ciertamente, la cantidad de cursos de matemáticas que se hayan podido estudiar no generan por sí solos esta sensibilidad en la enseñanza de las matemáticas, por lo que son esenciales las iniciativas personales y las políticas de formación que apuesten por relacionar las prácticas de enseñanza con la participación de los alumnos en el discurso matemático y en su construcción. Dicho todo esto, organizamos los tres apartados que vienen a continuación del siguiente modo:

– Identificamos un tipo de tensión en la enseñanza señalado por la investigación del área de conocimiento de educación matemática.
– Explicamos una práctica de enseñanza con ejemplos y datos de aulas de matemáticas.
– Discutimos cómo la práctica puede contribuir a resoluciones positivas de experiencias de la tensión identificadas.

Tensiones entre lenguas formales e informales

Ante el objetivo de que los alumnos participen en el discurso matemático, en las aulas y otros entornos de educación matemática surgen tensiones entre el uso de lenguas formales (académicas) e informales (cotidianas) en la enseñanza. Esto es así en parte porque la noción misma de participar en el discurso matemático es difusa, ya que existe un continuo de tipos mixtos de participación en varios discursos a la vez. En cualquier caso, tal como señala la investigación en educación matemática (e.g., Moschkovich, 2010), estas tensiones son profundas y no pueden resolverse en el sentido de desaparecer. Sí se puede lograr un cierto equilibrio entre la exposición al discurso matemático y el acceso a una lengua inteligible de enseñanza. La búsqueda de este equilibrio adopta con frecuencia formas compensatorias con sesgos hacia la utilización casi exclusiva de lenguas informales, sobre todo en aulas de zonas socioeconómicas pobres, creyéndose que esto es en beneficio de la participación y de la inclusión; no siempre se cuida, sin embargo, que la participación y la inclusión sean con respecto al discurso matemático. De hecho, se puede llegar a provocar el efecto contrario al deseado y aumentar la diferenciación de oportunidades de aprendizaje para los alumnos con lenguas y culturas más alejadas de discursos académicos. Compartir formas del discurso matemático desde la enseñanza es una manera de garantizar el acceso a este discurso para la participación en él.

Compartir formas del discurso matemático

Pensar el aula de matemáticas como un contexto social de comunicación incluye pensar en los modos de comunicación que se utilizan en la enseñanza. Una parte de esta comunicación es verbal y oral. Aquí, el habla del profesor en clase es un recurso esencial para que los alumnos escuchen formas del discurso matemático y empiecen a utilizarlas con comprensión. La enseñanza debe facilitar que estas formas se muestren de maneras explícitas y accesibles a los alumnos, ofreciendo así oportunidades de participar en el discurso matemático escolar. Los alumnos aprenden matemáticas al participar en tareas matemáticamente ricas, a la vez que escuchando matemáticas desde el nivel más básico del vocabulario hasta el del razonamiento se reducen para todos. Si las oportunidades para que esto ocurra no se crean, o se crean más para unos alumnos que para otros, entonces las oportunidades de aprendizaje se reducen para todos. En una clase, por ejemplo, el profesor puede introducir el concepto de ecuación mediante frases informales como las dos primeras que siguen, pero no debería dejar de ofrecer la oportunidad a los alumnos de escuchar la tercera frase:

> Una ecuación es para decir que esto es igual a aquello
> Una ecuación es como una balanza en equilibrio
> Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas

Para la enseñanza de cualquier contenido matemático, desde los niveles más básicos del vocabulario es fundamental evitar formas de hablar que sugieran concepciones o razonamientos erróneos. No es lo mismo hablar de “reducir fracciones” que de “simplificar fracciones”; el significado informal de “reducir” puede comunicar la impresión incorrecta de que la fracción que se obtiene es un número más pequeño, cuando se trata del mismo número. Tampoco es lo mismo leer $x+1=4$ como “equis más uno da cuatro" que como "equis más uno es igual a cuatro"; el significado informal de "da" puede comunicar la impresión incorrecta de que la ecuación es una acción u operación, cuando se trata de una relación. Ni es lo mismo hablar de "los ángulos de fuera" que de "los ángulos externos" de un polígono; el significado informal de "fuera" difícilmente sugiere el ángulo que se crea con un lado del polígono y la extensión del lado adyacente. Y así encontramos muchos ejemplos.

Dar acceso al vocabulario del discurso matemático es importante, pero también que su uso se sitúe en contextos de resolución de problemas no rutinarios y tareas matemáticamente interesantes (e.g., Arnal-Bailera, 2014; Beltrán-Pellicer, 2022; Callejo, 2015) que den acceso a experimentar y participar en este discurso. Desarrollamos nuestra comprensión matemática en función de la actividad matemática a la que hemos sido expuestos y en la que hemos participado. Los alumnos en escuelas en zonas de bajos recursos socioeconómicos o con gran número de minorías (culturales, lingüísticas…) no deben dejar de estar o estar menos expuestos al discurso matemático mediante tareas matemáticas interesantes. Desde la perspectiva del aprendizaje, la comprensión se construye de manera gradual a la vez que se participa en el discurso matemático y se interactúa con explicaciones matemáticas (Goñi y Planas, 2011). Entra aquí en juego el papel de la lengua más allá del vocabulario, con atención a las explicaciones del profesor en la enseñanza (Planas et al., 2018). Las explicaciones, que son particulares para cada contenido matemático, deben tener una clara presencia en la enseñanza, no dejándose implícitos o sin explicar significados y conexiones importantes para avanzar en la comprensión del contenido específico.

Ilustramos una situación de aula, en versión traducida del catalán, donde se compartieron formas del discurso matemático sobre ecuaciones lineales. La profesora había escrito en la pizarra dos expresiones simbólicas que había nombrado "igualdades"; había leído la primera como "cuatro más tres es igual a siete" y había preguntado a los alumnos cómo debería leer la segunda.

$$4+3=7$$
$$2x+3=7$$

Durante unos segundos nadie respondió y se inició la siguiente conversación con una nueva pregunta:

Profesora:	¿Qué he escrito aquí?
Alumna 1:	Una ecuación.
Alumna 2:	No, una ecuación lineal.
Profesora:	¿Podéis decir algo más?
Alumna 2:	Hay que buscar la solución.
Profesora:	Me refiero a si podéis decir algo más sobre qué es una ecuación lineal.
Alumna 1:	Pues lo que has escrito en la pizarra.
Profesora:	De acuerdo, empiezo yo. Es una ecuación lineal porque es una igualdad entre dos expresiones algebraicas. ¿Podéis decir algo más?

Alumna 1: Tiene una incógnita.
Profesora: De acuerdo, tiene una incógnita, y ¿a qué potencia está elevada?
Alumna 1: La incógnita no está elevada al cuadrado.
Profesora: De acuerdo. En una ecuación lineal, la variable o incógnita siempre aparece elevada a la potencia uno y nunca elevada a otra potencia. ¿Qué más podéis decir?
Alumna 2: Creo que no se pueden tener dos o tres variables multiplicando.
Profesora: De acuerdo, 2xy+3=7 [escribe en la pizarra] no es aceptable como ecuación lineal porque hay dos variables que se multiplican entre ellas. ¿Qué más sabemos sobre ecuaciones lineales? ¿Ya podemos leer la segunda igualdad?
Alumna 3: ¿El doble de dos más tres es igual a siete?
Profesora: Interesante, ¡ya has sustituido el valor de la incógnita en la ecuación!

En el último turno, la profesora podría haber dicho: ¡ya has puesto dos en lugar de equis! No obstante, habla nombrando el objeto matemático que se manipula (la ecuación) y de forma que los alumnos puedan notar que lo que se hace es sustituir (no poner) la incógnita (no la equis) por un valor (no un dos). Junto con nombrar vocabulario específico del registro matemático, compartir formas del discurso matemático requiere también dar explicaciones. En esa sesión de clase, por ejemplo, la profesora no acabó explicando la diferencia entre las dos igualdades que había escrito en la pizarra.

La investigación en educación matemática ha relacionado el 'abuso' de lenguas informales y la falta de explicaciones en la enseñanza escolar de las matemáticas con la persistencia de razonamientos matemáticos erróneos (Adler y Ronda, 2017). En el aprendizaje de la probabilidad, por ejemplo, sigue siendo común razonar desde el llamado sesgo de equiprobabilidad (Serrano et al, 1998). Este sesgo se refiere a la tendencia a pensar los resultados posibles de un experimento aleatorio como resultados con igual probabilidad. Así, al lanzar dos dados y sumar las puntuaciones de las caras superiores, intuitivamente se tiende a pensar que todas las sumas posibles tienen la misma probabilidad. El profesor en clase puede hablar de formas que ayuden a reconocer y reducir este sesgo. Compartir formas del discurso matemático empieza con el nivel básico de dar y explicar vocabulario y expresiones aparentemente simples como 'resultados con probabilidades diferentes', en el contexto de un experimento con un dado modificado, y sigue con el nivel de dar y explicar razonamientos, en la instrucción directa o en la conversación del aula. Estos son algunos ejemplos de razonamientos orientados a reducir el sesgo de equiprobabilidad:

> Si tiramos una moneda cuatro veces, cualquier secuencia de cuatro resultados es posible y tiene la misma probabilidad de salir, es decir, todos los resultados son igual de probables.
> Si tiramos un dado con las caras 1, 2, 2, 5, 5, 5, los tres resultados, 1, 2, y 5 son posibles, pero que salga 1 es lo menos probable.

> Si giramos tres veces una ruleta dividida en cinco secciones de igual área numeradas del 1 al 5, entonces 1, 1, 1 es un suceso posible, mientras que 0, 1, 2 es un suceso imposible porque no hay ninguna sección numerada con un 0.
> En una urna con 3 bolas azules, 5 rojas y 3 blancas, sacar una bola azul, sacar una roja y sacar una blanca son sucesos posibles, y es un suceso imposible sacar una bola de otro color. Además, sacar una bola azul y sacar una bola blanca son resultados con igual probabilidad porque hay la misma cantidad de bolas azules y blancas.
> Si no he comprado ningún billete de lotería, no es posible que me toque el premio y si he comprado un billete, entonces es posible ganar, pero la probabilidad es muy baja.

En Beltrán-Pellicer y Giacomone (2021) se describe una propuesta para la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad al final de la educación primaria o comienzo de la secundaria que incluye situaciones como la descrita anteriormente. Las tareas que se recogen tratan de reflejar la necesidad de buscar el equilibrio entre lenguas formales e informales, especialmente para articular los diferentes significados de la probabilidad. Ahí se pueden encontrar más ejemplos de prácticas de enseñanza orientadas a compartir formas (vocabulario y explicaciones) del discurso matemático. En la próxima sección, discutiremos tensiones entre el uso de contextos académicos y cotidianos en la enseñanza de las matemáticas. A lo largo de las etapas educativas, las prácticas de enseñanza deberán apoyar el acceso al discurso matemático, porque este discurso lleva al desarrollo de la comprensión relacional, a la vez que deberán facilitar la participación de los alumnos en dicho discurso, porque esta participación lleva al aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje.

Tensiones entre contextos académicos y contextos cotidianos

En los entornos de educación matemática, la necesidad de que los alumnos logren comunicarse con fluidez en el discurso matemático también está en el origen de tensiones en la enseñanza entre el uso de contextos académicos (o formales) y cotidianos (o informales). Para apoyar el aprendizaje matemático, junto con compartir formas del discurso matemático, las prácticas de enseñanza tienen que ofrecer oportunidades de participar en la resolución de tareas matemáticas que admitan conocimientos de fuera de la escuela. Ahora bien, la investigación en educación matemática (e.g., Moschkovich, 2010) señala que esto no debe confundirse con el uso único de contextos cotidianos. La resolución de tensiones, en el sentido de lograr equilibrios entre la exposición a contextos académicos y cotidianos, vuelve a adoptar formas compensatorias con sesgos hacia usos casi exclusivos de contextos cotidianos en aulas de zonas socioeconómicas pobres, con la paradoja de que estos contextos no siempre son cercanos para los alumnos. En estas aulas la tarea matemática de obtener 16 polígonos convexos con el tangram de Brugner (1984) no se propondría por no evocar un contexto cotidiano. Estamos de acuerdo con utilizar contextos cotidianos en la enseñanza de las matemáticas si se conectan con tareas matemáticamente ricas y experiencias de los alumnos. Lo que convierte este recurso en una desventaja es cuando su interpretación lleva a no ofrecer suficientes prácticas de transición hacia el discurso matemático.

Contextualizar tareas matemáticas en entornos cercanos

En esta sección, presentamos el trabajo en torno a tareas matemáticas en contextos cotidianos y cercanos en un aula donde el profesor ofreció oportunidades de transición al discurso matemático y de participación de los alumnos en este discurso. En Arnal y Planas (2013) se ilustra el caso de otra aula del centro con las mismas tareas donde esta transición y participación fueron menos claras. Los fragmentos escogidos muestran cómo el profesor y una alumna discuten la resolución de una tarea de geometría sobre un parque cercano al centro, identificable en los materiales dados en clase. La tarea tiene un componente tecnológico ya que se trabaja con un programa de geometría dinámica en los portátiles y se utiliza una pizarra digital. La alumna de las transcripciones tenía un historial de fracaso escolar, en particular en matemáticas, y su relación con el profesor estaba marcada por el reclamo constante de ayuda. En el problema de la Figura 1, hay dos amigos en los extremos de un camino recto dentro del parque, por cuyo punto medio y de forma perpendicular se sitúa otro camino visible en la imagen desde donde se llega a una fuente circular. La primera vez que el profesor se acerca a revisar el trabajo en pareja de la alumna, no interviene para considerar o dar valor a su solución parcial. Esta solución está basada en la imagen del parque y muestra que la fuente está a la misma distancia de A y B. El profesor sí pide a la alumna que resuelva la tarea en la pizarra digital sobre una pantalla en blanco. Este es el punto de inicio del fragmento que sigue.

Problema 1. Abdel y Blanca están en los puntos blancos. Encuentra puntos a la misma distancia de los dos. Comprueba las distancias con GeoGebra. Marca los puntos en la hoja.

Figura 1. Ejemplo de tarea de geometría en un contexto cercano

Alumna:	Ahh, hay que buscar un punto que esté a la misma distancia… ¡Profe, la fuente! La fuente que hace así… [señala la forma de la fuente en la pantalla]
Profesor:	Vamos a avanzar esto… ya lo comento yo aquí… Teníais dos personas en el parque de Huesca, A y B, y os pedían puntos a la misma distancia. ¿Habéis encontrado algún punto?
Alumna:	¡Yo sí! Iguales, ¿no?
Profesor:	¿Y creéis que habrá un único punto que esté a la misma distancia? ¿O habrá más?
Alumnos:	Habrá más.
Profesor:	[A la alumna] Sal y dibuja al menos un punto a la misma distancia.
Alumna:	Es que no sé… Mira, los tengo igual.
Profesor:	[Revisa la solución en el portátil; ella se levanta con dudas ante el cambio de programa, dibuja un punto correctamente en la posición relativa de la fuente respecto de A y B]. ¿Crees que habrá más puntos que cumplan eso? ¿Dónde crees que estarán más o menos?
Alumna:	[Dibuja el simétrico del punto dibujado respecto de AB y el punto medio de AB] ¡Están en línea! [Recorre con la mano la línea que forman los puntos encontrados]
Profesor:	Parece que están en una línea recta. Podemos encontrar muchos puntos, aquí, aquí, aquí… [señala], si los colocamos todos estarán en una línea recta como ha dicho S. [otra alumna]. Este es el conjunto de puntos que están a la misma distancia de A y de B.

En esta interacción, el profesor se dispone a resolver el problema en la pizarra digital cuando la alumna dice haber encontrado “algún punto”. El profesor supera sus reticencias, tal como luego explicó en una entrevista, y hace que la alumna salga a resolver el problema. Ella resuelve el problema perfectamente incluso encontrando que la mediatriz es una línea recta, lo cual no se pregunta, y el profesor da por válida la respuesta. Mirado con una cierta retrospectiva y a raíz de lo hablado en la entrevista con el profesor, pedir a la alumna que resolviera sobre una pantalla en blanco y no sobre el programa utilizado en su portátil durante la sesión se debió a la falta de confianza en el dominio de los aspectos tecnológicos de la tarea. Más tarde durante la sesión, sin embargo, cambia la disposición hacia las posibilidades de participación de la alumna en el discurso matemático. El profesor enseña la idea de mediatriz como lugar geométrico en relación con otra tarea; luego presenta un problema con la imagen de la Figura 1 añadiendo un amigo (punto C) y solicitando un punto a igual distancia de los tres amigos. Entonces, el profesor se dirige a la alumna, que ya ha dibujado dos mediatrices, pero no el punto de intersección, y pone públicamente en valor la resolución en el portátil.

Profesor:	¿Sabes cómo se saca un punto en donde se cortan dos rectas? Pincha aquí y con el punto mides las distancias. Ya casi tienes solucionado el problema.

Alumna: ¡Me ha salido! ¡Mira! ¡Mide lo mismo! Ocho, ocho, ocho. Este es de este…
Profesor: Muy bien, ha encontrado el punto que está a la misma distancia. Le sale cero coma ochenta y ocho a los tres puntos, además lo ha hecho por el proceso correcto. Enséñaselo y explícale el proceso.

El profesor está pendiente de la contribución de la alumna y la vuelve a reforzar en su respuesta sobre la posición del incentro. El refuerzo es aún mayor cuando le pide que explique la respuesta a su compañera, que habitualmente tiene mejor desempeño en clase de matemáticas. El profesor tenía asentada la idea de que era una alumna con pocas capacidades matemáticas y de que se trataba de un grupo clase con poco interés en la materia. Esto llevaba a una desconfianza que se extendía a toda la práctica de enseñanza, con poca participación en la pizarra digital y modificaciones a la actuación diseñada, que revierten en más instrucción directa y menos participación de los alumnos en general y de la alumna del ejemplo. A pesar de esta gestión, la alumna logró encontrar espacios de participación en el discurso matemático y el profesor logró poner esto en valor. Este es un ejemplo del reto que supone contribuir, desde la enseñanza, al desarrollo de la competencia socioafectiva de los alumnos cuando hay representaciones que condicionan nuestras miradas a sus capacidades matemáticas y a las prácticas matemáticas en las que supuestamente se pueden desenvolver.

En esta sección y la anterior, hemos visto dos prácticas de enseñanza que ofrecen oportunidades de aprendizaje matemático mediante la exposición a formas del discurso matemático y la creación de espacios de participación en este discurso, también para los alumnos cuyas maneras de hablar, de comportarse y de vivir son distintas a las que tienden a valorarse en la escuela y en la sociedad. La exposición regular a formas del discurso matemático en combinación con el trabajo de tareas contextualizadas en entornos cercanos son prácticas que, si se gestionan equilibradamente en la enseñanza, reducen tensiones subyacentes a la educación matemática. Es importante que el profesor cree suficientes oportunidades de participación a los alumnos para avanzar en la construcción de conocimiento matemático antes de llevar a cabo una institucionalización o formalización del mismo (Arnal-Bailera y Planas, 2014). Esto cuestiona el sentido de anticipar, identificar o diagnosticar capacidades matemáticas cuando no se han ofrecido oportunidades para que estas capacidades se hagan visibles y desarrollen. Por otra parte, si no se acompaña a los alumnos en la transición hacia la utilización de formas del discurso matemático y hacia el reconocimiento de estructuras matemáticas en el trabajo con contextos cotidianos, es poco razonable esperar que el aprendizaje que se les pide sea una experiencia personal, social y académica positiva. Si bien las experiencias negativas de la matemática escolar no son resultado directo de las tensiones señaladas en este capítulo, varias de estas experiencias se gestan o agudizan con prácticas de enseñanza que descuidan puntos intermedios y se sitúan en los extremos.

Tensiones entre comunicación verbal y comunicación no verbal

Un tercer foco de tensiones en la educación matemática se da en el distinto valor que se acostumbra a dar a la comunicación verbal y a la no verbal en la enseñanza. La investigación en el área ha documentado la tendencia a valorar el modo de comunicación verbal por encima de otros modos de comunicación como el visual, incluso cuando las representaciones matemáticas que se trabajan son de naturaleza gráfica (Planas y Ngoepe, 2019; Nairouz y Planas, 2016). En esta sección, volvemos a proponer la búsqueda de equilibrios entre extremos con el argumento de que en los puntos intermedios se crean más oportunidades de aprendizaje matemático y de participación en el discurso matemático. La comunicación no verbal en la enseñanza de matemáticas, como ocurre con las lenguas informales y los contextos cotidianos, a menudo se esgrime como un recurso para aulas donde supuestamente se debe 'compensar' o 'remediar' la falta de dominio de la lengua de instrucción, o determinadas dificultades en el desarrollo y en el aprendizaje. Esta visión está a la vez ligada a la utilización casi exclusiva de la lengua de instrucción (hablada y escrita) como recurso de enseñanza en las aulas donde no se han planificado actuaciones 'compensatorias' por razones de diversidad lingüística o de desarrollo en el aprendizaje. No obstante, el equilibrio entre comunicación verbal y no verbal es pedagógica y didácticamente necesario en cualquier aula de matemáticas. Lo que debe 'remediarse' es el uso exclusivo de la lengua de instrucción ya que participar en el discurso matemático incluye desenvolverse con fluidez en los distintos modos de comunicación matemática. No profundizaremos en la complejidad de remediar la 'ilusión', poco realista, de enseñar en aulas donde todos los alumnos tienen una única lengua, que es la misma y compartida con la del profesor. Tal como se discute en Planas et al., (2021), además de ser poco realista, esta ilusión tiene enormes implicaciones en cómo se generan y distribuyen los espacios de participación en clase.

Trabajar con materiales y representaciones matemáticas visuales

Las representaciones verbales y las simbólicas no son las únicas del discurso matemático. Las representaciones visuales ocupan una enorme importancia (DePiper et al., 2021) a través de creaciones gráficas como diagramas o dibujos que ilustran cantidades, relaciones cuantitativas, relaciones geométricas, patrones numéricos y algebraicos, etc. Usar e interpretar creaciones gráficas con significado matemático es parte del trabajo matemático en cualquier aula de cualquier etapa. A continuación, mostramos ejemplos del uso de representaciones visuales en la enseñanza de la divisibilidad en un aula trilingüe con el inglés como lengua de instrucción. Lejos de comunicar la idea de que los materiales visuales son una medida 'compensatoria' en aulas de matemáticas con alumnos que no dominan la lengua de instrucción, lo que pretendemos es argumentar que los materiales multimodales son recomendables para la enseñanza con cualquier grupo de alumnos ya que contribuyen, en particular, a desligar el concepto matemático en sí mismo de su representación. Veamos el siguiente episodio en torno a la noción de número par:

Profesor:	¿Cómo sabes si un número es par?
Alumna 1:	De pequeña me ayudaba de los dedos de una mano. Por ejemplo, cuatro hacía como parejitas… y si por ejemplo era el tres, se quedaba suelto porque era impar.
Profesor:	Parejitas… muy buena forma para comprenderlo.

La Figura 2 muestra varios de los materiales multimodales proporcionados a lo largo de las sesiones para la enseñanza de la divisibilidad; las clases fueron en inglés pero reproducimos los materiales en castellano. En uno de ellos, el número se relaciona con el cuerpo: se ve el gesto de los dedos agrupados de dos en dos con los textos "los números pares se pueden emparejar" y "los impares no se pueden emparejar". En otro material, recordando los números rectangulares pitagóricos, el número se relaciona con la geometría: se ve un diagrama rectangular con puntos agrupados y otro con un punto suelto. Estos agrupamientos facilitan asociar el número par con la división exacta del número entre dos y el número impar con la división de residuo uno. Se comunican así significados para los conceptos de número par y de número impar mediante representaciones geométricas que son diagramas rectangulares de puntos y gestos de la mano. De esta manera, además, se pone énfasis en la estructura de estas dos clases de números y no en la cantidad que indican. Este modo de comunicación con materiales y representaciones visuales favorece que los alumnos noten e identifiquen dos clases de números desde el punto de vista estructural.

Para ofrecer oportunidades de asociar la noción de número par con la divisibilidad entre 2 y ser múltiplo de 2, se plantearon tareas como: ¿Pueden cinco personas jugar al ajedrez a la vez sin que sobre ninguna? Los diagramas de puntos fueron retomados en la resolución de una tarea en la que se pedía elaborar frases con significado matemático a partir del enunciado: "la suma/producto de dos números pares/impares es siempre/no puede ser número par/impar":

Alumno:	La suma de dos números impares es un número par.
Profesor:	¿Par? ¿Puedes explicarnos de forma más clara este enunciado?
Alumno:	Pues que tenemos una cantidad de algo en una mano, por ejemplo, nueve. Si vas agrupando de dos en dos y te sobra uno…Y en la otra mano igual también te sobra uno. Entonces esos dos los agrupamos y forman otra pareja.

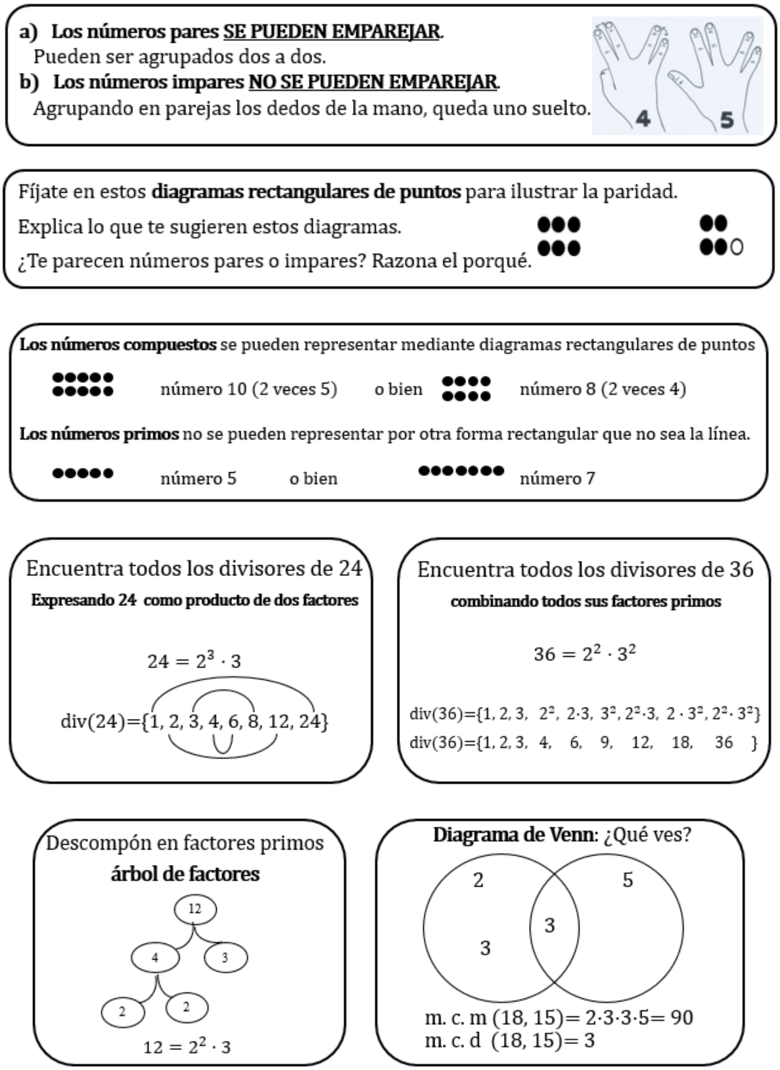


Figura 2. Ejemplos de materiales multimodales en el experimento de enseñanza

También se emplearon modelos rectangulares de puntos para clarificar la idea de número primo y número compuesto. Por lo general, las definiciones de número primo en los libros de texto se formulan a partir de una condición lógica, “si solo admite como divisores al 1 y a sí mismo”, o bien contienen una negación, “no tiene más divisores que 1 y sí mismo”. La comprensión de estas definiciones precisa de explicaciones durante la enseñanza. Se explicó la noción de número primo con una disposición en fila formando un único producto entre el número 1 y él mismo, y así se sugirió que es suficiente con que exista otra forma de agrupar para tener un número compuesto.

Al mantener la misma representación geométrica que con las clases de números par e impar, se propició la comprensión de relaciones entre estas clases y las clases de números primo y compuesto. Con otros materiales se explicó la factorización aritmética mediante los divisores de un número expresados con el número como producto y con la combinación de factores primos. Además, se utilizaron materiales con diagramas de factorización en árbol para números primos y diagramas de Venn (ver Figura 2) para dar significado visual a los procedimientos aritméticos de obtención del mínimo común múltiplo y del máximo común divisor. En el diagrama de árbol, no se necesita el concepto de número primo para descomponer los productos. A lo largo de las sesiones, se introdujeron tareas como resolver si el número 3^{23} es par o impar:

Alumno:	Es impar.
Profesor:	¿Por qué dices que es impar?
Alumno:	Porque al multiplicar un impar por otro impar el resultado siempre es impar.
Profesor:	Muy bien. Y si estuviera elevado a treinta que es un número par, ¿cam biaría la cosa?
Alumno:	No, no cambiaría nada porque la base sigue siendo tres que es un número impar.

Surgieron retos importantes puesto que algunos alumnos seguían priorizando calcular en vez de aplicar razonamientos matemáticos basándose en la representación del número, incluso con números relativamente grandes. Cuando el profesor preguntó si el número $2 \cdot 5497+5$ es par o impar, por ejemplo, una alumna respondió: “Es impar porque si lo multiplicas por dos, siete por dos son catorce y cuatro más cinco son nueve.” Estos son ejemplos del equilibrio entre comunicación verbal y no verbal en la enseñanza de contenidos no geométricos, que dieron lugar a interesantes discusiones y a la identificación de retos en el aprendizaje. En la sección anterior ya se sugirió la importancia de las representaciones gráficas, aunque al ser ejemplos de la enseñanza de geometría mediada por tecnologías digitales, el recurso de la multimodalidad resulta más transparente por obvio. Ahí, las pantallas del programa de geometría dinámica ofrecen representaciones gráficas estandarizadas de objetos geométricos, mientras que los materiales visuales de la Figura 2 ofrecen representaciones gráficas algo menos estandarizadas de objetos aritméticos. Para cualquier contenido del currículo, el discurso matemático es siempre de naturaleza multimodal y la participación en este discurso y en su construcción siempre requieren del manejo de representaciones verbales y no verbales.

El reto de la educación matemática (inclusiva)

Empezábamos el capítulo con la sección titulada ‘El reto de la educación matemática inclusiva’. Esperamos haber dado argumentos suficientes para comunicar la idea de que este es en realidad el reto de la educación matemática, y de que para lograr este reto debemos buscar equilibrios y combinar prácticas de enseñanza, varias de las cuales pueden plantearse de manera simultánea. La inclusión no es un dilema o una opción, sino un proceso hacia la consecución de una educación matemática de mayor calidad. Creemos haber dado algunos ejemplos útiles para el recorrido de este proceso. Acabamos con un último ejemplo de tarea matemática que se propuso en una clase de secundaria y que dio lugar a las tres prácticas de enseñanza resaltadas por separado a lo largo del capítulo.

Compartir formas del discurso matemático, contextualizar tareas matemáticas en entornos cercanos y trabajar con materiales y representaciones matemáticas visuales

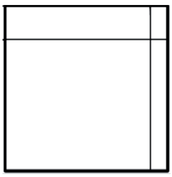
La siguiente tarea matemática se inspira en la organización de treinta minutos de lectura por semana en un curso de un centro de secundaria y en la distribución de tipos de libro, con un total de 30 libros en los estantes de la sala de descanso del centro. La profesora introdujo así la tarea:

Iremos cada viernes a la sala de descanso y haremos lectura antes del patio, cada uno con el libro que le toque de los que hemos traído de la biblioteca. Os voy a dar una pista sobre qué libro os puede tocar. La probabilidad de que os toque una novela corta es 0.9 y la probabilidad de que os toque un cómic es 0.2. ¿Cuál es entonces la probabilidad de que os toque una novela gráfica?

Un alumno rápidamente respondió:

> La posibilidad de que me toque una novela gráfica es de 1.1, muy baja

La profesora dibujó un cuadrado en la pizarra, representó las dos probabilidades como áreas y empezó así su explicación:



> Tú dices que la probabilidad de que te toque una novela gráfica es la suma de 0.9 y 0.2. Yo digo que la probabilidad de que te toque es la multiplicación de 0.9 y 0.2. ¿Por qué crees que he dibujado este cuadrado?

En esta tarea, el contexto cercano se identifica en la utilización de la sala de descanso que los alumnos tienen en el centro, con una biblioteca improvisada para sesiones semanales de lectura. La comunicación no verbal se identifica en el diagrama de la probabilidad mediante el modelo del cuadrado y de las áreas que la profesora dibuja en la pizarra. Las formas del discurso matemático se identifican en el vocabulario, con la sustitución de "posibilidad" por "probabilidad" y la distinción entre "suma" y "multiplicación" de probabilidades, y en las explicaciones acerca del motivo para dibujar el cuadrado, e.g.: "Podemos pensar que las probabilidades se comportan como áreas y que la probabilidad de que os toque un cómic es un área bastante más pequeña que la probabilidad de que os toque una novela corta". Estas tres prácticas de enseñanza comparten varios elementos. Ninguna de ellas busca eliminar las tensiones, sino resolverlas, en el sentido de encontrar puntos de equilibrio.

Las tensiones que surgen entre lenguas formales e informales (e.g., probabilidad y posibilidad en el ejemplo de esta sección) no se resuelven haciendo desaparecer las unas en favor de las otras, sino planteando tareas matemáticas que conecten con una lengua informal y que, a su vez, ofrezcan oportunidades para precisar significados mediante la lengua del discurso matemático. De manera similar, la resolución de tensiones entre comunicación verbal y no verbal (las explicaciones y el dibujo del cuadrado) implica asumir que el significado de los objetos matemáticos (probabilidad, probabilidad condicionada) será tanto más rico y completo cuanto mayor sea la diversidad de registros y representaciones involucradas en la enseñanza. La propia conexión del discurso probabilístico con el correspondiente gráfico en la resolución de una tarea es un acto matemático. Ni el gráfico sirve de ayuda, como a veces parece dar la impresión, ni el simbolismo numérico-algebraico es el único registro matemático riguroso. En cuanto a la resolución de tensiones entre contextos académicos y cotidianos (cálculo de probabilidades, asignación del libro de lectura al azar), se trata de reconocer que lo importante es que el contexto con potencial matemático sea significativo para los alumnos; es decir, que conecte con sus experiencias, sea en contextos escolares o en contextos cercanos de fuera del aula o de la propia dinámica del centro. Otro elemento común en las tres prácticas es que requieren culturas de aula que permitan y valoren significados personales y que creen espacios de interacción y participación en el discurso matemático. Las pedagogías matemáticas guiadas por la resolución de problemas (o de tareas matemáticamente interesantes) en general cumplen con estas condiciones y están en la línea de los equilibrios que hemos destacado.

Hablar de la resolución de problemas en matemáticas es ciertamente otro foco de tensiones en la enseñanza. De ello habló extensamente Mari Luz Callejo a lo largo de su trayectoria investigadora (e.g., Vila y Callejo, 2004), tal como se recoge en el libro homenaje que el grupo de Didáctica de la Matemática de la Universitat d'Alacant (GIDIMAT) publicó en 2021, 'Ideas para la educación matemática. Perspectivas desde el trabajo de Mª Luz Callejo de la Vega'. Por un lado, las pedagogías matemáticas para la resolución de problemas tienen una concepción instrumental de la matemática escolar. Tras la exposición del conocimiento, se pide a los alumnos que lo apliquen para resolver ejercicios y, quizás más adelante, problemas para los cuales se presentan estrategias generales y heurísticas. Por otro lado, las pedagogías matemáticas a través de la resolución de problemas plantean la construcción del conocimiento mediante la participación en tareas de resolución de problemas diseñados con la intención de hacer emerger el contenido planificado (Beltrán-Pellicer y Martínez-Juste, 2022). Los alumnos primero se enfrentan a problemas sin haber recibido instrucción sobre los contenidos que se quieren enseñar. Así se busca promover la reflexión y la indagación en torno a estrategias de resolución. El profesor luego utiliza las respuestas de los alumnos para organizar una puesta en común que permita introducir conceptos y los alumnos resuelven otros problemas para afianzarlos. Estas pedagogías contienen la enseñanza de heurísticas y la aplicación de contenidos. Ante estas tensiones entre dos aproximaciones a la resolución de problemas en la enseñanza, seguimos alejados de cualquier extremo porque todas las pedagogías tienen ventajas e inconvenientes según donde pongamos los énfasis en cada momento. Debemos, no obstante, buscar equilibrios que superen las concepciones meramente instrumentales de la matemática escolar.

Hay muchas más tensiones con implicaciones en la educación matemática, algunas de las cuales se explican mejor desde la perspectiva de la enseñanza, aunque tengan impacto en el aprendizaje. Por ejemplo, los profesores de matemáticas tienden a reproducir las pedagogías y comportamientos que han vivido como alumnos, otorgándoles el crédito de su propio éxito (Wright, 2017). Esto origina tensiones entre la seguridad de las pedagogías conocidas y la sospecha hacia las desconocidas. Los alumnos experimentan tensiones similares cuando no están habituados a culturas de aula donde se les pide un papel activo en la construcción del discurso matemático. Vila y Callejo (2004) comentaron la resistencia al cambio hacia pedagogías más participativas en alumnos que buscan seguridad en la instrucción o bien que tienen perfiles competitivos e individualistas, para los cuales estas pedagogías suponen una complicada demanda afectiva y generan rechazo. No debe cederse, sin embargo, en la iniciación de prácticas inclusivas de enseñanza porque estos otros alumnos, que parecen estar cómodos con pedagogías centradas en la instrucción, tienen que aprender a participar en la construcción del discurso matemático y no solo a reconocer este discurso cuando lo desarrolla el profesor en clase o cuando lo ejemplifica el libro de texto.

A todo esto, hay que añadir las eternas tensiones asociadas a los procesos institucionales de calificación y rendición de cuentas, que de nuevo deben resolverse en puntos intermedios que creen y mantengan espacios de evaluación formativa. A pesar de las numerosas recomendaciones pedagógicas y didácticas de orientar la evaluación a generar oportunidades de mejora y progreso en el aprendizaje, desde las políticas educativas se sigue exigiendo cuantificar para ordenar y certificar. Un foco en la calificación lleva al desarrollo de culturas de aula que ordenan y clasifican a los alumnos mediante prácticas competitivas que reproducen y amplifican desigualdades generalmente asociadas a cuestiones de estatus socioeconómico, de la misma forma que acostumbra a favorecer a alumnos por delante de alumnas (Macho et al., 2020). No debemos dar más importancia a la calificación que la que realmente tiene. Que haya tres momentos a lo largo del curso en los que rendir cuentas en un boletín de calificaciones, no implica que deba certificarse cualquier actividad. El foco en la evaluación formativa proporciona múltiples evidencias de aprendizaje que sirven tanto de información al profesor para adaptar y diseñar sucesivas tareas matemáticas y prácticas de enseñanza, como de guía al alumno en la regulación de sus procesos de aprendizaje. Estas evidencias son, además, especialmente visibles cuando se propicia la participación en el discurso matemático.

La enseñanza de las matemáticas es en definitiva compleja, como también se hará notar en otros capítulos de este volumen. No es realista plantear como objetivo eliminar las múltiples tensiones asociadas o, más general, simplificar la complejidad. Es cuestión de asumir que la complejidad y las tensiones van a surgir de manera inevitable en las prácticas de enseñanza y qué, según cómo las gestionemos, van a ser obstáculos para el aprendizaje de los alumnos o aliados de un proyecto de educación matemática más inclusivo y de mayor calidad. Nuestra responsabilidad es encontrar equilibrios que ofrezcan oportunidades de participar en el discurso matemático a todos los alumnos.

Agradecimientos

Grupo “Investigación en Educación Matemática” (S60_20R), Gobierno de Aragón. Grup d’Investigació en Pràctica Educativa i Activitat Matemàtica (GIPEAM), Govern de Catalunya. PID2019-104964GB-100 “Usos matemáticamente relevantes del habla del profesor en la enseñanza de contenidos de la matemática escolar”. Agradecemos a Jordi Deulofeu y a Natalia Múnera sus comentarios a versiones preliminares del capítulo.

Referencias

Adler, J. y Ronda, E. (2017). Mathematical discourse in instruction matters. En J. Adler y A. Sfard (Eds.), *Research for educational change: Transforming researchers’ insights into improvement in mathematics teaching and learning* (pp. 64-81). Routledge.

Alsina, À. y Planas, N. (2008). *Matemática inclusiva: Propuestas para una educación matemática accesible*. Narcea.

Arnal-Bailera, A. (2014). Utilizando gráficas y tablas para comparar distintos procesos de elección. *Épsilon, 88*, 55-56.

Arnal, A. y Planas, N. (2013). Uso de tecnología en el aprendizaje de geometría con grupos de riesgo: Un enfoque discursivo. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 157-164). SEIEM.

Arnal-Bailera, A. y Planas, N. (2014). La actividad docente de un profesor: geometría, tecnología y grupos de riesgo. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 147-155). SSEIEM.

Beltrán-Pellicer, P. y Giacomone, B. (2021). Una propuesta didáctica de probabilidad para el comienzo de la secundaria. *Educação Matemática Pesquisa, 23*(4), 246-272.

Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2020). An onto-semiotic approach to the analysis of the affective domain in mathematics education. *Cambridge Journal of Education, 50*(1), 1-20.

Beltrán-Pellicer, P. y Martínez-Juste, S. (2021). Enseñar a través de la resolución de problemas. *Suma, 98*, 11-21.

Beltrán-Pellicer, P. (2022). El teorema de Pitágoras a través de la resolución de problemas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 25*(1), 149-169.

Blanco, L. J. (2012). Influencias del dominio afectivo en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 171-185). Graó.

Brügner, G. (1984). Three –Triangle–Tangram. *Bit, 24*, 380-382.

Callejo, M. L. (2015). Aprender a (enseñar) matemáticas. Prácticas de resolución de problemas, creencias y desarrollo profesional. En N. Planas (Ed.), *Avances y realidades de la educación matemática* (pp. 93-112). Graó.

DePiper, J. N., Louie, J., Nikula, J., Buffington, P., Tierney-Fife, P. y Driscoll, M. (2021). Promoting teacher self-efficacy for supporting English learners in mathematics: Effects of the visual access to mathematics professional development. *ZDM-Mathematics Education, 53*(2), 489-502.

GIDIMAT (2021). *Ideas para la educación matemática. Perspectivas desde el trabajo de Mª Luz Callejo de la Vega*. Editorial Compobell.

Gil, N., Blanco, L. y Guerrero, E. (2005). El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 2*, 15-32.

Goñi, J. M. y Planas, N. (2011). Interacción comunicativa y lenguaje en la clase de matemáticas. En J. M. Goñi (Ed.), *Didáctica de las matemáticas* (pp. 167-197). Graó.

Macho, M., Padrón, E., Calaza, L., Casanellas, M., Conde, M., Lorenzo, E. y Vázquez, M. E. (2020). Igualdad de género en el ámbito de las matemáticas. *Libro Blanco de las Matemáticas* (pp. 375-420). RSME y Fundación Ramón Areces.

Moschkovich, J. N. (Ed.) (2010). *Language and mathematics education: Multiple perspectives and directions for research*. Information Age Publishing.

Nairouz, Y. y Planas, N. (2016). La actividad matemática en un aula con estudiantes sordos y oyentes. *Números, 93*, 15-29.

Planas, N. (Ed.) (2015). *Avances y realidades de la educación matemática*. Graó.

Planas, N., Arnal-Bailera, A. y García-Honrado, I. (2018). El discurso matemático del profesor: ¿Cómo se produce en clase y cómo se puede investigar? *Enseñanza de las Ciencias, 36*(1), 45-60.

Planas, N., Morgan, C. y Schütte, M. (Eds.) (2021). *Classroom research on mathematics and language: Seeing learners and teachers differently*. Routledge.

Planas, N. y Ngoepe, M. G. (2019). Right to learn mathematics: From language as right to language as mathematically relevant resource. En C. Xenofontos (Ed.), *Equity in mathematics education: Addressing a changing world* (pp. 93-110). Information Age Publishing.

Serrano, L., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria. *Educación Matemática, 10*, 7-25.

Skovsmose, O. y Godoy Penteado, M. (2015). Mathematics education and democracy: An open landscape of tensions, uncertainties, and challenges. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 359-373). Routledge (3ª ed.).

Vila, A. y Callejo M. L. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar: El papel de las creencias en la resolución de problemas*. Narcea.

Wright, P. (2017). Critical relationships between teachers and learners of school mathematics. *Pedagogy, Culture y Society, 25*(4), 515-530.

Desarrollar las competencias de resolución de problemas y modelización para aprender matemáticas

Develop problem solving and modelling competences to learn mathematics

Jordi Deulofeu Piquet[a], Abraham de la Fuente Pérez[b]
[a] *Universitat Autònoma de Barcelona,*
[b] *Universitat Autònoma de Barcelona y Institut Angeleta Ferrer*

Resumen

Un currículum como el que se acaba de aprobar es una oportunidad para reflexionar sobre los grandes objetivos de las matemáticas escolares, las ideas clave y el papel de las actividades en el aula para un aprendizaje competencial. En este currículum la resolución de problemas y la modelización aparecen como competencias específicas y por lo tanto como objetivos fundamentales de aprendizaje, además de considerarlas también como procesos que permiten aprender matemáticas. El capítulo se centra en estas dos competencias, distinguiendo entre aprender a resolver problemas matemáticos y aprender matemáticas resolviendo problemas. El enlace con la modelización se realiza desde el análisis de los distintos contextos y su interés tanto para construir las matemáticas como para aplicarlas a una variedad de situaciones. A lo largo del capítulo se introducen ejemplificaciones tanto de situaciones-problema como de su gestión en el aula.

Palabras clave: Competencias matemáticas, Resolución de problemas, Modelización, Contextos, Actividades de aprendizaje de las matemáticas.

Abstract

A competency-based curriculum such as the one that has just been approved is an opportunity to reflect on the main objectives of school mathematics, the key ideas, and the role of classroom activities for competency-based learning. In this curriculum, the resolution problem solving and modeling appear as key competencies. The chapter focuses on these two competencies, distinguishing between learning to solve mathematical problems and learning mathematics by solving problems. The link with modeling is made from the analysis of the different contexts and their interest both to build mathematics and to apply them to a variety of situations. Throughout the chapter, we introduce exemplifications of both problem situations and suggestion in the classroom.

Keywords: Mathematical competences, Problem solving, Modeling, Contexts, Mathematics learning activities.

Introducción

La publicación de un nuevo currículum es una buena oportunidad para reflexionar sobre los objetivos de la educación en nuestro país y de cada una de las disciplinas, así como sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje de estas. Este cambio curricular, significativo porque se centra en la adquisición de competencias, coincide con el XXV aniversario de la SEIEM. Por lo tanto es un buen momento para mirar hacia atrás y reflexionar con cierta perspectiva sobre el conjunto de aportaciones que, desde la investigación en didáctica, se han realizado durante este tiempo en el marco de esta sociedad y, en particular, en los simposios anuales de la misma y que, por diversas circunstancias, quizá no han trascendido lo suficiente a todo el profesorado de matemáticas que es quien, en última instancia, debería poder utilizar los resultados de estas investigaciones, para lograr que el conjunto de aportaciones redunden en una mejora de la enseñanza de las matemáticas.

Partimos del enfoque competencial en el cual, como dicen Niss y Højgaard (2019), lo importante no es sólo lo que sabes, sino cómo lo sabes y lo que puedes hacer con lo que sabes. En este marco, el capítulo se dedica a dos grandes competencias matemáticas como son la resolución de problemas y la modelización, y tiene como objetivo mostrar una panorámica de las mismas para ayudar a interpretar el enfoque competencial del nuevo currículum, tanto de Educación Primaria como de Educación Secundaria (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022a, 2022b); nos apoyamos en trabajos relevantes sobre el tema en el marco de la investigación en Didáctica de las Matemáticas.

En el segundo simposio de la SEIEM una ponencia abordó la importancia de la resolución de problemas (Callejo y Carrillo, 1998), y diez años después en el simposio de Badajoz (Luengo et al., 2008) se dedicó un seminario a la resolución de problemas, con ponencias de Castro, Matos y Santos Trigo y coordinación de Luis Puig. Este, en su texto de presentación, realizó una interesante retrospectiva cuyo título *Presencia y ausencia de la resolución de problemas, en la investigación y en el currículum* (Puig, 2008), ya da a entender que la resolución de problemas, a pesar de su relevancia, no ha tenido una presencia sostenida ni en la investigación didáctica ni en el currículum, y solo se ha tratado con cierta profundidad en periodos concretos. Las causas de este hecho son múltiples y complejas, pero estamos convencidos de que, con la introducción de un modelo competencial, la resolución de problemas va a volver a tener un papel relevante, como contenido y también como uno de los ejes de la enseñanza de las matemáticas, puesto que en todos los modelos de tipo competencial la resolución de problemas tiene el carácter de competencia fundamental.

Más recientemente, en el simposio de la SEIEM de Valladolid (Marbán y otros, 2019), se dedicó un seminario a la modelización, con ponencias de Carreira, Ferrando y Greefrath. La coordinadora del seminario, Berta Barquero, en su ponencia *Perspectivas internacionales sobre la enseñanza y el aprendizaje de la modelización matemática*

(Barquero, 2019), plantea algunos de los logros relacionados con la modelización, como su caracterización como competencia y, sobre todo, su inclusión a lo largo de nuestro siglo en diversos proyectos, como PISA (OECD, 2019) y también en los currículums de diversos países. Pero al mismo tiempo, señala algunas dificultades, como la brecha entre los avances de la investigación y el impacto efectivo de la misma en las aulas, la compatibilidad con la evaluación o las posibilidades de difusión de dicha investigación en la formación del profesorado, entre otros. También plantea algunas preguntas relevantes, como el papel de la modelización en cada país, el debate sobre su significado y sobre su enseñanza-aprendizaje, el impacto en las reformas curriculares y las investigaciones llevadas a la práctica.

En este capítulo se hará referencia a la resolución de problemas como competencia específica y como guía del proceso de enseñanza de las matemáticas. Se seguirá con la competencia de modelización, destacando el papel de los contextos al aprender matemáticas, entendidos como el origen de las situaciones a modelizar, pero también como apoyo a la construcción de conceptos matemáticos, lo que permite relacionar resolución de problemas y modelización con sus puntos de contacto y sus diferencias. Se acabará con una breve referencia a la evaluación de la resolución de problemas.

Queremos finalizar esta introducción recordando a dos de los principales investigadores de la SEIEM en el ámbito de la Resolución de Problemas que nos han dejado en los últimos tiempos: Mari Luz Callejo y Pepe Carrillo, a quienes dedicamos este trabajo. Muchas de sus investigaciones constituyen aportaciones muy relevantes no sólo en resolución de problemas sino también en el desarrollo profesional de docentes y la formación del profesorado de matemáticas.

Las competencias como centro del currículum

La enseñanza efectiva de las matemáticas requiere entender qué sabe el alumnado y qué necesita aprender y, a partir de esta información, provocarlo, estimularlo y acompañarlo para que realice un buen aprendizaje. El alumnado debe entender las matemáticas que va aprendiendo, debe poder construir nuevo conocimiento activamente a partir de sus experiencias y de sus conocimientos anteriores, estableciendo unas conexiones que lo incorporen en su red personal de saberes.

Así pues, un currículum de matemáticas debería responder a las preguntas: ¿qué matemáticas queremos que aprendan nuestros alumnos? ¿Por qué queremos que aprendan esas matemáticas? ¿Cómo las deben aprender? ¿Cuándo y cómo se debe llevar a cabo su enseñanza? ¿Qué resultados muestran el logro de los aprendizajes? La actual propuesta de currículum del Estado Español (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022a, 2022b) tiene como punto de partida en su diseño, desarrollo e implementación en el aula, la alfabetización matemática:

> "La alfabetización matemática es la capacidad de un individuo de razonar matemáticamente y de formular, emplear e interpretar las matemáticas para resolver problemas en una amplia variedad de contextos de la vida real. Esto incluye conceptos, procedimientos, datos y herramientas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a conocer el papel que cumplen las matemáticas en el mundo y hacer los juicios y tomar las decisiones bien fundamentadas que necesitan los ciudadanos reflexivos, constructivos y comprometidos del siglo XXI." (OECD, 2021, p.11).

Esta definición supone que, al terminar la etapa obligatoria, los estudiantes deberán ser capaces de usar su conocimiento de los contenidos matemáticos para reconocer la naturaleza matemática de una situación (problema), especialmente de aquellas situaciones que forman parte de la vida real, y luego formularla en términos matemáticos. El proceso de matematización de un problema implica transformar una situación confusa y ambigua de la vida real en un problema matemático bien definido. Esto exige un razonamiento matemático. El problema matemático resultante necesita resolverse usando los procedimientos, algoritmos y conceptos matemáticos aprendidos, pero será necesario tomar decisiones estratégicas sobre la selección de estas herramientas y el orden de su aplicación, para lo cual también se recurre al razonamiento matemático. El proceso de matematización termina con la necesidad del estudiante de evaluar la solución matemática interpretando los resultados en la situación original de la vida real.

En coherencia con las ideas anteriores y de acuerdo con Niss y Højgaard (2011), el currículum estructura esta alfabetización a través de la competencia matemática, es decir, de la habilidad para comprender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de contextos matemáticos y no matemáticos. Y tanto la resolución de problemas como la modelización son competencias específicas en la categorización que hacen Niss y Højgaard (2019) de la competencia matemática.

La resolución de problemas como competencia específica y objeto de aprendizaje

Dentro del marco de competencias descrito en el punto anterior, la resolución de problemas ocupa un lugar destacado que se expondrá y justificará en este apartado. Para ello se hará referencia a la importancia de los problemas, tanto para las matemáticas como para la Educación Matemática, para seguir con la idea de problema que se maneja en este capítulo y que es similar a la utilizada en el currículum. En el último punto de este apartado, se aborda el desarrollo de la resolución de problemas con las competencias y los contenidos asociados, y se ejemplifica la que se considera que es la parte más relevante de este proceso: la búsqueda de un camino para resolver un problema, para lo cual se toma en consideración el desarrollo de herramientas y estrategias heurísticas.

Aprender a resolver problemas, ¿para qué?

En cualquier currículum basado en la adquisición de competencias matemáticas o en el desarrollo de los procesos fundamentales de estas, la resolución de problemas ocupa un lugar destacado e indispensable, y esto es así por distintos motivos, todos ellos relevantes para una educación matemática de calidad: su importancia para las matemáticas, para la educación matemática y para la formación personal y profesional de las personas.

En un conocido artículo sobre el papel de los problemas en las matemáticas, Halmos decía:

> "¿En qué consisten realmente las matemáticas? ¿En axiomas, como el postulado de las paralelas? ¿En teoremas, como el teorema fundamental del álgebra? ¿En conceptos, en definiciones, en teorías, en fórmulas, en métodos? La matemática seguramente no existiría sin todos estos ingredientes, todos son esenciales, pero ninguno de ellos es el corazón de la disciplina, puesto que la principal razón de existir de un matemático es resolver problemas y, por lo tanto, en lo que realmente consiste la matemática es en [plantear] problemas y [encontrar sus] soluciones" (Halmos,1980, p.519).

De modo parecido podríamos plantearnos cuál es el lugar de la resolución de problemas en la educación matemática, y preguntarnos por qué la resolución de problemas tendría que ser el núcleo de la enseñanza de las matemáticas.

En este sentido, entendemos que un trabajo en el aula donde la resolución de problemas ocupe un lugar relevante contribuye a lograr, entre otros, los siguientes objetivos:

- Ayudar a los alumnos a progresar en su autonomía a través del planteamiento de problemas que les lleven a tomar decisiones, a comprender las informaciones que reciben, a ser críticos con aquello que se les presenta y con aquello que hacen, y a ser creativos para encontrar caminos que proporcionen vías para diseñar estrategias de resolución.
- Desarrollar la mayoría de las grandes competencias de las matemáticas como pensar, razonar, modelizar, utilizar técnicas, comunicar y argumentar, así como contribuir a una construcción significativa del conocimiento matemático propio.
- Mostrar lo que son realmente las matemáticas y crear interés por ellas como parte importante del conocimiento generado por la humanidad, relevante tanto por él mismo como por sus aplicaciones.
- Dar sentido al hecho de plantearse problemas y al reto que supone tratar de resolverlos, en un sentido amplio, útil y necesario para el desarrollo tanto personal como profesional de una persona.

Si se aceptan los objetivos anteriores como aspectos nucleares de la educación matemática, pronto surgen diversas preguntas desde el punto de vista didáctico:

- ¿Qué problemas son adecuados en las diferentes etapas y en qué momentos del proceso de aprendizaje será más adecuado plantearlos?
- ¿Cómo hay que introducir y gestionar en el aula las actividades centradas en la resolución de problemas?
- ¿Qué actitudes hay que favorecer en el alumnado en relación con la actividad de resolver problemas?
- En definitiva ¿qué problemas constituyen actividades de aprendizaje competencialmente ricas? y ¿cómo gestionar la clase para ayudar a los alumnos a aprender matemáticas, tanto conceptos, como técnicas y procesos, mediante la resolución de problemas?

¿Qué se entiende por problema?

La delimitación de lo que se entiende por problema es necesaria para comprender su relevancia en la formación matemática del alumnado. En este sentido es necesario empezar diciendo que los problemas escolares estándar -caracterizados por un enunciado verbal que contiene de manera explícita los datos necesarios para su resolución y solo estos, cerrados, es decir, de solución y método único y planteados de modo que el alumno debe identificar cuál es ese método, que ha sido previamente enseñado a menudo justo antes de proponer el supuesto problema- no son auténticos problemas de matemáticas, porque lo que se pretende con ellos es que el alumnado los resuelva por clasificación, y tienen la finalidad de comprobar si se conocen e identifican las técnicas necesarias para ello.

Para concretar lo que se entiende por problema, se parte de lo que expresa Polya (1964) cuando dice que la idea de problema es amplia y, sobre todo, que tratar de resolver un problema es buscar de manera consciente un camino para lograr un objetivo claramente concebido, pero no accesible de modo inmediato. Y de manera consecuente, el punto central para *resolver un problema* es encontrar este camino.

Avanzando un poco más, cuando se hace referencia a un problema para el aula de matemáticas, surgen otros elementos necesarios relacionados con el aprendizaje. En este sentido partimos de la siguiente caracterización:

> "Una situación, planteada con finalidad educativa, que propone una cuestión matemática cuyo método de solución no es inmediatamente accesible al alumno o grupo de alumnos que intenta resolverla, porque no dispone de un algoritmo que relacione los datos y la incógnita o de un proceso que identifique automáticamente los datos con la conclusión, y por lo tanto deberá buscar, investigar, establecer relaciones, implicar sus afectos, etc… para afrontar una situación nueva." (Vila y Callejo, 2004, p.31).

Hay un elemento que se revela como esencial en la definición anterior: una actividad matemática para el aula puede ser un problema para un alumno y no serlo para otro, por lo que hay un cierto carácter subjetivo, no absoluto, que es necesario tener en cuenta. También el momento en el que se introduce la actividad puede hacer que esta sea realmente un problema o no.

¿Qué debería abordar el desarrollo del proceso de resolución de problemas?

Como se verá más adelante, la resolución de problemas es algo más que un conjunto de competencias matemáticas puesto que puede constituir un organizador de la enseñanza. Sin embargo, conviene plantearse si debe existir un aprendizaje explícito de la resolución de problemas.

En el seminario de la FESPM realizado en Madrid y en Castro Urdiales en 2017 (Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, 2018) dedicado a la resolución de problemas, se consideraron los principales objetivos de la enseñanza de la resolución de problemas que se muestran en la tabla 1.

Tabla 1. Objetivos de la enseñanza de la resolución de problemas (FESPM, 2018)

Elaborar, desarrollar y utilizar razonamientos y técnicas heurísticas como herramientas para la resolución de problemas. 1. Llegar a ser consciente de los procesos de razonamiento que se desarrollan al resolver problemas mediante la heurística y saber gestionar dichos procesos. 2. Considerar que la resolución de un problema no finaliza cuando se obtiene la solución, sino tras la fase de revisión y extensión del proceso realizado. 3. Adoptar una postura crítica ante los mensajes, informaciones y situaciones diversas, aplicando el estilo heurístico de resolución de problemas para analizarlos, confrontarlos, sacar conclusiones y tomar las decisiones más adecuadas. 4. Generar y elaborar ideas, planes y todo tipo de recursos personales para la resolución de problemas, practicando y reflexionando sobre distintas técnicas que ayuden a desarrollar la creatividad. 5. Mostrar actitudes propias de la actividad matemática: recogida, exploración y clasificación ordenada de la información, cuestionamiento y crítica constante, flexibilidad y apertura para aceptar otras ideas debidamente argumentadas y capacidad de comunicar resultados y procesos. 6. Conocer y valorar las propias habilidades y aptitudes para la resolución de problemas afrontando y superando los bloqueos propios del proceso de resolución.

Aunque la formulación es distinta, existe una clara relación entre las competencias específicas de matemáticas del nuevo currículum y los objetivos mencionados en la tabla 1 y se defiende que estos mantienen su validez en relación a la resolución de problemas. En concreto, aquellas competencias del currículum que se refieren de forma específica al proceso de resolver problemas se relacionan con las distintas fases de dicho proceso, desde la lectura y comprensión del enunciado hasta la revisión de las soluciones, pasando por el diseño de un plan de acción y su correspondiente aplicación.

Por otra parte, se ha comentado en el punto anterior que una característica clave en la resolución de un problema es la búsqueda de un camino, un plan, que posibilite su resolución. Centrarse en el aprendizaje de este proceso (objetivos 1 y 2) significa fundamentalmente posibilitar la práctica de las principales heurísticas, planteando problemas que muestren el valor de estas y que las expliquen, especialmente en aquellos casos que es posible realizar un trabajo específico para su desarrollo.

Para una reflexión sobre las heurísticas y su carácter de herramientas para resolver un problema nos remitimos al libro *Elementos de resolución de problemas* (Puig, 1996). Así mismo, en la tabla 2 mostramos una lista de algunas de las heurísticas clasificadas en dos grupos: aquellas de carácter general que difícilmente pueden enseñarse de manera explícita, pero que sí pueden practicarse y aprenderse y que llamamos estrategias heurísticas y aquellas más concretas, que llamamos herramientas heurísticas por entender que admiten una enseñanza concreta.

Tabla 2. Relación de heurísticas. Elaboración propia a partir de Polya (1945) y Puig (1996)

Estrategias heurísticas	- Realizar pruebas, experimentar con los datos y las condiciones -Utilizar ensayo y error -Realizar un trabajo sistemático -Buscar pautas o regularidades -Analizar casos particulares -Simplificar datos y condiciones -Estudiar un problema más general -Dividir el problema en partes -Relacionar el problema con un análogo conocido -Usar conceptos clave: paridad, simetría, principio del palomar -Conectar conceptos, definiciones y representaciones
Herramientas heurísticas	-Visualizar relaciones (con dibujos, y/o esquemas) -Construir tablas y diagramas de árbol para organizar y analizar los datos. -Elegir un lenguaje adecuado y/o una codificación -Introducir elementos auxiliares / escalones intermedios -Empezar por el final / suponer el problema resuelto

La extensión del capítulo no permite ejemplificar cada una de las heurísticas anteriores, pero sí proponer un problema para ver que en su resolución se pueden movilizar diversas heurísticas tanto de carácter general como herramientas específicas.

ENUNCIADO PROBLEMA. En un hotel con 100 habitaciones, numeradas del 1 al 100, hay 100 personas también numeradas del 1 al 100 que hacen el siguiente juego: el primero abre todas las puertas. El segundo cierra las puertas pares. El tercero cambia las puertas múltiplos de 3 (abre si está cerrada o cierra si está abierta), el cuarto las que son múltiplos de 4 y así hasta la última persona que solo mueve la puerta de la habitación 100. Después de pasar todas las personas, ¿qué puertas quedarán abiertas?

Sin entrar a discutir la gestión de este problema como actividad matemática para el aula, algo que se hará más adelante con otro ejemplo, en el proceso de resolución pueden surgir o utilizarse diversas heurísticas.

Una manera de empezar es ver qué sucede con las primeras puertas, es decir, *realizar pruebas, experimentar con los datos y las condiciones* y también *estudiar casos particulares*. Si se hace esto, al margen de decidir cuántas puertas se prueban, surge una cuestión: ¿cómo organizamos los datos? Esto lleva a *buscar un lenguaje/codificación adecuada* y a disponer los datos de una manera que facilite su análisis. Una posibilidad es *hacer una tabla de doble entrada*, personas / puertas. Con ello se llega a la *búsqueda de un patrón o regularidad* (números cuadrados u otros equivalentes, por ejemplo, crecimiento según los números impares: 1+3+5+7+…). Todo este proceso conduce a la posibilidad de realizar una conjetura y, para llegar aquí, han surgido cinco posibles heurísticas.

Sin duda el problema no ha finalizado: ¿es válida la conjetura?, ¿por qué son estos números? De acuerdo con Polya, con estas preguntas se provoca que se inicien en otro tipo de problemas (de demostrar), cuyas heurísticas son, en general, distintas a las anteriores y tienen relación con el razonamiento matemático, en concreto, con la argumentación, la deducción y la demostración. Aunque ya podrían haber aparecido anteriormente, es en esta parte donde aparecen las conexiones entre conceptos (en este caso: divisor, número de divisores –par o impar-, números cuadrados), sus caracterizaciones y representaciones.

Aunque en este punto se focaliza la atención en las heurísticas como contenido de aprendizaje, lo cierto es que, al elegir un problema para llevar al aula, además de las heurísticas que pone (o puede poner) en juego, hay que tener en cuenta otros factores, todos ellos relevantes, como son: el contexto del problema (o de la situación), la formulación y presentación del mismo, el tipo de problema (construcción / prueba), las posibilidades de generalización y/o de inmersión en otros problemas más amplios (campo de problemas), así como los conceptos y/o técnicas curriculares involucrados en su resolución.

Aprender matemáticas por medio de la resolución de problemas

Tanto la resolución de problemas como la modelización, que se abordará más adelante, no son únicamente competencias relevantes, sino que pueden convertirse en algo más transversal que permita diseñar una manera de desarrollar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. En el aula se debe poner el foco, por un lado, en la interrogación, ya que hacer y hacerse preguntas es incluso más relevante que hallar respuestas. Y, por otro lado, en los contextos, que son necesarios tanto para construir los conceptos matemáticos de naturaleza abstracta, como para aplicarlos, juntamente con las técnicas, a otras situaciones en otros contextos distintos.

En este apartado se desarrollará la primera de estas ideas: introducir las preguntas y los problemas de manera habitual en la clase.

La resolución de problemas como ambiente para el aula de matemática

En la introducción del primer currículum de Catalunya en el que se incluyó, aunque todavía de manera poco estructurada, la idea de competencia (Departament d'Educació, 2007) se indica que la competencia matemática debe adquirirse a partir de contextos que tengan sentido, tanto para el alumnado como para el conocimiento matemático que se pretende desarrollar.

Siguiendo con esta idea, en la misma introducción se expresa que aprender con significado es fundamental para capacitar al alumnado en el uso de todo lo que aprende y para que pueda continuar aprendiendo, de forma autónoma, a lo largo de la vida. Para ello, es necesario proporcionar en todas las clases de matemáticas oportunidades para que el alumnado aprenda a pensar matemáticamente, proponiendo actividades de aprendizaje donde la resolución de problemas, en un sentido amplio, sea el núcleo de la enseñanza.

De acuerdo con Abrantes (1996) gestionar la clase de manera que en el aula haya un ambiente de resolución de problemas servirá para mostrar que los problemas son mucho más que un contenido a enseñar y también más que una competencia específica. Son una manera de enseñar matemáticas, o mejor dicho, un instrumento de aprendizaje.

En efecto, si la actividad de resolver problemas adquiere suficiente relevancia y continuidad en el conjunto de propuestas del aula de matemáticas, podremos cambiar el foco y pasar de "aprender a resolver problemas" a "aprender resolviendo problemas".

Incluso si no se ha llegado a una presencia muy elevada en el uso de problemas como actividades de aprendizaje en el aula (alcanzar este punto es una tarea larga y compleja), como expresan Vila y Callejo (2004) y también se recoge en Deulofeu y Vila (2021), un trabajo con problemas en el aula con una cierta continuidad puede ser ya algo muy valioso, si se pone el foco en desarrollar las propias capacidades del alumnado, en valorar los procesos y los progresos logrados, en discernir lo relevante de lo que no lo es, en confiar en los criterios propios y, por encima de todo, en evitar el temor a equivocarse, aceptando que los errores son indispensables para aprender, que muchas veces es necesario cambiar de punto de vista y también que es necesario revisar las creencias propias, aceptando ayudas cuando sea necesario.

Si se pretende introducir un ambiente de interrogación será necesario que las actividades de aprendizaje, así como su gestión, lo promuevan de manera constante y una de las principales consecuencias de este hecho es que en las clases las preguntas y los problemas deberán estar presentes desde el principio.

No se trata pues de enseñar conceptos y herramientas matemáticas para después aplicarlos a la resolución de problemas, sino partir de estos para ayudar a construir y dar significado a los conceptos necesarios y luego abordar otros problemas en los que se puedan usar y consolidar dichos conceptos.

Problemas para ayudar a construir conceptos y técnicas

De acuerdo con lo anterior, la selección de los problemas según su objetivo en el aprendizaje de las matemáticas resulta una tarea esencial. Arcavi (1999) mostró diversos ejemplos de las distintas funciones de los problemas como actividades para construir las matemáticas en el aula. En concreto, proponía una reflexión sobre dos problemas como los siguientes:

A) Queremos organizar una comida con las familias en la escuela y disponemos de mesas en las que caben 6 personas. Si sabemos que se han apuntado 84 personas a la comida, ¿cuántas mesas necesitaremos?

B) Una piscina de forma rectangular tiene una superficie de 84 m^2 y su anchura es de 6 metros. ¿Cuál es la longitud de la piscina?

Se trata de dos problemas que se podrían considerar estándares y cuya resolución es matemáticamente equivalente; sin embargo, para que resulten verdaderos problemas, su lugar en el proceso de aprendizaje es muy distinto. El primero puede servir para preparar la introducción de la división, si se propone antes de la enseñanza de esta: los alumnos tratarán de resolverlo por métodos informales y poco a poco irán mejorando sus métodos acercándose a un cierto algoritmo para dividir y mostrando el interés de conocer una determinada técnica más comprimida y efectiva.

En cambio, el segundo problema, que se resuelve mediante la misma división, no es adecuado para preparar su introducción, ya que incluye elementos más complejos -en este caso geométricos- y una idea de división subyacente distinta. Ambos pueden tener su lugar, pero el primero tiene especial interés cuando se sitúa como actividad inicial mientras que el segundo, no.

El siguiente ejemplo muestra cómo un problema nos puede ayudar a aprender a utilizar el lenguaje algebraico. El alumnado ha trabajado con generalizaciones y ha usado las letras para representar cantidades e incluso ha simplificado expresiones algebraicas sencillas, pero no ha resuelto ecuaciones de primer grado. Se puede plantear la resolución del siguiente problema:

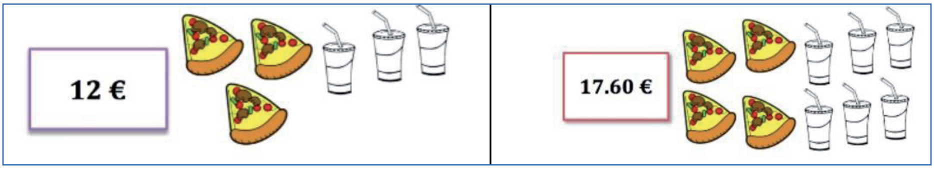


Figura 1. Problema planteado en lenguaje icónico. Elaboración propia

¿Cuál es el precio de una porción de pizza? ¿Y el de una bebida?

En la figura 2 se aportan tres producciones de tres alumnos que lo resuelven siguiendo diferentes estrategias. En la resolución 1, una alumna resuelve el problema dividiendo la primera condición por 2 y restando esta cantidad de 12 €, que es lo que vale la segunda condición. Así consigue saber que una pizza cuesta 3,2 €. En la resolución 2, se ve cómo otra alumna hace paquetes de una pizza y una bebida, sabiendo que cada paquete cuesta 4 € a partir de la segunda condición. Como puede hacer 4 paquetes de 4 euros, solo tiene que restar 16 € de 17,60 € para saber lo que cuestan dos bebidas. Y así, dividiendo entre dos el resultado, averigua el valor de una de ellas. La segunda resolución, además de ser diferente, está expresada de una manera que permite leer e interpretar el pensamiento de la alumna de forma más clara. En de la Fuente (2016) se muestra cómo un profesor necesita de la interpretación de la primera alumna para poder entender su razonamiento y, en cambio, esto no pasa con la segunda producción ni con la tercera. Esta última sigue un procedimiento muy similar a la resolución 2, pero con una representación muy cercana a lo que esperaríamos del uso del lenguaje algebraico para la resolución de sistemas de ecuaciones.

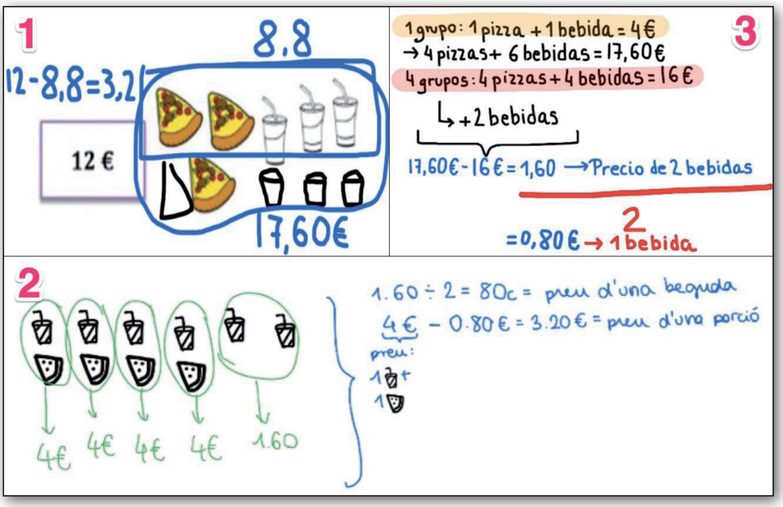


Figura 2. Producciones de alumnos. Elaboración propia

En conclusión, este problema y, en particular, su formulación icónica, permite a los alumnos desarrollar estrategias de resolución de modo que, por el hecho de tener que explicar la resolución con detalle, empiezan a utilizar lenguajes similares al lenguaje algebraico.

Para el profesor de matemáticas, lo que están haciendo estos alumnos es resolver sistemas de ecuaciones y realmente es lo que los alumnos hacen, pero no lo están haciendo mediante el uso del lenguaje algebraico, sino mediante razonamientos aritméticos.

Podemos continuar proponiendo a los alumnos los problemas que vemos en la figura 3.

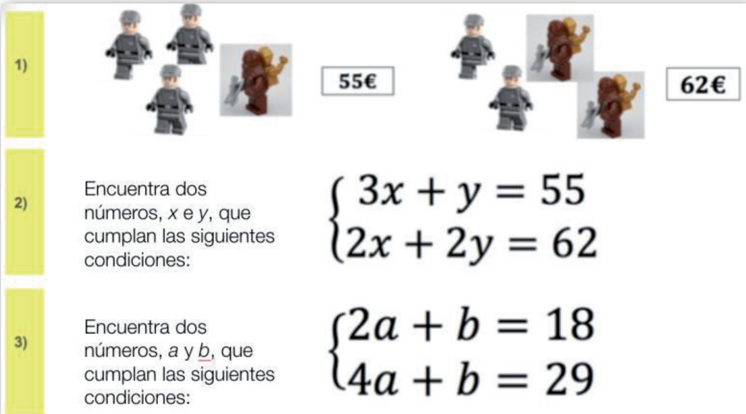


Figura 3. Secuencia de tres problemas. Elaboración propia

De acuerdo con de la Fuente et al. (2016), los alumnos pueden usar su experiencia previa para avanzar en la resolución. Es decir, las estrategias icónicas que van aprendiendo mientras resuelven problemas les sirven para resolver problemas puramente algebraicos mediante la transferencia de aquellas estrategias al nuevo lenguaje. En la figura 4, se puede ver cómo dos alumnos resuelven el segundo problema, que es equivalente al primero. El primer alumno explica la relación que encuentra entre los dos problemas identificando las incógnitas del segundo problema con los iconos del primer problema. El segundo reproduce la estrategia que utilizó en la resolución del primer problema, expresándola algebraicamente. Cuando este segundo alumno fue preguntado sobre por qué volvió a hacer el problema si ya se había dado cuenta que le serviría la misma estrategia, él explicó que no había visto la relación al principio, sino cuando estaba a punto de acabar el problema y que prefirió acabarlo de esa manera para comunicar la solución de manera que se pudiera entender.

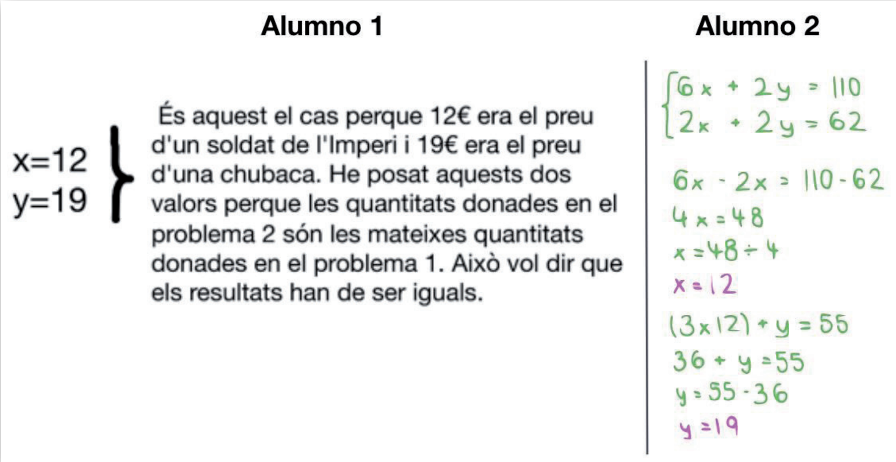


Figura 4: Dos resoluciones distintas del segundo problema

Además, el hecho de que los problemas se pueden resolver de más de una manera permite a los docentes conducir discusiones que ayudan a conectar diferentes representaciones de una misma resolución (resolución 1 y 2) o conectar diferentes formas de razonar (de la Fuente y Deulofeu, 2022).

Para lograr que efectivamente los problemas sean una herramienta potente para aprender matemáticas en todos los sentidos, es deseable que esta actividad esté presente de manera regular en el aula, de modo que a los aspectos que se acaban de señalar sea posible añadir otros igualmente relevantes. Entre estos, acompañar al alumnado a entender que sus conocimientos le ayudarán a responder las preguntas formuladas, ayudarles a ser conscientes que en ocasiones dichos conocimientos son insuficientes para abordar determinadas cuestiones, despertando así la necesidad de incorporar nuevos conocimientos o bien a reestructurar los que ya se conocen. También, para posibilitar la construcción de otros conocimientos que adquirirán sentido al contribuir a responder determinadas preguntas complejas.

Se puede concluir, por tanto, que estas tareas permiten que los alumnos construyan sus propios métodos para resolver sistemas de ecuaciones a través de la resolución de problemas. Pero no hay que olvidar que la gestión por parte del profesor es indisociable del aprendizaje, tal y como se verá más adelante. Una parte muy relevante de esta gestión es el uso de las conexiones, también relacionada con la modelización, tema que se desarrollará en el siguiente apartado.

Problemas para desarrollar la práctica

De la misma manera que se plantean situaciones problemáticas para introducir conceptos, también es posible plantearlas para desarrollar la práctica de técnicas y algoritmos, que son necesarios pero que no son un fin en sí mismo. Se trata de presentar actividades de práctica productiva y no reproductiva, es decir, usando las técnicas y algoritmos para lograr un objetivo distinto al de realizar operaciones. Con su desarrollo se encontrarán más elementos de resolución de problemas que en la mayoría de los llamados problemas aritméticos (y/o algebraicos) escolares (Calvo et al., 2016). Este es un ejemplo en el campo numérico:

Observa los siguientes pares de multiplicaciones:

$$33 \cdot 34 \quad y \quad 32 \cdot 35$$
$$28 \cdot 29 \quad y \quad 27 \cdot 30$$
$$76 \cdot 77 \quad y \quad 75 \cdot 78$$

¿Existe alguna relación entre los resultados de los dos pares de multiplicaciones? ¿Sabrías proponer otros dos pares en los que suceda lo mismo? ¿Qué condiciones deben darse para que suceda siempre lo mismo? ¿Podrías justificarlo?

Este tipo de actividades, donde la práctica es necesaria como punto de partida, es decir, dentro de la parte inicial de la actividad que se podría llamar de experimentación, puede generarse para todos los niveles y son especialmente útiles para tratar la diversidad del aula. A continuación, se aporta otro ejemplo, esta vez en el campo algebraico:

Tenemos un sistema de dos ecuaciones de la forma:

$$a\,x + b\,y = c$$

$$d\,x + e\,y = f$$

Sustituye las letras a, b y c por tres números pares consecutivos y las letras d, e y f por tres números impares consecutivos. Resuelve el sistema. Haz lo mismo cambiando los números, pero manteniendo las mismas condiciones. ¿Qué observas? ¿Crees que sucederá siempre lo mismo?

Como antes, para poder saber qué sucede es necesario resolver por lo menos dos sistemas y quizás un tercero para realizar una conjetura plausible.

Hacia la modelización matemática: la relevancia de los contextos

En los trabajos sobre el proyecto danés KOM (Niss y Højgaard, 2011, 2019), se estructuran las 8 competencias matemáticas consideradas en dos grandes grupos: las relacionadas con hacer preguntas y hallar respuestas “en”, “con” y “sobre” las matemáticas (pensar y razonar matemáticamente, resolver problemas y modelizar) y aquellas relacionadas con el manejo del lenguaje y las herramientas (representar, comunicar, usar símbolos y usar ayudas y herramientas).

En particular, siguiendo a Niss, la competencia de modelización (también llamada de modelación) implica, por un lado, analizar los fundamentos y propiedades de los modelos matemáticos existentes, así como evaluar su alcance y validez, lo que implica, entre otras cosas, ser capaz de decodificar e interpretar los elementos y resultados del modelo en términos de la situación real que se supone que deben modelar. Por otro lado, la competencia de modelización implica ser capaz de realizar un modelado activo en un contexto dado y aplicarlo a situaciones externas a las propias matemáticas.

Se puede afirmar que la modelización es la competencia que se desarrolla cuando utilizamos las matemáticas para analizar y resolver situaciones no matemáticas, pero también cuando se utilizan estas situaciones para interpretar los modelos matemáticos, en un proceso dialéctico entre el mundo (en el sentido más amplio del término) y las matemáticas.

Cuando el nuevo currículum se refiere al uso de situaciones de la vida cotidiana, algo que sucede reiteradamente, se entiende que lo hace en este doble sentido, tratando de establecer una relación entre una situación conocida por el alumno (que se supone próxima y significativa) y un modelo matemático. Más adelante, al hablar de los contextos, se matizará y ampliará esta idea que posibilita distintas interpretaciones.

La modelización como proceso

Uno de los objetivos de las matemáticas es el de proporcionar modelos para comprender, interpretar y proporcionar soluciones a situaciones y problemas de campos muy distintos de las ciencias, las ciencias sociales y el mundo en general y es por eso que una de las grandes competencias de las matemáticas es la modelización. De acuerdo con Maaß (2006), se puede afirmar que para modelizar un problema real hay que moverse entre la realidad y la matemática. El proceso de modelización comienza en el mundo real: simplificando, estructurando e idealizando este problema se obtiene un modelo real. La matematización del modelo real conduce a un modelo matemático. Trabajando dentro de las matemáticas se obtiene una solución matemática, que tiene que ser primero interpretada y luego validada. Si la solución o el proceso elegido no resulta adecuado para el problema de la realidad, los pasos o incluso la totalidad del proceso de modelización necesita ser revisado. El propio Maaß sintetiza este proceso en el esquema que mostramos en la figura 5.

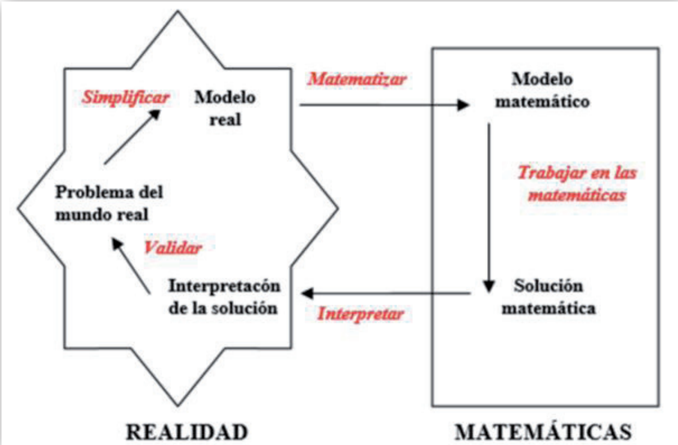


Figura 5. Fases del proceso de modelización de acuerdo con Maaß (2006)

El papel de los contextos: algunos ejemplos

Existe cierto paralelismo entre el proceso que se acaba de describir y el proceso de resolver un problema, pero son competencias claramente distintas, aunque con puntos en contacto. En cierta manera, se puede decir que cuando se resuelve una situación problemática externa a las matemáticas planteada en términos no matemáticos y lo hacemos usando las matemáticas estamos involucrando un proceso de modelización.

Un punto relevante que conecta la resolución de problemas y la modelización es el contexto (o la situación) en el que se enmarca el problema. A menudo, en los currículums se hace mucho hincapié en el contexto cotidiano, olvidando que se trata de un contexto difícil de acotar y subjetivo (por ejemplo, no es el mismo para alumnos que viven en entornos urbanos o en rurales). Es cierto que hay que partir de lo más próximo para ayudar a construir y también a aplicar conceptos y técnicas, pero existen una diversidad de contextos que tienen relevancia para el aprendizaje de las matemáticas y que pueden ser significativos para el alumnado, aunque su relación con lo cotidiano sea discutible.

Así, además del contexto cotidiano, hay que considerar el contexto real, distinto del anterior especialmente porque muchas situaciones del mundo pueden estar alejadas de muchos alumnos, es decir, fuera de su cotidianeidad, por ejemplo, interpretar el recibo de la luz u otras muchas situaciones, cuyo análisis desde el punto de las matemáticas puede ser significativo. Abordar situaciones socialmente relevantes es importante para entender el papel de las matemáticas y, en particular, de la modelización.

También es importante el contexto histórico, puesto que muchos de los conceptos que se trabajan en el aula sirvieron para resolver problemas en un momento determinado y hoy han perdido parte de su significado. Por ejemplo, Aristarco de Samos (s.

III a.C.) calculó las distancias del triángulo Tierra-Luna-Sol, utilizando la semejanza de triángulos. Hoy el uso de instrumentos basados en la tecnología láser realiza estas mediciones de manera muy distinta. También una mirada a la historia de las matemáticas ofrece situaciones y problemas que están en la génesis de conceptos clave como la probabilidad como herramienta para conocer si un juego de azar es favorable o no, o la idea de grafo para mostrar que el camino que quería realizar Euler, pasando una sola vez por todos los puentes de Königsberg, no era posible.

Otro contexto, que podría considerarse dentro de lo cotidiano, pero que tiene unas características específicas es el lúdico: las recreaciones y, sobre todo, los juegos son un magnífico contexto para desarrollar las matemáticas, la resolución de problemas y la modelización. En Navarro y Deulofeu (2016) se muestra que cuando los alumnos practican pequeños juegos de estrategia, aprenden a resolverlos, analizan posibles variantes y llegan a plantear y resolver generalizaciones, más allá de mejorar su capacidad para resolver este tipo de juegos, adquieren competencias (uso de códigos y lenguajes, uso de heurísticas, revisión y validación de soluciones) que les permitan afrontar con mayores garantías la resolución de problemas en otros contextos.

Un ejemplo de pequeño juego de estrategia, para los jugadores, es el Nim simplificado: hay 14 fichas sobre la mesa y en su turno, cada uno de los dos jugadores retira una o dos fichas (las que quiera). El jugador que quita la última, gana la partida. En grupos de cuatro juegan (experimentan) en equipos de dos jugadores, tratando de hallar la mejor manera de jugar; usando heurísticas como reducir el número de fichas, empezar por el final o hallar situaciones de equilibrio se llega a determinar qué jugador, el primero o el segundo, tiene ventaja y cómo debe hacerlo para ganar siempre. Una vez resuelto el juego, se pueden proponer generalizaciones sucesivas: primero, variando el número inicial de fichas y, a continuación, el número de fichas que se pueden retirar en cada turno. Finalmente, al expresar la estrategia en lenguaje matemático, surge la necesidad de utilizar conceptos de divisibilidad, entre ellos, el de resto de una división entera.

Finalmente, no se puede olvidar el propio contexto matemático. Aquí es posible plantear problemas en forma de reto, teniendo en cuenta que ciertos conceptos son más próximos al alumnado que otros. Como se ha mostrado antes, en este contexto se puede desarrollar una parte importante de la práctica de técnicas y rutinas mediante actividades denominadas de práctica productiva. Los problemas de contexto matemático también son importantes para conectar distintos contenidos y establecer relaciones entre ellos.

Veamos el siguiente ejemplo: Tenemos 6 cifras distintas, 1, 3, 4, 6, 7 y 9 y, con ellas, formamos dos números de tres cifras, sin repetir ninguna cifra, es decir, utilizándose todas. Por ejemplo: 147 y 369. ¿Cómo deberemos formar estos dos números si queremos que tanto la suma como el producto de los dos números sean los mayores posibles? ¿Qué sucede si cambiamos los seis números? ¿Sabrías justificarlo?

Lograr que la suma sea máxima (y constar que hay varias soluciones) no debería suponer una dificultad grande si el alumnado conoce el valor de posición de nuestro sistema de numeración, pero, en cambio, establecer una conjetura correcta sobre el producto máximo no resulta sencillo. Una comprobación experimental permitirá establecer el resultado y también conjeturar correctamente para cualquier otro conjunto de seis números. Sin embargo, justificar por qué el producto máximo se da cuando la diferencia entre los números es menor, exige establecer conexiones, primero con la geometría: dos números, su suma y su producto se relacionan con un rectángulo (las medidas de sus lados, el semiperímetro y el área respectivamente y, posteriormente, con el álgebra y las funciones (cómo varía el producto de dos números de suma igual).

Al ir avanzando en el desarrollo del ejemplo anterior, de contexto matemático, se van estableciendo numerosas conexiones entre distintos contenidos del currículum. Se parte de números enteros positivos y las operaciones de suma y resta, para pasar a la geometría: rectángulos -perímetro y área-y de aquí a las funciones mediante expresiones algebraicas y su representación gráfica.

Una actividad de modelización

Presentamos un ejemplo de una actividad llevada a cabo con alumnos de 3er curso de la ESO (Deulofeu et al., 2021), para mostrar una manera de trabajar la modelización en el aula. La situación se planteó en forma de reto, que consistía en encontrar el número adecuado de gomas elásticas para que un muñeco, lanzado sin ejercer más fuerza que la de la gravedad, al dejarlo caer desde una altura determinada, llegara lo más abajo posible, sin tocar el suelo cuando se ataba con estas gomas. De nuevo, no se puede separar la gestión del aula del planteamiento del problema para analizar los aprendizajes de los alumnos. La profesora planteó la situación, organizó la clase en grupos de 4 alumnos, facilitó un muñeco diferente a cada grupo y gomas elásticas iguales. A todos los grupos se les puso la condición de que no debían salir del aula, pero que dentro del aula no había más restricciones, excepto que los grupos no se podían comunicar estrategias entre ellos y que con la altura a la que les restringía la propia condición del aula, debían saber cuál sería la longitud de caída del salto en función del número de gomas que ataban al muñeco. También les dijo que esta relación entre el número de gomas y la longitud de caída del salto la tendrían que utilizar posteriormente para conjeturar el número de gomas que atarían a su muñeco para que el salto fuera de la máxima longitud posible (siempre sin tocar el suelo) desde una altura que todavía no conocían y sobre la cual sólo tendrían una oportunidad para probar. Hasta el último día dedicado a trabajar en esta situación, la profesora no desveló el lugar desde donde debían realizar el salto del muñeco: una pasarela en el patio del centro que está a 4,9 metros de altura. En la figura 6 se pueden ver a algunos alumnos haciendo los experimentos para establecer el modelo.

Figura 6. Un grupo de alumnos realizando el experimento

En síntesis, para ayudar a los grupos de trabajo a establecer su propio modelo, la profesora propuso a los alumnos que siguieran los siguientes pasos, que tienen relación con el proceso de modelización de Maaß (2006):

- Identificar las variables que intervienen en el problema y que se querían relacionar.
- Realizar diversos saltos trabajando en el aula, es decir, con alturas menores a la del reto final, y organizar los datos obtenidos.
- Disponer los distintos datos en una tabla o un gráfico para su análisis.
- Formular un modelo que les permitiera hacer una conjetura sobre el resultado.

En el primer punto, se está pidiendo a los alumnos que identifiquen la información del mundo real que les servirá para hacer su predicción, además de pedirles que encuentren la manera de medirla. De esta manera, se podrá matematizar la situación utilizando la representación que sea más conveniente (hay muchas opciones, desde el uso directo del gráfico, hasta el análisis algebraico de la situación). Finalmente, desde el mundo de las matemáticas podrán encontrar una solución que tendrán que comprobar en el mundo real. Y solo tendrán una opción, porque si la muñeca se golpea la cabeza…

El hecho de que el planteamiento de la tarea fuera abierto y que los alumnos trabajaran en pequeños grupos sin comunicación entre ellos, facilitó que la manera de afrontar la situación, de tomar datos y de encontrar el modelo fuera diferente para cada grupo. Por ejemplo, uno de los grupos utilizó la función de regresión de GeoGebra para encontrar la función lineal que modeliza matemáticamente la situación y llegó a la expresión: y = 16x + 30,8. Posteriormente tuvieron dificultades para utilizar esta información para resolver el problema de encontrar el número de gomas necesario para hacer el lanzamiento final, porque no sabían identificar las variables. En cambio, otro grupo hizo una predicción a través de un gráfico que dibujaron en un papel cuadriculado y con eso tuvieron suficiente para resolver el problema.

Otro aspecto interesante de esta experiencia es la evaluación que de ella se hizo. La profesora proporcionó a los diferentes grupos un diario de clase en el que cada grupo debía escribir las conclusiones a las que llegaba, lo que estaban aprendiendo y cómo lo estaban haciendo, para cada una de las sesiones realizadas. Dedicó un total de 3 sesiones a este problema, que ella planificó en: recogida de datos, búsqueda del modelo y uso del modelo para resolver el reto final. En cada sesión leía lo que habían hecho y hacía anotaciones en el diario para que al día siguiente los grupos lo tuvieran en cuenta antes de seguir procediendo. De esta manera, integró la evaluación en el proceso y esto fue posible gracias a la gestión diseñada: al hacer grupos independientes, no debía dar retroalimentación individual y esto podía hacerlo a diario. Cuando, posteriormente, quiso realizar una retroalimentación individualizada, propuso a los alumnos una reflexión sobre lo aprendido a partir de preguntas sobre el proceso de modelización realizado, que complementó con anotaciones individuales realizadas durante las sesiones dedicadas a este trabajo de modelización.

Otros ejemplos de modelización

De entre los muchos ejemplos para desarrollar la competencia de modelización en la educación obligatoria, queremos destacar los llamados problemas de Fermi. Son problemas abiertos y contextualizados en el mundo real que requieren una estimación basada en suposiciones razonadas sobre la situación del problema. Una característica específica de los problemas de Fermi es que no ofrecen toda la información necesaria para obtener una solución por lo que el contexto juega un papel relevante para establecer una estimación. Los problemas de Fermi son útiles para introducir la modelización matemática porque son accesibles para estudiantes de diferentes etapas educativas y no dependen de conocimientos matemáticos previos específicos. En general, pueden resolverse descomponiendo el problema original en subproblemas más simples y haciendo estimaciones razonables para cada subproblema para llegar a una solución de la pregunta original. En el proceso de resolución, los estudiantes deben especificar la estructura de la información relevante, generando en el proceso un modelo matemático (Albarracín y Gorgorió, 2014). A partir de esta forma de resolver problemas de Fermi, se han identificado conexiones con la modelización matemática en estudios que involucran el trabajo de estudiantes de secundaria (Ferrando et al., 2017) y también con estudiantes de primaria (Ferrando y Albarracín, 2021).

Sobre la evaluación de competencias

Uno de los puntos clave de cualquier reformulación del currículum es la evaluación, especialmente en aquellos casos en los que hay un cambio significativo, como sucede con la introducción de un marco competencial. En este contexto, surge una pregunta fundamental: ¿cómo evaluar el nivel competencial del alumnado? El tratamiento en profundidad que requiere este tema escapa de los objetivos de este capítulo, y ha sido abordado en este mismo libro en el capítulo 1.4, que lleva por título *La evaluación en Matemáticas*. Sus autores, Chamoso, Cáceres, y Cárdenas, presentan al final un interesante decálogo sobre los aspectos fundamentales de la evaluación.

Sin embargo, queremos hacer una breve aportación a dicha temática y en particular a los dos primeros puntos del decálogo: (1) Convierte la evaluación en un elemento para aprender y (2) Diseña criterios de valoración o rúbricas, precisos y adecuados, y ponlos a disposición de los estudiantes con antelación.

En efecto, la introducción de las competencias es una oportunidad para centrar la evaluación en su aspecto formativo más que en el acreditativo, es decir, entender la evaluación en su dimensión de contribuir a la mejora del aprendizaje. Como señala Sanmartí (2020), si no cambia la evaluación, difícilmente cambiará nada. Por lo tanto, una visión competencial del aprendizaje comporta cambiar qué, cómo, cuándo y por qué evaluar. Esta idea ya la habían planteado en el caso de la resolución de problemas Vila (1992) y Callejo (1996). Más adelante, Sanmartí (2020) añade otra consideración que nos parece fundamental: el alumnado percibe lo que es importante aprender a partir de lo que el profesorado valora, no tanto con palabras, sino cuando propone actividades concretas para evaluar los aprendizajes y cuando aplica unos determinados criterios de evaluación.

En el ejemplo de modelización mostrado en el punto anterior, ya se vio que una parte esencial de la evaluación se centra en la obtención de datos durante el proceso y, sobre todo, en la retroalimentación a los alumnos (en aquel caso a los grupos de trabajo). Existen otros instrumentos y otros métodos de evaluación que comparten la misma finalidad: proporcionar ayudas al alumnado para mejorar su aprendizaje.

Desde la perspectiva anterior, algunas de las prácticas de evaluación habituales dejan de tener sentido, porque ahora el objetivo es otro. Por ejemplo, ¿qué relevancia tiene, para la mejora del aprendizaje del alumnado, constatar si la solución de un problema es o no correcta o admisible, en una prueba de problemas al final de un proceso de enseñanza?

En cambio, teniendo en cuenta que la resolución de problemas es un proceso largo y complejo, será necesario ir obteniendo y compartiendo con el alumnado datos sobre el estado de desarrollo de dicho proceso y reflexionando sobre los mismos, para poder reconducir el camino e incidir en la mejora.

Un ejemplo concreto de instrumento para una evaluación formadora en resolución de problemas que tiene las características de un andamiaje educativo conocido como base de orientación (BO) se muestra en la tabla 3 y sintetiza de manera ordenada las acciones a realizar para resolver un problema, tratando de promover la planificación y revisión de sus acciones en el alumnado.

Tabla 3. Base de orientación de resolución de problemas (Deulofeu y Villalonga, 2018)

DIMENSIÓN	*ACCIONES*
Entiendo el problema	He leído lo que se expone, al menos dos veces Entiendo lo que pretende el problema He identificado y he entendido los datos
Trazo un plan de acción	He jugado con los datos He preparado una estrategia de resolución He comprobado que mi estrategia encaja bien con los datos
Aplico mi plan de acción	He implementado mi estrategia He recopilado mis acciones de manera que las entiendo He recopilado mis acciones de manera que los otros las entiendan
Reviso mi tarea	Cuando me atasco vuelvo al principio Cuando he finalizado, he comprobado mis respuestas He explorado otras respuestas y/o mejores soluciones

Los estudios realizados sobre el uso de una base de orientación de resolución de problemas (Villalonga y Deulofeu, 2017) con alumnos de primer ciclo de secundaria han mostrado que es una guía que les permite avanzar y que sirve también como catalizador para explicitar elementos metacognitivos (tomar conciencia del propio proceso de resolución y de las decisiones tomadas). Asimismo, el uso de la base de orientación se mostró relevante para detectar bloqueos y errores y para ayudar al alumnado a persistir en la búsqueda de otros caminos para resolver el problema.

La transformación de este instrumento en otro de carácter cíclico (Torregrosa et al., 2020, 2021) ha incrementado las posibilidades de este, adaptándose mejor al proceso de resolución de un problema, con sus avances y retrocesos, y concretamente, proporcionando ayudas para hacer emerger las acciones metacognitivas esenciales para mejorar los procesos de resolución.

Se ha constatado también que la realización de actividades de coevaluación y autoevaluación como métodos de retroalimentación durante la construcción y uso de una BO no lineal permite la construcción de bases mejor adaptadas y más utilizadas por el alumnado.

Esta evaluación debe incidir también en los aspectos metacognitivos, en el sentido de Schoenfeld (1992), y también a las ideas de Mason et al. (1988) sobre el monitor interior, contribuyendo a hacerlos explícitos y a mostrar su relevancia para el aprendizaje al alumnado.

Consideraciones finales

A lo largo del capítulo, se han tratado de caracterizar las competencias de resolución de problemas y de modelización que aparecen en muchas de las competencias específicas del nuevo currículum, tanto de Educación Primaria como de Secundaria.

La resolución de problemas es el corazón de las matemáticas y el motor de su aprendizaje. Cuando el ambiente de clase es realmente de resolución de problemas (es decir, cuando están presentes resoluciones que no son el resultado de la aplicación de una técnica, sino que requieren el uso de heurísticas, de formulación de conjeturas, de argumentos o de comparaciones) los alumnos tienen que conectar conceptos o traducir representaciones entre diferentes lenguajes. De manera general, podemos decir que un ambiente de resolución de problemas, o una enseñanza a través de la resolución de problemas, favorece el desarrollo del conjunto de competencias específicas en matemáticas presentes en el nuevo decreto curricular. Es decir, esta forma de enseñar proporciona un medio que posibilita aprender matemáticas de manera global.

De manera análoga, la modelización es el proceso por el cual establecemos conexiones entre las matemáticas y el mundo externo a ellas, mostrando que los modelos matemáticos pueden aplicarse a situaciones pertenecientes a campos muy diferentes, y que es necesario moverse del mundo a las matemáticas y viceversa. En este proceso intervienen acciones de tipo competencial como interpretar, seleccionar, tomar decisiones, traducir, aplicar técnicas, evaluar y reinterpretar soluciones, que refuerzan el valor de la modelización y su trabajo en el aula.

Nos parece pertinente terminar con una cita de Polya (1945) que, a pesar de su antigüedad, sigue conservando plena actualidad y en la cual reivindica el papel de la resolución de problemas, de las preguntas en el aula y de la función del profesorado de matemáticas como mediador del aprendizaje de sus alumnos:

> "Un profesor de matemáticas tiene una gran oportunidad. Si dedica el tiempo a ejercitar a sus alumnos con operaciones rutinarias, matará en ellos el interés, impedirá su desarrollo intelectual y acabará desaprovechando su oportunidad. Pero, si pone a prueba la curiosidad de sus alumnos, planteándoles problemas adecuados y les ayuda a resolverlos con preguntas estimulantes, podrá despertar el gusto por el pensamiento independiente, además de proporcionarles ciertos recursos". (Polya, 1945, p. 5)

Referencias

Abrantes, P. (1996). El papel de la Resolución de Problemas en un contexto de innovación curricular. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 8*, 7-18.

Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2014). Devising a plan to solve Fermi problems involving large numbers. *Educational Studies in Mathematics, 86*(1), 79-96. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9528-9

Arcavi, A. (1999). Y en matemáticas, los que instruimos ¿qué construimos? *Números*, *38*, 39-56.

Barquero, B. (2019). Una perspectiva internacional sobre la enseñanza y aprendizaje de la modelización matemática. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.) (2019). *Investigación en Educación Matemática XXIII.* (pp. 19-22). Consultable en https://www.seiem.es/pub/actas/index.shtml

Callejo, M. L. (1996). Evaluación de procesos y progresos del alumnado en la resolución de problemas. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 8*, 53-63.

Callejo, M. L. y Carrillo, J. (1998). Elementos de resolución de problemas, cinco años después. En J. R. Pascual (Ed.), *Actas del Segundo Simposio de la SEIEM* (pp. 87-105). SEIEM.

Calvo, C., Deulofeu, J., Jareño, J. y Morera, L. (2016). *Aprender a enseñar matemáticas en la Educación Secundaria*. Síntesis.

de la Fuente, A. (2016). Construcción del lenguaje algebraico en un entorno de resolución de problemas: El rol del conocimiento del profesor. Tesis (Doctorado en Didáctica de las Matemáticas). *Departament de Didàctica de les Matemàtiques i les Ciències Experimentals. Universitat Autónoma de Barcelona.*

de la Fuente, A. y Deulofeu, J. (2022). Uso de las conexiones entre representaciones por parte del profesor en la construcción del lenguaje algebraico. *BOLEMA*, *72*, 389-410. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a17

de la Fuente, A., Deulofeu, J. y Rowland, T. (2016). Conectar lenguajes para resolver ecuaciones. *UNO*, *74*, 68-73.

Departament d'Educació (2007). Currículum de l'Educació Secundària Obligatoria. Decreto 143/2007. Generalitat de Catalunya. http://culturaeducacio.gencat.cat/admin/uploads/docs/ 20160926140812X.pdf

Deulofeu, J., de la Fuente, A. y Vilaplana L. (2021). Funciones: modelización, representaciones y autorregulación. *UNO, 91*, 32-39.

Deulofeu, J. y Villalonga, J. (2018). Resolución de problemas y regulación del aprendizaje. *Educatio siglo XXI*, *36* (3), 153-175.

Deulofeu, J. y Vila, A. (2021). Aprender a pensar matemáticamente en ambientes de resolución de problemas. En GIDIMAT-UA (Eds.), *Ideas para la Educación Matemática. Perspectivas desde el Trabajo de Ma Luz Callejo de la Vega*. (pp.41-68). Compobell.

Federación Española Sociedades Profesores de Matemáticas (2018). *Conclusiones del seminario de resolución de problemas.* En https://fespm.es/index.php/2018/09/07/conclusiones-del-seminario-de-resolucion-de-problemas/

Ferrando, I. y Albarracín, L. (2021). Students from grade 2 to grade 10 solving a Fermi problem: Analysis of emerging models. *Mathematics Education Research Journal*, *33*(1), 61-78. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00292-z

Ferrando, I., Albarracín, L., Gallart, C., García-Raffi, L. M. y Gorgorió, N. (2017). Análisis de los modelos matemáticos producidos durante la resolución de problemas de Fermi. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 31*(57), 220-242. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a11

Halmos, P.R. (1980). The Heart of Mathematics. *American Mathematical Monthly*, *87* (7), 519-24

Luengo, R., Gómez, B., Camacho, M., Blanco, L. (Eds.) (2008). *Investigación en Educación Matemática XII*. SEIEM.

Maaß, K. (2006). What are modeling competencies? *ZDM: the international journal on mathematics education 38*(2), 113-142. DOI: 10.1007/BF02655885

Marbán, J. M., Arce, M., Maroto, A., Muñoz-Escolano, J. M. y Alsina, Á. (Eds.) (2019). *Investigación en Educación Matemática XXIII*. SEIEM.

Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1988). *Pensar Matemáticamente*. Labor-MEC. (VO 1982).

Ministerio de Educación y Formación profesional (2022a). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. BOE 2 de marzo de 2022.

Ministerio de Educación y Formación profesional (2022b). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria. BOE 30 de marzo de 2022.

Navarro, A. y Deulofeu, J. (2016). Aprendiendo a resolver problemas en un contexto de juegos de estrategia. *Suma*, *82*, 9-17.

Niss, M. y Højgaard, T. (Eds.) (2011). *Competencies and Mathematical Learning: Ideas and Inspiration for the Development of Mathematics Teaching and Learning in Denmark*. Ministry of Education Report (485). Roskilde University.

Niss, M. y Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies* in Mathematics 102, 9-28. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9

OECD. (2019). *PISA 2021 Mathematics Framework*. Draft. OECD Publishing.

Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press. Versión Española, *Como plantear y resolver problemas*. Trillas.

Polya, G. (1964). *Mathematical Discovery*. Vol 2. John Wiley and Sons.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Comares.

Puig, L. (2008). Seminario 2. Resolución de problemas: 30 años después. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L.J. Blanco (Eds.) (2008). *Investigación en Educación Matemática XII.* (pp. 19-22). Consultables en https://www.seiem.es/pub/actas/index.shtml.

Sanmartí, N. (2020). *Evaluar y aprender, un único proceso*. Octaedro.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). Macmillan.

Torregrosa, A., Deulofeu, J. y Albarracín, L. (2020). Caracterización de procesos metacognitivos en la resolución de problemas de numeración y patrones matemáticos. *Educación matemática, 32*(3), 39-67.

Torregrosa, A., Albarracín, L. y Deulofeu, J. (2021). Orientación y coevaluación: Dos aspectos clave para la evolución del proceso de resolución de problemas. *Bolema*, *35*(69), 89-111.

Vila, A. (1992). Per què avaluem? *BIAIX,1*, 5-9.

Vila, A. y Callejo, M.L. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar. El papel de las creencias en la resolución de problemas.* Narcea.

Villalonga, J. y Deulofeu, J. (2017). La base de orientación en la resolución de problemas: Cuando me bloqueo o me equivoco. *REDIMAT*, *6* (3), 256-282.

Entornos tecnológicos para el desarrollo del pensamiento computacional y de la competencia en resolución de problemas

Technological environments for the development of computational thinking and problem-solving proficiency

Diago, P. D.[a], del Olmo-Muñoz, J.[b], González-Calero, J. A.[b], Arnau, D.[a]
[a] *Universitat de València,*
[b] *Universidad de Castilla-La Mancha*

Resumen

Las nuevas directrices curriculares de enseñanzas mínimas para los niveles no universitarios, tanto a nivel nacional como internacional, han apuntado al pensamiento computacional como una de las habilidades imprescindibles del siglo XXI. Este trabajo aporta tres experiencias de aprendizaje basadas en entornos tecnológicos que permitirán desarrollar el pensamiento computacional en distintos niveles escolares a través de la robótica educativa, programación en bloques y DragonBox Algebra. Todas ellas, enlazadas con la competencia matemática en resolución de problemas y alineadas con la propuesta curricular de cada nivel educativo.

Palabras clave: Entornos tecnológicos, Pensamiento computacional, Resolución de problemas, Tecnología educativa.

Abstract

The new curricular guidelines for basic education for non-university levels, both nationally and internationally, have pointed to computational thinking as one of the essential skills for the 21st century. This work provides three learning experiences based on technological environments that allow the development of computational thinking at different school levels through educational robotics, block programming, and DragonBox Algebra. All three of these areas are linked to mathematical competence in problem solving and aligned with the curricular proposal of each educational level.

Keywords: Technological environments, Computational thinking, Problem-solving, educational technology.

La transformación tecnológica que viene acaeciendo en los últimos años ha hecho que las instituciones encargadas de la política educativa reconozcan la importancia de las habilidades relacionadas con el pensamiento computacional tanto en su faceta multidisciplinar como en su aplicación tecnológica a futuros empleos (European Schoolnet, 2015; FECYT, Google, y Everis, 2016; INTEF, 2018). Tanto es así, que el pensamiento computacional ha pasado a ser considerado como una competencia básica del siglo XXI (Consejo de la Unión Europea, 2018).

El pensamiento computacional puede ser entendido como un proceso de resolución de problemas, a la manera matemática (Pólya, 1957), donde se introducen restricciones tanto en el conjunto de instrucciones (lenguaje para expresarse - codificación) como en el conjunto de vías de resolución (formas válidas de resolución - reglas del lenguaje de codificación). Desde esta perspectiva, los entornos tecnológicos relacionados con los lenguajes de programación se convierten en escenarios privilegiados para el desarrollo del pensamiento computacional. A nivel educativo, Reino Unido fue el pionero en introducir la programación como parte de su currículum oficial para Educación Primaria en 2014 (Department for Education, 2013) y desde entonces, varios países europeos han incluido el desarrollo del pensamiento computacional entre las enseñanzas mínimas de las etapas de formación básica. En España, con objeto de adaptar el sistema educativo a los retos y desafíos del siglo XXI y, de acuerdo con los objetivos fijados por la Unión Europea y la UNESCO para la década 2020-2030, los nuevos documentos curriculares de todas las etapas no universitarias establecen el desarrollo de destrezas del pensamiento computacional. Además, se hace explícita su relación directa con la resolución de problemas, la generalización y los procesos algorítmicos en entornos tecnológicos.

El pensamiento computacional en educación matemática

El pensamiento computacional ha sido uno de los grandes actores del escenario educativo de los últimos años ligado, especialmente, al uso de la tecnología (Ilic et al., 2018). Su definición formal apareció en 2006, en la clásica publicación de Wing (2006). Allí se definía el pensamiento computacional como una aproximación a la resolución de problemas mediante el uso de estrategias de descomposición, diseño de algoritmos, abstracción y razonamiento lógico. Como bien apuntan muchos autores, en la definición del pensamiento computacional se entrelazan destrezas y procesos cognitivos que tradicionalmente han venido ligados a la resolución matemática de problemas (Glass, 2006; Grover y Pea, 2013; Shute et al., 2017). A pesar de la existente miscelánea de definiciones, todas ellas concuerdan en que el pensamiento computacional es “un enfoque para resolver un problema que faculta a la integración de las tecnologías digitales con las ideas humanas” (ISTE y CSTA, 2011, p. 8), favoreciendo así el uso, diseño y desarrollo de soluciones a problemas planteados en un entorno tecnológico como puede ser un robot programable o, de forma general, un ordenador.

Sin embargo, el pensamiento computacional no puede considerarse un recién llegado al campo de la educación en general y de la educación matemática en particular. En el año 1967, Wallace Feurzeig, Seymour Papert y Cynthia Solomon presentaron el lenguaje de programación *LOGO*. Aunque *LOGO* tenía características de un lenguaje de programación de propósito general, su diseño respondía a intenciones claramente educativas. De hecho, en Feurzeig et al. (1970) se presentaron los primeros resultados de experiencias con dicho lenguaje de programación en aulas de matemáticas de primaria y secundaria. En este artículo se apuntaba que una instrucción con un lenguaje de programación adecuado podría contribuir a la educación matemática en aspectos como: (a) facilitar la adquisición de un pensamiento y expresión rigurosos; (b) permitir la introducción de conceptos matemáticos clave, como la idea de variable; (c) proporcionar situaciones donde aplicar recursos heurísticos típicos de la resolución de problemas matemáticos; (d) fomentar la evaluación de las soluciones planteadas a partir de la retroalimentación automática proporcionada por el ordenador mediante el uso de un vocabulario formal desde el que organizar la discusión; (e) permitir la creación de experimentos matemáticos donde poner a prueba ideas; (f) posibilitar el contacto de las matemáticas con otras ciencias. El cambio de paradigma desde el que se aborda el uso de pensamiento computacional se pone de manifiesto en la siguiente reflexión:

> Nuestro interés no es enseñar programación como un tema auxiliar, sino explorar formas de usarla como base para un curso integrado de matemáticas. Esta concepción de la programación es distinta a otras ya familiares y valiosas de la enseñanza de la programación informática como habilidad práctica por sí misma o para ser utilizada en cursos especializados en aplicaciones numéricas, en matemáticas aplicadas, métodos computacionales y similares (Feurzeig et al., 1970, p. 17).

Desde el punto de vista de la didáctica de las matemáticas, y más específicamente desde la resolución matemática de problemas (Pólya, 1957), el pensamiento computacional puede ser considerado como un proceso de resolución en el que es necesario idear, generar, desplegar y gestionar estrategias que permitan abordar un problema con la restricción de que la solución debería poder ser implementada en un entorno tecnológico. Es claro, además, que este proceso de resolución exigirá la gestión de decisiones con el objeto de organizar una planificación estratégica y táctica desde el punto de vista meta-cognitivo para poder enfrentarse al problema (Schoenfeld, 1985). Desde esta perspectiva, el pensamiento computacional va más allá de la simple instrumentalización o competencia digital, pues permite tomar consciencia de los procesos que un entorno tecnológico es capaz de llevar a cabo y gestionarlos para elaborar un plan que permita hacer frente al problema planteado. En definitiva, el pensamiento computacional es un campo privilegiado donde desarrollar la enseñanza de la resolución de problemas como contenido.

En lo que sigue, describiremos, para distintos niveles, propuestas para el desarrollo del pensamiento computacional basadas en entornos tecnológicos. En ellas las soluciones tecnológicas han sido seleccionadas de acuerdo con algunas de las características y habilidades necesarias para desarrollar dicha destreza desde el enfoque de la competencia en resolución de problemas. Así, a pesar de que el desarrollo del pensamiento computacional puede realizarse en situaciones de enseñanza y aprendizaje que no requieran de la presencia física de un entorno tecnológico con los conocidos enfoques desenchufados (de su voz en inglés, *unplugged*; Brackmann et al., 2017), en esta propuesta centraremos la atención en el potencial de las propuestas enchufadas, es decir, aquéllas en la que el alumnado hace uso directamente de dispositivos o entornos tecnológicos. Una característica de los enfoques enchufados es la retroalimentación que el entorno tecnológico produce a la solución propuesta. Como veremos en la descripción de estas propuestas, el uso de este enfoque enchufado tiene una clara intención didáctica, pues ofrece entornos tecnológicos privilegiados para la aparición de habilidades de resolución de problemas, permiten la retroalimentación inmediata a la solución implementada por el usuario y, además, permite integrar contextos matemáticos y científicos con las herramientas tecnológicas desde las primeras edades escolares.

El pensamiento computacional en los nuevos currículos

Como describiremos a continuación, uno de los objetivos del currículo para la etapa de Educación Infantil es asentar las bases del pensamiento computacional mediante procesos sencillos y manipulativos que, progresivamente, ganarán en complejidad y requerirán mayor capacidad de abstracción (Real Decreto 95/2022). A partir de la Educación Primaria se propone el establecimiento explícito de relaciones entre el pensamiento computacional y su aplicación en la vida diaria a través de recursos tecnológicos, evidenciando la necesidad de que las soluciones obtenidas puedan ser ejecutadas por un sistema informático (Real Decreto 157/2022). Y, explícitamente, en los documentos que contemplan las enseñanzas mínimas para las etapas de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato se propone el desarrollo de programas mediante lenguajes informáticos de programación (Real Decreto 217/2022 y Real Decreto 243/2022, respectivamente). En particular, en lo que sigue mostramos los extractos de los decretos de enseñanzas mínimas que recogen competencias específicas relacionadas con el pensamiento computacional. En Educación Infantil, la competencia específica 2 dice:

> Desarrollar, de manera progresiva, los procedimientos del método científico y las destrezas del pensamiento computacional, a través de procesos de observación y manipulación de objetos, para iniciarse en la interpretación del entorno y responder de forma creativa a las situaciones y retos que se plantean (Real Decreto 95/2022, p. 22).

En Educación Primaria, la competencia específica 4 del área de Matemáticas dice:

> Utilizar el pensamiento computacional, organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, generalizando e interpretando, modificando y creando algoritmos de forma guiada, para modelizar y automatizar situaciones de la vida cotidiana (Real Decreto 157/2022, p. 95).

En el documento curricular para Educación Primaria se hace hincapié en conceder especial relevancia a la manipulación, en particular en los primeros niveles, por lo que las propuestas basadas en robótica educativa serían válidas y adaptables, al menos, al primer ciclo de Educación Primaria. Si bien es cierto que se promueve una transición progresiva y continua hacia recursos digitales, siendo explícita la recomendación del uso de software de programación en bloques o robótica educativa en este nivel educativo (Real Decreto 157/2022). Además, las destrezas relacionadas con el pensamiento computacional aparecen en otras áreas del decreto de mínimos, como son las áreas de Conocimiento del Medio Natural, Social y Cultural por su carácter multidisciplinar ligado a la búsqueda de soluciones, la descomposición de un problema en partes más sencillas o la creación de algoritmos para automatizar procesos de la vida cotidiana.

En Educación Secundaria Obligatoria, la competencia específica 4 de la materia de Matemáticas dice:

> Utilizar los principios del pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, interpretando, modificando y creando algoritmos para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz (Real Decreto 217/2022, p. 143).

Aunque también se hace referencia a la habilidad computacional en las materias de Biología y Geología (competencia específica 4), Tecnología (competencia específica 4) y Tecnología y Digitalización (competencia específica 5). En su redacción encontramos respectivamente:

> Utilizar el razonamiento y el pensamiento computacional, para resolver problemas o dar explicación a procesos de la vida cotidiana relacionados con la biología y la geología, analizando críticamente las respuestas y soluciones y reformulando el procedimiento, si fuera necesario (Real Decreto 217/2022, p. 35).
>
> Desarrollar soluciones automatizadas a problemas planteados aplicando los conocimientos necesarios e incorporando tecnologías emergentes para diseñar y construir sistemas de control programables y robóticos (Real Decreto 217/2022, p. 168)
>
> Desarrollar algoritmos y aplicaciones informáticas en distintos entornos, aplicando los principios del pensamiento computacional e incorporando las tecnologías emergentes, para crear soluciones a problemas concretos, automatizar procesos y aplicarlos en sistemas de control o en robótica (Real Decreto 217/2022, p. 175).

También se hace mención al pensamiento computacional en la competencia específica 2 del ámbito de Ciencias Aplicadas de Ciclos Formativos de Grado Básico, en la que puede leerse:

> Interpretar y modelizar en términos científicos problemas y situaciones de la vida cotidiana y profesional aplicando diferentes estrategias, formas de razonamiento, herramientas tecnológicas y el pensamiento computacional para hallar y analizar soluciones asegurando su validez (Real Decreto 217/2022, p. 182).

Por último, en las enseñanzas mínimas del Bachillerato encontramos la siguiente redacción en la competencia específica 4 de la materia de Matemáticas:

> Utilizar el pensamiento computacional de forma eficaz, modificando, creando y generalizando algoritmos que resuelvan problemas mediante el uso de las matemáticas, para modelizar y resolver situaciones de la vida cotidiana y del ámbito de la ciencia y la tecnología (Real Decreto 243/2022, p. 262)

Para la materia de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales encontramos una redacción similar (competencia específica 4):

> Utilizar el pensamiento computacional de forma eficaz, modificando, creando y generalizando algoritmos que resuelvan problemas mediante el uso de las matemáticas, para modelizar y resolver situaciones de la vida cotidiana y del ámbito de las ciencias sociales (Real Decreto 243/2022, p. 273).

Y finalmente, en la asignatura Matemáticas Generales aparece (competencia específica 4):

> Utilizar el pensamiento computacional de forma eficaz, modificando y creando algoritmos que resuelvan problemas mediante el uso de las matemáticas, para modelizar y resolver situaciones de la vida cotidiana y de diversos ámbitos. (Real Decreto 243/2022, p. 283).

Robótica educativa en educación infantil

Justificación curricular

En el decreto se destaca la necesidad, en esta etapa inicial, de incentivar el pensamiento científico y la curiosidad por el conocimiento. Se sugiere que a lo largo de la etapa de Educación Infantil se propongan situaciones de aprendizaje en la que el alumnado trate de encontrar soluciones o alternativas originales y creativas, a través de procesos manipulativos graduados en complejidad, que requieran paulatinamente mayor capacidad de abstracción. Como se indica en el decreto, dichos procesos de resolución son propios del pensamiento computacional y, entre otras estrategias, se sugiere explícitamente el uso de la descomposición de dichas tareas en otras más simples, a través de la exploración e investigación (Real Decreto 95/2022).

La aproximación al pensamiento computacional en Educación Infantil mediante la robótica educativa nos posiciona en un escenario privilegiado para abordar distintos aspectos curriculares propios de esta etapa. Por un lado, el propio robot tangible, como elemento físico manipulativo permite introducir situaciones de aprendizaje globales, significativas y estimulantes. Y por otro, la robótica educativa permite cohesionar contenidos de diferentes áreas curriculares desde el punto de vista multidisciplinar y transversal. En particular, el conocido enfoque *STEM* (del inglés *Science, Technology, Engineering and Mathematics*) proporciona escenarios en los que es posible una integración real de la tecnología y de la ingeniería con los contenidos matemáticos y científicos, tan limitados y, a veces escasos, en primeras edades escolares (Sullivan y Bers, 2016); y, a su vez, el enfoque *STEM* ha demostrado despertar el interés y la motivación reduciendo las diferencias de género (Master et al., 2017).

El entorno tecnológico: robots de suelo programables

En cuanto a la elección del robot, dada la amplia variedad de oferta en materia de robótica educativa (Hamilton et al., 2020), proponemos el uso de robots de suelo programables. Como se ha demostrado, con este tipo de robots además de desarrollar el pensamiento computacional se desarrollan habilidades relacionadas con el pensamiento crítico, el pensamiento creativo, la resolución de problemas, el trabajo en equipo, la toma de decisiones o el método científico (Benitti, 2012).

A continuación, mostraremos ejemplos basados en uno de los robots de suelo más conocido y utilizado por profesorado de Educación Infantil y Primaria: *Bee-bot* (Schina et al., 2021). Como se observa en la Figura 1, *Bee-bot* es un robot de suelo programable con una botonera física situada sobre el propio robot. Hacemos notar que los elementos que aquí traemos podrían adaptarse a cualquier robot de suelo cuyo funcionamiento sea similar a *Bee-bot*.

La programación de *Bee-bot* se realiza presionando, de forma secuencial, los siguientes botones: giro a derecha o a izquierda de 90º grados sobre sí mismo, avance de 15cm en línea recta o retroceso de 15cm en línea recta. Además, presenta botones de pausa (pausa el movimiento por 1 segundo), borrado (borra la secuencia de instrucciones almacenada) y GO (ejecuta las instrucciones almacenadas de forma secuencial y en el orden de introducción). Es importante resaltar que todos estos movimientos son relativos al sistema de referencia del propio robot. Como se observa en la Figura 1, las tareas típicas que involucran este tipo de robots de suelo suelen estar configuradas en tableros con cuadrículas que representan el paso de avance del robot (cuadros de 15cm en el caso de *Bee-bot*).

Figura 1. El robot de suelo Bee-bot

Geometría sintónica y habilidades espaciales

Al igual que otras áreas, la educación matemática ha estudiado el papel que juegan tanto los gestos como las posturas del propio cuerpo en contextos de enseñanza y aprendizaje, en particular en la resolución de problemas (Nemirovsky y Ferrara, 2009; Radford, 2009). Papert (1980) denominó aprendizaje sintónico a aquel que permitía a los niños usar el conocimiento de su propio cuerpo para explorar la geometría cuando programaban la tortuga de *LOGO*. Del mismo modo, términos como cognición encarnada (*emboddied cognition*) han sido utilizados para referirse a aprendizajes basados en la experiencia física y sensorio-motriz típica de prácticas basadas en la manipulación y la interacción con objetos del mundo real (Lakoff y Núñez, 2000; Tall, 2013). En este sentido, las propuestas basadas en la programación de robots de suelo, como *Bee-bot*, giran claramente alrededor del aprendizaje sintónico, permitiendo que el niño se vea a sí mismo como el robot cuando ha de secuenciar las instrucciones de movimiento para resolver una tarea (Sabena, 2017). Es por ello que el éxito en la resolución de tareas de programación con robots de suelo va a estar estrechamente relacionado con la capacidad del estudiante de situarse en la posición del robot, y de su capacidad para pensar en los movimientos como si fuera el propio robot.

Desde el punto de vista del sentido espacial, es sabido que el trabajo orientado a la programación de robots de suelo potencia habilidades espaciales, como la rotación mental y la visualización, dado que las habilidades puestas en juego al programar el movimiento del robot involucran el conocimiento del entorno y del espacio que les rodea (Diago et al., 2022; Sabena, 2017). Así, desde el punto de vista didáctico, el uso de robots de suelo potencia directamente saberes básicos relacionados con las habilidades espaciales propuestos en el decreto de enseñanzas mínimas, a saber: la exploración del entorno a través de los sentidos, el conocimiento de nociones espaciales básicas relacionadas con el propio cuerpo y con otros objetos, tanto para ubicarse como para moverse (Real Decreto 95/2022).

Programación manipulativa, física y tangible

Es conocido el papel fundamental de los materiales manipulativos en los primeros niveles escolares, especialmente en el caso de las matemáticas, donde se revelan como nexo entre el concepto matemático abstracto y la representación física y significativa para el niño (Baroody, 2017; Bartolini y Martignone, 2020). Continuando este enfoque, desde finales del siglo XX se han diseñado diferentes entornos tecnológicos basados en lenguajes de programación tangibles para ser utilizados en contextos educativos sin mediación de pantallas o teclados (McNerney, 2004). En estos entornos tangibles, los niños usan diferentes tipos de objetos como bloques o cuentas para elaborar secuencias de instrucciones físicas, como, por ejemplo, en el entorno tecnológico *TERN* (Horn et al., 2012) o *KIBO* (Bers, 2018). Por la edad a la que van dirigidos estos entornos de programación manipulativa, los comandos de programación vienen descritos en lenguaje natural (verbal o pictórico) y, generalmente, en formato de bloque de construcción. De este modo se pueden crear programas a partir de las interacciones físicas con los bloques, apilándolos u ordenándolos en secuencia. Esta idea, en la que las instrucciones o comandos necesarios para crear programas vienen representados por bloques que pueden ser manipulados, es la que posteriormente dará soporte al software de programación en bloques, en un entorno digital esta vez.

En el caso de la mayoría de robots de suelo, como es el caso de *Bee-bot*, la creación de un programa suele llevarse a cabo presionando secuencialmente los botones dispuestos en el propio robot. Esta configuración, en la que el entorno tecnológico está conformado exclusivamente por el robot, no permite una auténtica programación tangible, ya que la única forma de pensar en el programa completo estriba en la capacidad del usuario para recordar las instrucciones secuenciadas. Así, en palabras traducidas de Papert (1980), la programación directa sobre *Bee-bot* no nos proporciona "objetos con los que pensar", en el sentido tangible y sensorial.

Figura 2. Bloques de instrucciones tangibles de creación propia para programar Bee-bot (izquierda) y una versión comercializada para Blue-bot (TacTile, derecha)

En esta propuesta, con el fin de proporcionar un entorno tecnológico que ofrezca una verdadera experiencia de programación tangible, seguiremos un planteamiento similar al de Perlman (1976) con la tortuga de *LOGO*. Así, propondremos que junto con el robot de suelo se proporcione un juego físico de cartas correspondientes a los movimientos del robot que actúen como bloques físicos de instrucciones con las que programar. Este juego de cartas puede ser fácilmente elaborado con materiales de aula, como se muestra en la Figura 2.a, aunque en algunas versiones más recientes de robots de suelo (como puede ser *Blue-bot*, Figura 2.b) se ha implementado la comunicación entre tarjetas y robot por medio de una conexión Bluetooth. De este modo, el alumnado puede programar el movimiento del robot a mano agregando, reorganizando o quitando tarjetas de la secuencia de movimientos.

Se considera esencial que el alumnado elabore completamente el programa (el plan de resolución) con *Bee-bot* haciendo uso de las tarjetas antes de trasladarlo al robot. Una vez el programa ha sido diseñado y, solo entonces, se introducirán las instrucciones secuenciadas en el robot para que éste las ejecute. Esta configuración, en la que el robot de suelo está acompañado de un conjunto de instrucciones tangibles, se caracteriza por ofrecer un entorno tecnológico en el que el estudiante resuelve problemas a través de un conjunto de reglas precisas que vienen enunciadas en términos de los movimientos que puede ejecutar el robot. A la manera matemática de resolver problemas (Pólya, 1957), en este entorno tecnológico el estudiante puede: (i) realizar un plan previo a la programación por medio de un lenguaje visual de programación por bloques (tarjetas de movimiento); (ii) evaluar el plan ideado a partir de la respuesta proporcionada por el robot de suelo (el propio movimiento de *Bee-bot* sobre el tablero al reproducir la secuencia programada); y (iii) modificar el plan ideado en caso de no tener éxito en la resolución del problema. Desde este punto de vista, este es un contexto adecuado para estimular y desarrollar estrategias heurísticas y procesos de control (Diago et al., 2018; Sabena, 2017), considerados como base fundamental en competencia de resolución de problemas (Schoenfeld, 1985) y, por ende, pilar del pensamiento computacional.

Software de programación visual en bloques en educación primaria

Justificación curricular

En el documento de enseñanzas mínimas para la Educación Primaria se presenta el pensamiento computacional como una de las habilidades clave en el futuro del alumnado, enlazando la resolución de problemas con el planteamiento de procedimientos y estrategias para llegar a soluciones que puedan ser ejecutadas por un sistema informático, un humano o una combinación de ambos (Real Decreto

157/2022). En particular, el área de Conocimiento del Medio Natural, Social y Cultural establece de forma explícita la iniciación a la programación a través de recursos digitales, con software de programación en bloques, como saber básico. Por otra parte, en el área de Matemáticas, como criterio clave para la evaluación de la adquisición del pensamiento computacional, se introduce la descripción de rutinas y actividades sencillas de la vida cotidiana paso a paso y se aboga por el uso de herramientas tecnológicas orientadas al proceso de resolución de problemas. En concreto, para el primer ciclo se estipula la interpretación de algoritmos sencillos (rutinas o instrucciones con pasos ordenados) como saber básico para la adquisición de la competencia específica 4 del área de Matemáticas. En el caso del segundo ciclo se añade como saber básico la interpretación y modificación de algoritmos sencillos. Se propone explícitamente que estos algoritmos incluyan patrones repetitivos (bucles) y que sean abordados mediante software de programación en bloques o robótica educativa. Finalmente, en tercer ciclo se añade a estos saberes básicos la creación de algoritmos que incluyan instrucciones anidadas y condicionales, en representaciones más cercanas a la ciencia de la computación por medio, también, de la programación en bloques o la robótica educativa (Real Decreto 157/2022).

Así, propuestas basadas en software de programación en bloques, como las que describiremos, permitirán al alumnado de Educación Primaria aprender los rudimentos de los lenguajes de programación a la par que les ayudará a desarrollar competencias multidisciplinares ligadas al pensamiento computacional, la resolución de problemas, la creatividad y al trabajo en equipo (Sáez-López et al., 2016; Weintrop, 2019). Para la etapa de la Educación Secundaria Obligatoria, el desarrollo de la competencia basada en el pensamiento computacional se amplía con una mención explícita a la codificación de situaciones en un lenguaje fácil de interpretar por un sistema informático (Real Decreto 217/2022), por lo que la propuesta que viene a continuación sería apta también para este nivel educativo.

El entorno tecnológico: software de programación visual en bloques

Esta propuesta para Educación Primaria se plantea como extensión natural a la programación tangible con robots de suelo presentada anteriormente para niveles escolares inferiores, pero esta vez, en soporte digital. De esta forma, los bloques de instrucciones o comandos estarán disponibles en un entorno tecnológico basado en software, bien en aplicaciones para dispositivos móviles o en programas y sitios web accesibles desde el ordenador. A pesar de la naturaleza digital del entorno, estos bloques de programación mantendrán su carácter manipulativo gracias a su componente visual, pues la interfaz se presenta lista para ser explorada y manipulada de forma directa por el usuario (Weintrop y Wilensky, 2015). Además, a diferencia de otros lenguajes de programación más sofisticados, los bloques aparecen descritos en un lenguaje natural (verbal o pictórico) fácilmente interpretable. Estos bloques podrán ser arrastrados o apilados para conformar las secuencias de instrucciones necesarias para crear un programa al estilo computacional.

Nuevamente, el origen de este entorno de programación en bloques hemos de buscarlo en el desarrollo del lenguaje de programación *LOGO* por Seymour Papert en la década de los 70 (Feurzeig et al., 1970), quien planteó que el diseño de programas informáticos con este lenguaje podría facilitar el aprendizaje de conceptos y procedimientos matemáticos (Papert, 1980). Desde entonces, han sido numerosas las investigaciones con enfoque pedagógico basadas en el lenguaje *LOGO* centradas en procesos de abstracción, razonamiento algebraico y resolución de problemas (Clements y Sarama, 1997; Hoyles y Noss, 1992; entre otros), aspectos que hoy en día quedan incluidos dentro de lo que hemos denominado pensamiento computacional. Recogiendo el testigo de estos primeros esfuerzos, en el año 2004 el MIT creó un nuevo lenguaje de programación visual, llamado *Scratch* (https://scratch.mit.edu/), sucesor de *LOGO* y que utiliza bloques ya programados que pueden ser arrastrados y enlazados, como piezas de un puzle, para crear otros programas más complejos, juegos o simulaciones interactivas (Figura 3.a).

En la actualidad existen multitud de propuestas basadas en programación visual por bloques, todas ellas inspiradas en la apariencia y funcionamiento de *Scratch*. En particular, para niños de entre 5 a 7 años es habitual encontrar estos entornos tecnológicos en formato de aplicación para dispositivos móviles, como son las aplicaciones *ScratchJr* (Figura 3.c; Bers y Resnick, 2015) *Daisy the Dinosaur, Kodable* o *Light-Bot* (Gouws et al., 2013; Pila et al., 2019). Otro entorno muy popular es el sitio web *Code.org*, en el que se pueden encontrar multitud de secuencias de instrucción basadas en programación visual en bloques protagonizadas por personajes populares del ideario infantil y juvenil. En la Figura 3.b mostramos un ejemplo extraído de una secuencia de instrucción para pre-lectores y en la Figura 3.d otra para lectores competentes. Además, desde hace años se celebran anualmente iniciativas para acercar la programación y el alfabetismo digital al público general, siendo los eventos *La Hora del Código* (organizada por *Code.org*) y *La semana de la programación de la UE* (Consejo de la Unión Europea, 2018) los más populares. En los sitios web de ambas iniciativas podremos encontrar actividades, recursos y secuencias de enseñanza orientadas a la comprensión de la programación y al desarrollo de competencias fundamentales relacionadas con el pensamiento computacional.

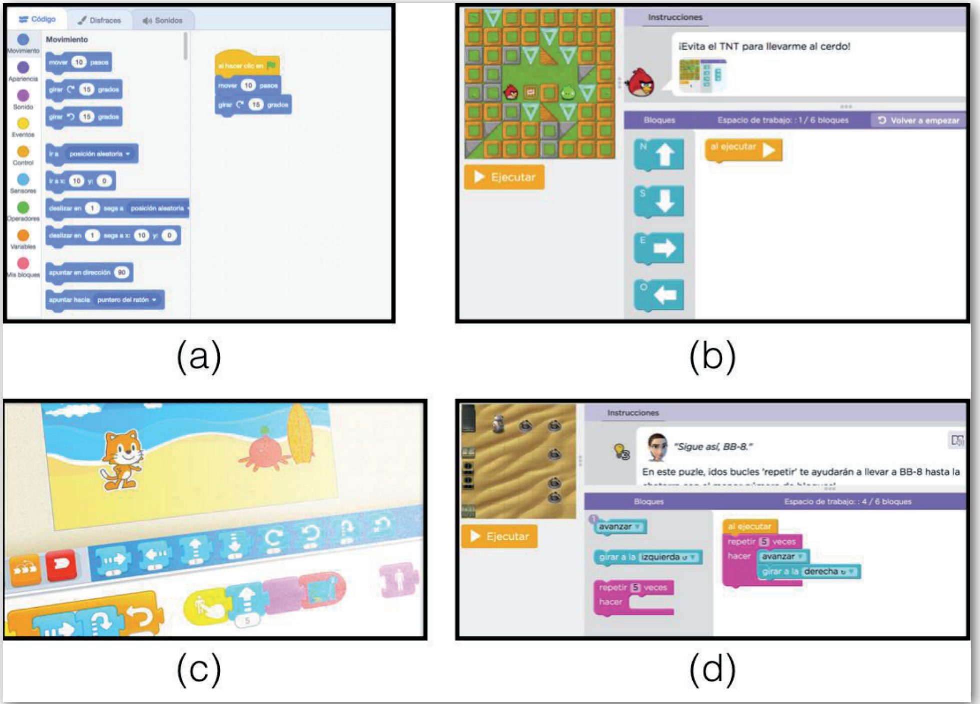


Figura 3. Entornos tecnológicos populares basados en programación visual por bloques: Scratch (a), ScratchJr (c) y Code.org (b y d)

Ventajas de la programación en bloques en educación

Por su naturaleza, el formalismo del lenguaje de programación y la limitación de las reglas posibles configuran un entorno tecnológico donde se puede realizar una discusión formal de la resolución de problemas. Aplicado a contextos educativos, es claro que el uso de entornos tecnológicos basados en programación en bloques influye en la adquisición de destrezas relacionadas con el pensamiento crítico, con la resolución de problemas, con las habilidades sociales y de autogestión, o con otros conocimientos académicos (Popat y Starkey, 2019). Por un lado, la simplicidad del interfaz hace que tanto las habilidades de inhibición como de control de decisiones se vean favorecidas en estos entornos tecnológicos de programación visual en bloques, potenciando así el trabajo cooperativo y la gestión de planes o estrategias de resolución (Arfé et al., 2020; Fessakis et al., 2013). Además, dada la intersección de los dominios computacional y matemático (Benton et al., 2017), el uso de entornos de programación en bloques produce una transferencia (de conocimientos, destrezas y/o habilidades adquiridas) tanto en contenidos como en procedimientos en tareas con rol puramente matemático (Çiftci y Bildiren, 2020; Nordby et al., 2022).

Por otro lado, la mayor complejidad a la hora de generar reglas y combinaciones de bloques ofrece un contexto mucho más cercano a los lenguajes de programación informáticos propios de las ciencias de la computación. En los últimos años, a partir de los diferentes enfoques del pensamiento computacional, se han diseñado instrumentos específicos orientados a cuantificar su grado de adquisición (Poulakis y Politis, 2021; Tang et al., 2020). Gracias a ellos, se ha podido determinar cómo la programación visual en bloques mejora la adquisición de conceptos computacionales, como por ejemplo las repeticiones (bucles), las expresiones condicionales o la gestión de eventos (Sáez-López et al., 2016). Estos elementos, cercanos a la programación informática como lenguaje, se han evidenciado de difícil comprensión para los niños, incluso en este tipo de entornos digitales (Simões et al., 2018). Tal y como ocurre en el dominio matemático, en el dominio de la programación informática el alumnado participa a través de sus actividades de aprendizaje en la construcción activa de un sistema de conocimiento basado en conceptos y habilidades procedimentales (Pea et al., 1987) que consisten en la utilización dinámica de reglas, algoritmos o procedimientos particulares para resolver un problema (Haapasalo y Kadijevich, 2000). Las experiencias tempranas con esta forma de resolución de problemas computacionales, a través de la programación en bloques, no solo deberían aliviar las mencionadas dificultades, sino que también generarán interés y prepararán al alumnado para un mundo de computación ubicua (Grover y Pea, 2013).

Dragonbox algebra desde La Educación Primaria a La Educación Secundaria

Justificación curricular

Como se pondrá de manifiesto en la descripción de sus características, *DragonBox Algebra* puede considerarse un ejemplo de cómo es posible convertir un conjunto de reglas y de símbolos propio de un dominio matemático, a otras reglas y símbolos que permiten plantear actividades típicas del pensamiento computacional en una situación de juego. En esta transformación, la intención matemática inicial de las reglas –también matemáticas– queda relegada a un segundo plano. Por esta razón, a nivel curricular, *DragonBox Algebra* podría ubicarse dentro del contenido propio del pensamiento computacional (si la intención es únicamente el desarrollo de habilidades de la resolución de problemas y del pensamiento lógico), pero también podría considerarse una herramienta para el desarrollo de contenido propio del álgebra (si la intención es utilizarlo como un soporte para el aprendizaje de las transformaciones algebraicas).

En cuanto a la redacción de las competencias y saberes relacionados con el pensamiento computacional, que encontramos en el Real Decreto 217/2022 que establece las enseñanzas mínimas para la Educación Secundaria Obligatoria, este sigue la línea de los niveles educativos anteriores, haciendo hincapié en su relación con la resolución de problemas y el planteamiento de procedimientos por medio de la identificación de aspectos clave y la descomposición en tareas más simples. Así, como saberes básicos, se incluyen la generalización y transferencia de procesos de resolución de problemas a otras situaciones, la identificación de estrategias para la interpretación, modificación de algoritmos y la formulación de cuestiones susceptibles de ser analizadas utilizando programas y otras herramientas. Además, desde la perspectiva del desarrollo del sentido algebraico, esta propuesta podría proporcionar al estudiante conocimientos sobre las transformaciones propias del conocimiento algebraico simbólico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato (Real Decreto 217/2022 y Real Decreto 243/2022, respectivamente).

El entorno tecnológico: la aplicación *DragonBox Algebra*

La versión inicial de la aplicación *DragonBox Algebra* apareció en 2012 para los sistemas operativos *Android* e *iOS* con la intención de que se convirtiera en un entorno tecnológico con el que aprender álgebra a través del juego. Actualmente podemos encontrar dos versiones de la misma, *DragonBox Algebra 5+* orientada a alumnado de entre 5 y 8 años, y *DragonBox Algebra 12+* orientada a alumnado a partir de 9 años. No obstante, tras su integración en la compañía noruega *Kahoot!* en 2019, las aplicaciones están comercializadas bajo el nombre de *Kahoot! Algebra by DragonBox* y *Kahoot! Algebra 2 by DragonBox*. Ambas versiones del juego contienen 10 mundos cada una y, a su vez, cada mundo está compuesto por 20 niveles. Cada mundo cuenta con un dragón diferente contenido en una caja (de ahí el nombre del juego). La superación de cada nivel ayudará a que el dragón crezca y, al terminar el mundo, el dragón alcanzará su forma adulta.

Entre otros, *DragonBox Algebra* aborda los siguientes contenidos relacionados con el álgebra y la resolución de ecuaciones lineales:

- Transformaciones para resolver ecuaciones básicas, orientadas a compensar los miembros de la ecuación con las cuatro operaciones básicas
- Factorización y operaciones entre números con signo
- Uso de paréntesis y de la propiedad distributiva
- Factorización y simplificación de fracciones
- Adición de términos semejantes
- Sustitución algebraica

Mediante puzles se aplican reglas algebraicas propias de la resolución de ecuaciones de primer grado como el neutro de la suma, el neutro de la multiplicación, simplificación de fracciones, obtención de fracciones equivalentes, reducción de fracciones a común denominador o transposición de términos.

El potencial de *DragonBox Algebra* para el aprendizaje del álgebra

La década de los 80 del siglo XX supuso la llegada a las aulas de los primeros sistemas algebraicos computaciones (*CAS*, del inglés *computer algebra systems*). Los *CAS* permitían realizar transformaciones algebraicas y resolver ecuaciones de manera simbólica, lo que abría la posibilidad para desarrollar secuencias de enseñanza del álgebra centradas en procesos matemáticos de nivel superior. La llegada de los entornos gráficos a los ordenadores en la década de los 90 del siglo pasado posibilitó el desarrollo de soluciones tecnológicas basadas en la interacción y en la representación de las situaciones matemáticas mediante sistemas de representación simultáneos, como *SimCalc* (Hegedus y Roschelle, 2013). Estos desarrollos posibilitaron reorientar la enseñanza del álgebra desde un aprendizaje memorístico de reglas a una enseñanza basada en dotar de sentido a las reglas. En aquel momento, dentro de la comunidad investigadora se introdujo la división entre modelos semánticos y sintácticos para la enseñanza del álgebra (Chaiklin, 1989; Filloy, 1987). Según esta clasificación, los modelos sintácticos ponen el énfasis en las reglas de uso, mientras que los semánticos ponen el énfasis en dar significado a las reglas. Los defensores de los modelos semánticos contribuyeron al desarrollo de aplicaciones informáticas (en este punto cabe destacar la proliferación de *applets*) donde se utilizaban modelos como la balanza para dar sentido a las reglas de transformación cuando se resolvían ecuaciones y a atacar los errores que típicamente se observan en el alumnado recientemente instruido en dicha resolución, como la dificultad para interpretar el signo igual como equivalencia. Desde este punto de vista, las transformaciones que se realizan en una ecuación serían válidas si su representación en el modelo de la balanza, por ejemplo, mantiene el equilibrio de los platos.

Con el tiempo, surgieron voces críticas con la reorientación hacia modelos puramente semánticos. Como señalaba Kirshner (2001), los fallos de los currículos no podían achacarse a un acceso al álgebra basado en la enseñanza de reglas, pues realmente nunca se había puesto en marcha un currículo exclusivamente estructural. En contraposición, este autor planteaba una propuesta curricular que suponía una combinación del componente de análisis sintáctico del álgebra, con las reglas de transformación algebraicas habituales, y que se basaba en una gramática descriptiva del álgebra que intentaba modelar la práctica de los usuarios competentes. Evidentemente, si el lenguaje algebraico se considera desde un punto de vista de la mera aplicación de reglas, su aprendizaje puede considerarse como un caso particular de pensamiento computacional. La modificación del sistema de representación del álgebra por el propio de un micromundo desde el que se introducen elementos típicos de la gamificación permite el diseño de aplicaciones como *DragonBox Algebra*. En este caso, las reglas algebraicas se convierten en reglas de un juego y la resolución de las situaciones problemáticas exigen una secuencia ordenada de un conjunto de reglas. Llegados a este punto, nada impide que el micromundo se presente con anterioridad a la enseñanza del álgebra y tenga utilidad por sí mismo sin ser necesariamente el predecesor de un nuevo contenido.

En un principio, las situaciones problemáticas de *DragonBox Algebra* plantean una superficie dividida en dos parcelas separadas por una frontera (Figura 4). La resolución de cada nivel implica dejar sola una única caja en una de las dos parcelas aplicando un conjunto de reglas (“poderes”) que se van introduciendo a medida que se avanza de nivel. La frontera representa al signo igual de la ecuación; la caja, la incógnita; y las parcelas, los términos de la ecuación. Sin embargo, en los primeros niveles no se establece ninguna relación con el formalismo matemático. En los primeros niveles no encontraremos números ni signos de operación, pero a medida que se avance de nivel la caja pasará a representarse mediante una letra equis y se introducirán los signos de las operaciones matemáticas básicas. Todo lo anterior supone que la interfaz de la aplicación no pretende poner de manifiesto, desde un inicio, la idea de equivalencia de términos de una ecuación ni pretende establecer una conexión con las matemáticas. Serán las propias reglas del juego las que de manera implícita lleven en un principio a suponer que cualquier nuevo elemento que se introduzca en una de las partes, debe tener contrapartida en el otro. De igual manera, el juego tampoco sugiere que la idea subyacente sea determinar la incógnita, sino que la situación de juego se resuelve cuando se consigue dejar la caja sola. Esto sugiere un abordaje a la idea de ecuación de mayor nivel de abstracción, pues desde esta idea se deriva tanto la resolución de ecuaciones de una incógnita como la sustitución formal. De hecho, los primeros niveles del juego plantean situaciones en las que, junto al icono de la caja, se presentan otros iconos que en ningún caso se relacionan de manera explícita con una cantidad, ya sea conocida o desconocida. Es decir, al contrario de lo que ocurre cuando se recurre a modelos semánticos, donde se pierde generalidad, en este caso se plantea una situación más abstracta.

Figura 4. Paneles de juego en DragonBox Algebra representando la ecuación Ax + B = C

A medida que se va avanzado de nivel, se introducen nuevas reglas que permiten la solución de situaciones más complejas a través de un sistema de cartas, que se ofrecen en versiones de noche y día (con fondo colorido o negro, resaltando su carácter opuesto, ver Figura 5).

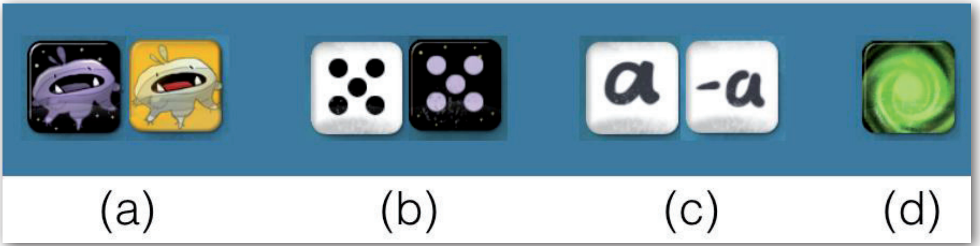


Figura 5. Cartas opuestas disponibles en DragonBox Algebra (a, b, c) y vértice verde (d)

Por ejemplo, en el nivel presentado en la Figura 4, se presenta una situación que sería equivalente a la resolución de la ecuación $Ax + B = C$ (ver secuencia de pasos en la Figura 6). Además, se ofrecen dos cartas en la parte inferior (el pez en versión noche y el insecto en versión día) que pueden usarse para ejecutar las transformaciones que permitirán aislar la caja. El pez en versión noche se utilizará para eliminar el pez versión día opuesto (la *B*), en un proceso que implicaría realizar tres pasos:

$$Ax + B - B = C - B \ \text{(Figura 6.b)}$$

$$Ax + 0 = C - B \ \text{(Figura 6.c)}$$

$$Ax = C - B \ \text{(Figura 6.d)}$$

En este sentido, el juego apoya que dos cartas aisladas con igual icono, pero en versiones opuestas (noche y día, ver Figura 5.a) se convierten, al juntarse, en una carta de tipo *vértice verde* (equivalente a un 0, Figura 5.d). Los paneles izquierdos de la secuencia de la Figura 6 muestran la transformación $Ax + B - B = Ax + 0$, donde la carta *vértice verde* aislada (Figura 6.c) desaparece al pulsar sobre ella (Figura 6.d, $Ax + 0 = Ax$).

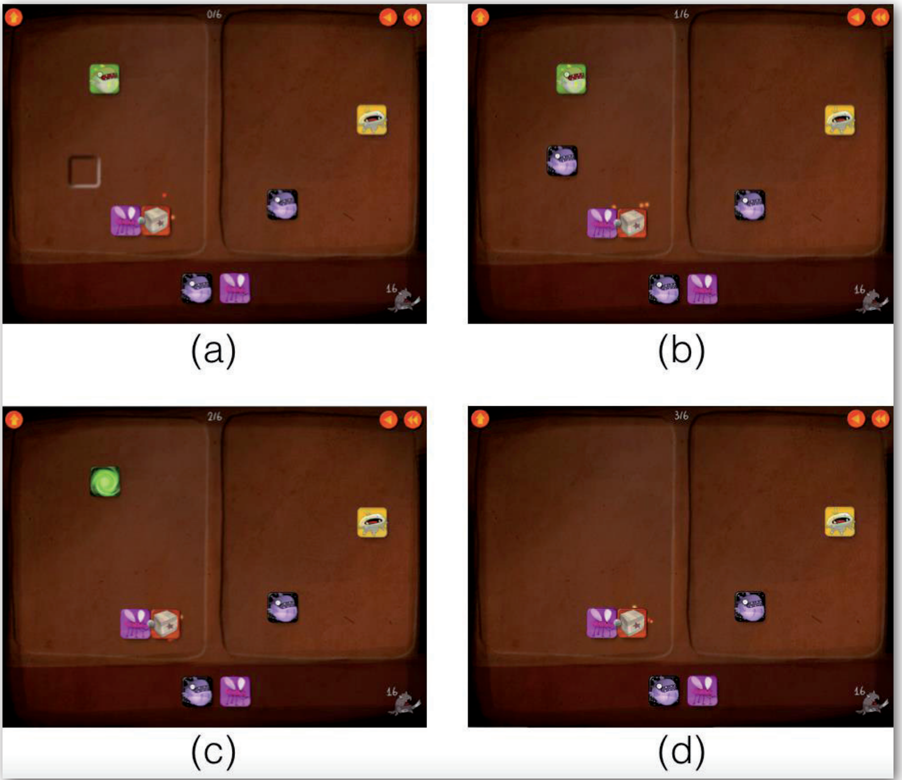


Figura 6. Secuencia de transformación de la ecuación Ax + B = C a la ecuación Ax = C - B

Una vez se alcanza $Ax = C - B$,, se aplica otra regla utilizando el insecto en versión día. En este caso, la regla establece que es posible ubicar una carta bajo otra carta o grupo de cartas, como se muestra en la secuencia de la Figura 7. El programa genera unos espacios vacíos bajo el resto de cartas aisladas para señalar que la aplicación de este poder exige aplicarla sobre el resto de cartas aisladas o grupos de cartas aisladas (Figura 7.a). Este poder sería equivalente a la transformación (Figura 7.c):

$$\frac{Ax}{A} = \frac{C}{A} - \frac{B}{A}$$

Por último, se aplican los poderes:

$$\frac{Ax}{A} = 1x = x$$

Que permiten definitivamente aislar la caja y resolver el puzle (Figura 7.d):

$$A = \frac{C}{x} - \frac{B}{x}.$$

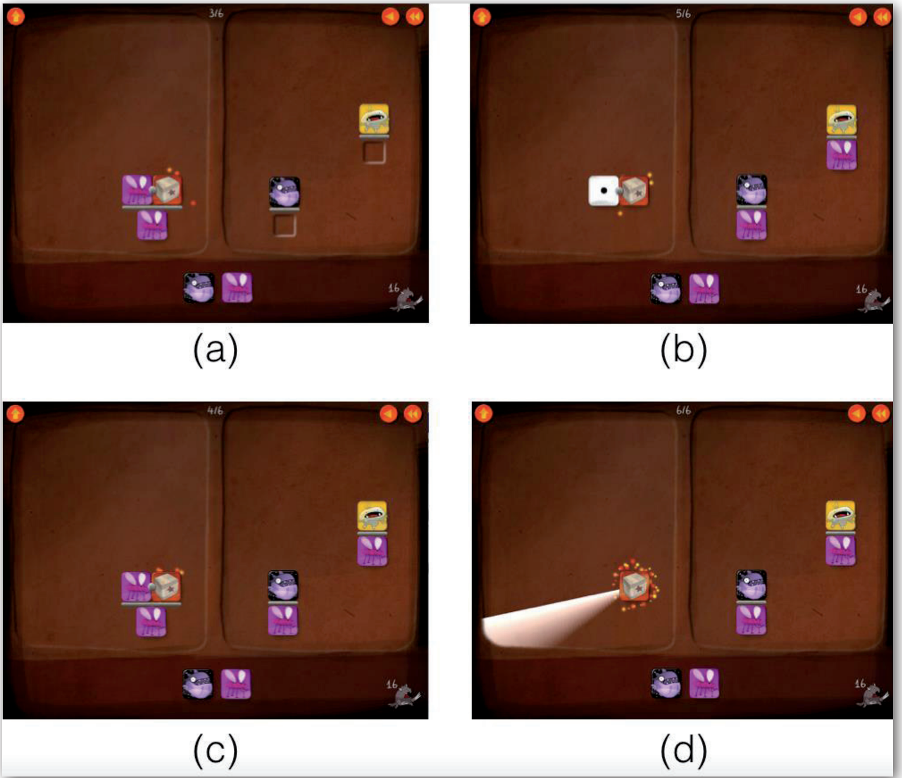


Figura 7. Secuencia de transformación de la ecuación $Ax = C - B$ a $x = C/A - B/A$

De igual manera, a medida que se van superando niveles, el sistema de signos va evolucionando desde una representación icónica (animales y bichos en versión día y noche, Figura 5.a) hasta una representación próxima al lenguaje del álgebra (a y $-a$, en los que el carácter opuesto se desliga de la representación pictórica y viene marcado por el símbolo negativo, Figura 5.c, pasando por una representación pictórica intermedia (un conjunto de puntos en versión día y noche, Figura 5.b).

En relación con el aprendizaje del álgebra, estudios recientes han mostrado cómo el uso de *DragonBox Algebra* permite al alumnado una mejor comprensión sintáctica de las reglas algebraicas a través de la verbalización de las acciones en la aplicación (Katirci, 2017), a la vez que incrementa su motivación por el aprendizaje (Gibbs, 2020). Estudios cuasi-experimentales realizados en alumnado de secundaria han mostrado resultados significativamente relevantes tanto en pensamiento algebraico, competencia en resolución algebraica, como en actitudes hacia las matemáticas tras el uso de *DragonBox Algebra* (Gutiérrez-Soto et al., 2015; Siew et al., 2016). Por último, desde el punto de vista del profesorado de primaria en formación, estos también la perciben como de utilidad para la enseñanza del álgebra (Cates, 2018).

Consideraciones finales

La aparición de nuevas tecnologías plantea, de manera recurrente, desafíos en el área de la educación matemática. A lo largo de las últimas décadas, el crecimiento de la tecnología y su (no siempre efectiva) aplicación en la educación matemática han evolucionado de forma paralela, algo sobre lo que la investigación ha dado cuenta desde diferentes perspectivas como el aprendizaje del alumnado (Li y Ma, 2010; Verbruggen et al., 2021), su uso en el aula (Bray y Tangney, 2017) o sus efectos en la motivación y las actitudes del alumnado (Higgins et al., 2019). Una de las irrupciones más recientes (aunque con orígenes en la década de los 70 del siglo pasado) en esta materia viene protagonizada por el pensamiento computacional, una habilidad directamente relacionada con la resolución de problemas que, tratándose de una de las competencias básicas para los años venideros, ha encontrado respuesta en forma de políticas educativas que ya lo contemplan en los diferentes documentos curriculares de enseñanzas no universitarias.

El papel vital que la tecnología tiene en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, al permitir al alumnado concentrarse en la toma de decisiones, la reflexión, el razonamiento y la resolución de problemas, nos lleva a la cuestión central de este capítulo. Dicha cuestión gira alrededor de cómo los entornos tecnológicos permitirían desarrollar la "nueva" habilidad del pensamiento computacional en cada uno de los niveles escolares y a enlazarla con competencias centrales de las matemáticas como la resolución de problemas. Para dar respuesta a esto, hemos partido de propuestas en las que la forma de interaccionar con dichos entornos respondería a la aplicación de un conjunto de reglas y al uso de un lenguaje concreto para abordar la resolución de problemas. Concretamente, se han presentado tres experiencias distintas de aprendizaje directamente alineadas con la propuesta curricular de cada nivel educativo.

En primer lugar, hemos visto cómo los robots de suelo programables pueden brindar, ya desde la etapa de Educación Infantil, una primera aproximación al pensamiento computacional a través de procesos de resolución que incorporen un conjunto de instrucciones secuenciales e impliquen la puesta en práctica de habilidades espaciales, de geometría sintónica y de heurística. A continuación, el uso de lenguajes de programación basados en bloques ofrece un excelente contexto educativo en el que poner en juego habilidades relacionadas con el pensamiento computacional y la resolución de problemas, a la manera matemática. Las numerosas versiones de los entornos de programación visual en bloques representarían ese subsiguiente paso natural en el que se incorporan nuevas herramientas y conceptos computacionales con los que abordar soluciones a problemas más complejos. Por último, hemos explorado el potencial dual que la aplicación *DragonBox Algebra* tiene tanto para el desarrollo de los contenidos del álgebra como para los propios del pensamiento computacional. En definitiva, en las tres propuestas presentadas, la validez de las soluciones supone razonar acerca de su construcción y su corrección matemática, siendo el propio entorno tecnológico el que se encarga de su evaluación, ofreciendo retroalimentación inmediata.

Una vez más, los cambiantes escenarios sociales y los galopantes avances tecnológicos nos conducen a nuevos escenarios educativos en los que la tecnología debe usarse de manera cada vez más efectiva y responsable para enriquecer el desarrollo de habilidades como el pensamiento computacional, es decir la resolución de problemas embebida en contextos tecnológicos, y, en definitiva, la educación matemática.

Referencias

Arfé, B., Vardanega, T., y Ronconi, L. (2020). The effects of coding on children's planning and inhibition skills. *Computers and Education, 148*, 103807. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2020.103807

Baroody, A. J. (2017). The Use of Concrete Experiences in Early Childhood Mathematics Instruction. En *Advances in Child Development and Behavior (Vol. 53)*. Elsevier. https://doi.org/10.1016/bs.acdb.2017.03.001

Bartolini, M. G. y Martignone, F. (2020). Manipulatives in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education. Second Edition*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_93

Brackmann, C. P., Román-González, M., Robles, G., Moreno-León, J., Casali, A. y Barone, D. (2017). Development of Computational Thinking Skills through Unplugged Activities in Primary School. *Proceedings of the 12th Workshop on Primary and Secondary Computing Education - WiPSCE '17*, 65–72. https://doi.org/10.1145/3137065.3137069

Bray, A. y Tangney, B. (2017). Technology usage in mathematics education research – A systematic review of recent trends. *Computers y Education, 114*, 255–273. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2017.07.004

Benitti, F. B. V. (2012). Exploring the educational potential of robotics in schools: A systematic review. *Computers and Education*, *58*(3), 978–988. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2011.10.006

Benton, L., Hoyles, C., Kalas, I. y Noss, R. (2017). Bridging Primary Programming and Mathematics: Some Findings of Design Research in England. *Digital Experiences in Mathematics Education, 3*, 115–138. https://doi.org/10.1007/s40751-017-0028-x

Bers, M. U. (2018). Coding, playgrounds and literacy in early childhood education: The development of KIBO robotics and ScratchJr. *IEEE Global Engineering Education Conference, EDUCON*, 2100–2108. https://doi.org/10.1109/EDUCON.2018.8363498

Bers, M. U., y Resnick, M. (2015). *Official ScratchJr Book*. No Starch Press.

Cates, M. (2018). *The Effect of Using DragonBox on The Mathematics Teaching Efficacy of Preservice Middle Grade Teacher* (Tesis doctoral). Georgia State University.

Chaiklin, S. (1989). Cognitive studies of algebra problem solving and learning. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 93–114). Lawrence Erlbaum Associates and National Council of Teachers of Mathematics.

Clements, D. H. y Sarama, J. (1997). Research on Logo: a decade of progress. *Computers in the Schools, 14*(1), 9–46. https://doi.org/10.1300/J025v14n01_02

Consejo de la Unión Europea. (2018). Recomendación del Consejo, de 22 de mayo de 2018, relativa a las competencias clave para el aprendizaje permanente. *Diario Oficial de La Unión Europea*, *C189/1*, 1–13.

Department for Education. (2013). Computing programmes of study. *National Curriculum in England*.

Diago, P. D., Arnau, D. y González-Calero, J. A. (2018). Elementos de resolución de problemas en primeras edades escolares con Bee-bot. *Edma 0-6: Educación Matemática En La Infancia, 7*(1), 12–41. https://doi.org/https://doi.org/10.24197/edmain.1.2018.12-41

Diago, P. D., González-Calero, J. A. y Yáñez, D. F. (2022). Exploring the development of mental rotation and computational skills in elementary students through educational robotics. *International Journal of Child-Computer Interaction, 32*, 100388. https://doi.org/10.1016/j.ijcci.2021.100388

European Schoolnet. (2015). *Computing our future. Computer programming and coding: priorities, school curricula and initiatives across Europe*.

FECYT, Google y Everis. (2016). *Educación en ciencias de la computación en España 2015*. Ministerio de Economía y Competitividad.

Fessakis, G., Gouli, E. y Mavroudi, E. (2013). Problem solving by 5-6 years old kindergarten children in a computer programming environment: A case study. *Computers and Education, 63*, 87–97. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/j.compedu.2012.11.016

Feurzeig, W., Papert, S., Bloom, M., Grant, R., y Solomon, C. (1970). Programming-languages as a conceptual framework for teaching mathematics. *ACM SIGCUE Outlook, 4*(2), 13–17. https://doi.org/10.1145/965754.965757

Filloy, E. (1987). Modelling and the Teaching of Algebra. En J. C. Bergeron, N. Herscovics, y C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education, 1* (pp. 298–300).

Gibbs, P. S. (2020). *Game Based Learning: The Effects of DragonBox 12+ on Algebraic Performance of Middle School Students* (Tesis doctoral). University of Baltimore.

Glass, R. L. (2006). Call it problem solving, not computational thinking. *Communications of the ACM*, *49*(9), 13–13.

Gouws, L. A., Bradshaw, K. y Wentworth, P. (2013). Computational Thinking in Educational Activities: An Evaluation of the Educational Game Light-Bot. *Proceedings of the 18th ACM Conference on Innovation and Technology in Computer Science Education*, 10–15. https://doi.org/10.1145/2462476.2466518

Grover, S. y Pea, R. (2013). Computational Thinking in K-12: A Review of the State of the Field. *Educational Researcher*, *42*(1), 38–43. https://doi.org/10.3102/0013189X12463051

Gutiérrez-Soto, J., Arnau, D., y González-Calero, J. A. (2015). Un estudio exploratorio sobre el uso de DragonBox Algebra como una herramienta para la enseñanza de la resolución de ecuaciones. *ENSAYOS. Revista De La Facultad De Educación De Albacete*, *30*(1), 33–44. https://doi.org/10.18239/ensayos.v30i1.738

Haapasalo, L. y Kadijevich, D. (2000). Two types of mathematical knowledge and their relation. *Journal für Mathematik-Didaktik, 21*(2), 139–157.

Hamilton, M., Clarke-Midura, J., Shumway, J. F. y Lee, V. R. (2020). An Emerging Technology Report on Computational Toys in Early Childhood. *Technology, Knowledge and Learning*, *25*(1), 213–224. https://doi.org/10.1007/s10758-019-09423-8

Hegedus, S. y Roschelle, J. (2013). *The SimCalc vision and contributions: Democratizing access to important mathematics*. Springer.

Higgins, K., Huscroft-D'Angelo, J. y Crawford, L. (2019). Effects of Technology in Mathematics on Achievement, Motivation, and Attitude: A Meta-Analysis. *Journal of Educational Computing Research, 57*(2), 283–319. https://doi.org/10.1177/0735633117748416

Horn, M. S., Crouser, R. J. y Bers, M. U. (2012). Tangible interaction and learning: The case for a hybrid approach. *Personal and Ubiquitous Computing, 16*(4), 379–389. https://doi.org/10.1007/s00779-011-0404-2

Hoyles, C. y Noss, R. (1992). *Learning Mathematics and Logo*. MIT Press.

Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado (INTEF). (2018). *Programación, robótica y pensamiento computacional en el aula. Situación en España, enero 2018*. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Ilic, U., Haseski, H. İ. y Tugtekin, U. (2018). Publication trends over 10 years of computational thinking research. *Contemporary Educational Technology*, *9*(2), 131–153. https://doi.org/10.30935/cet.414798

ISTE y CSTA. (2011). *Computational Thinking, teacher resources*. Technical report.

Katirci, N. (2017). *The Influence of DragonBox on Student Attitudes and Understanding in 7th Grade Mathematics Classroom* (Tesis doctoral). State University of New York at Albany.

Kieran, C. (2006). Research on the teaching and learning of algebra. En Á. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present, and future* (pp. 11–49). Sense Publishers.

Kirshner, D. (2001). The structural algebra option revisited. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, y R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 83–98). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47223-6_5

Lakoff, G. y Núñez, R. E. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. Basic Books.

Li, Q. y Ma, X. (2010). A Meta-analysis of the Effects of Computer Technology on School Students' Mathematics Learning. *Educational Psychology Review, 22*(3), 215–243. https://doi.org/10.1007/s10648-010-9125-8

Master, A., Cheryan, S., Moscatelli, A. y Meltzoff, A. N. (2017). Programming experience promotes higher STEM motivation among first-grade girls. *Journal of Experimental Child Psychology, 160*, 92–106. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2017.03.013

McNerney, T. S. (2004). From turtles to Tangible Programming Bricks: Explorations in physical language design. *Personal and Ubiquitous Computing, 8*(5), 326–337. https://doi.org/10.1007/s00779-004-0295-6

Nemirovsky, R. y Ferrara, F. (2009). Mathematical imagination and embodied cognition. *Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 159–174. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9150-4

Nordby, S. K., Bjerke, A. H. y Mifsud, L. (2022). Computational Thinking in the Primary Mathematics Classroom: a Systematic Review. *Digital Experiences in Mathematics Education, 1*, 27–49. https://doi.org/10.1007/s40751-022-00102-5

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, Computers and Powerful Ideas*. Basic Books.

Pea, R. D., Soloway E. y Spohrer, J. C. (1987). The buggy path to the development of programming expertise. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 9*, 5–30.

Perlman, R. (1976). Using Computer Technology to Provide a Creative Learning Environment for Preschool Children. En *MIT AI Lab Memo No. 360/Logo Memo, n. 24* (pp. 1–13). MIT AI Lab. http://18.7.29.232/handle/1721.1/5784

Pila, S., Aladé, F., Sheehan, K. J., Lauricella, A. R. y Wartella, E. A. (2019). Learning to code via tablet applications: An evaluation of Daisy the Dinosaur and Kodable as learning tools for young children. *Computers and Education, 128*, 52–62. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2018.09.006

Pólya, G. (1957). *How to Solve It (2nd ed.).* Princeton University Press.

Popat, S. y Starkey, L. (2019). Learning to code or coding to learn? A systematic review. *Computers and Education, 128*, 365–376. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2018.10.005

Poulakis, E. y Politis, P. (2021). Computational Thinking Assessment: Literature Review. En T. Tsiatsos, S. Demetriadis, A. Mikropoulos, y V. Dagdilelis (Eds.), *Research on E-Learning and ICT in Education: Technological, Pedagogical and Instructional Perspectives* (pp. 111–128). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-64363-8_7

Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 111–126. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9127-3

Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil. *Boletín Oficial del Estado, 28*, de 2 de febrero de 2022. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/02/01/95/con

Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado, 52*, de 2 de marzo de 2022. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/01/157/con

Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado, 76*, de 30 de marzo de 2022. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/29/217/con

Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato. Boletín Oficial del Estado, 82, de 6 de abril de 2022. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/04/05/243/con

Sabena, C. (2017). Early Child Spatial Development: A Teaching Experiment with Programmable Robots. En G. Aldon, F. Hitt, L. Bazzini, y U. Gellert (Eds.), *Mathematics and Technology, Advances in Mathematics Education* (pp. 13–30). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-51380-5

Sáez-López, J. M., Román-González, M. y Vázquez-Cano, E. (2016). Visual programming languages integrated across the curriculum in elementary school: A two year case study using "Scratch" in five schools. *Computers and Education, 97*, 129–141. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2016.03.003

Schina, D., Esteve-González, V. y Usart, M. (2021). Teachers' Perceptions of Bee-Bot Robotic Toy and Their Ability to Integrate It in Their Teaching. En Lepuschitz W., Merdan M., Koppensteiner G., Balogh R., Obdržálek D. (Eds.), *Robotics in Education. RiE 2020. Advances in Intelligent Systems and Computing* (pp. 121–132). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-67411-3_12

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving.* Academic Press: Orlando.

Shute, V. J. Sun, C., y Asbell-Clarke, J. (2017). Demystifying computational thinking. *Educational Research Review*, *22*, 142–158. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2017.09.003

Siew, N. M., Geofrey, J. y Lee, B. N. (2016). Students' Algebraic Thinking and Attitudes towards Algebra: The Effects of Game-Based Learning using Dragonbox12+ App. *The Research Journal of Mathematics and Technology*, *5*(1), 66–79.

Sullivan, A. y Bers, M. U. (2016). Robotics in the early childhood classroom: learning outcomes from an 8-week robotics curriculum in pre-kindergarten through second grade. *International Journal of Technology and Design Education, 26*(1), 3–20. https://doi.org/10.1007/s10798-015-9304-5

Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically. In How Humans Learn to Think Mathematically*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/cbo9781139565202

Tang, X., Yin, Y., Lin, Q., Hadad, R. y Zhai, X. (2020). Assessing computational thinking: A systematic review of empirical studies. *Computers and Education, 148*, 103798. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2019.103798

Verbruggen, S., Depaepe, F. y Torbeyns, J. (2021). Effectiveness of educational technology in early mathematics education: A systematic literature review. *International Journal of Child-Computer Interaction, 27*, 100220. https://doi.org/10.1016/j.ijcci.2020.100220

Weintrop, D. (2019). Block-based programming in computer science education. *Communications of the ACM, 62*(8), 22–25. https://doi.org/10.1145/3341221

Weintrop, D. y Wilensky, U. (2015). To Block or not to Block, That is the Question: Students' Perceptions of Blocks-based Programming. *Proc. IDC '15. ACM*, 199–208. https://doi.org/10.1145/2771839.2771860

Wing, J. M. (2006). Computational Thinking. *Communications of the ACM*, *49*(3), 33–35. https://doi.org/10.1145/1118178.1118215

Recursos didácticos para el aula de matemáticas

Didactic resources for the mathematics classroom

Rodríguez-Sánchez, M. M., Sánchez-Barbero, B., Monterrubio, M. C.
Universidad de Salamanca

Resumen

La utilización en el aula de diferentes recursos puede ayudar a mejorar la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas, y conseguir así un aprendizaje más significativo. Uno de los recursos que mayor número de adeptos tiene en las aulas es el libro de texto. En este capítulo se pretende mostrar cómo el uso exclusivo del libro de texto presenta algunas limitaciones que se pueden solventar con un correcto acompañamiento de otros recursos didácticos. Se mostrarán algunos recursos y materiales manipulativos con los que se pueden trabajar matemáticas, exponiendo las ventajas e inconvenientes de su utilización. También se propondrán pautas para su uso en las aulas de matemáticas, con el fin de animar a los lectores a introducirlos en el aula y ayudar así al aprendizaje de sus estudiantes.

Palabras clave: Recursos didácticos, Material manipulativo, Libro de texto, Didáctica de las matemáticas.

Abstract

The use of different resources in the classroom can help to improve students' attitude towards mathematics, thus achieving more meaningful learning. One of the resources that has the largest number of followers in classrooms is the textbook. In this chapter we try to show how the limitations of the exclusive use of the textbook can be solved with a correct accompaniment of other didactic resources. Resources and manipulative materials with which mathematics can be worked will be shown, exposing the advantages and disadvantages of their use. Guidelines for the use of resources and materials in mathematics classrooms will also be proposed, to encourage readers to introduce them in the classroom and thus help their students' learning.

Keywords: Didactic resources, Manipulative material, Textbook, Didactics of mathematic.

Introducción

En general, existe cierto desinterés del alumnado hacia las matemáticas. Esto puede deberse a que no aprecia una vinculación entre la materia y la realidad lo que hace que, en ocasiones, le cueste llegar a la abstracción matemática requerida y, como consecuencia, su motivación, gusto y actitudes positivas hacia la asignatura se vean mermados. Evaluaciones Internacionales, como TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) y PISA (Programme for International Student Assessment), muestran cómo el rendimiento en matemáticas de los alumnos españoles está por debajo de la media de la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico) y de la Unión Europea (Mullis et al., 2020). Esto, junto con la descualificación profesional que puede generar el uso exclusivo del libro de texto, hace reconsiderar el empleo en el aula de otros recursos diferentes que se complementen entre sí, sean motivadores y acerquen las matemáticas a la vida cotidiana (Alsina, 2004). Además, el aprendizaje mediante diversos materiales facilita el paso de una matemática concreta a una abstracta, potenciando así el razonamiento y la reflexión en las aulas (Area, 2010).

Este trabajo pretende ofrecer una visión general del uso de recursos y materiales para favorecer el aprendizaje de las matemáticas. Se comienza explicando qué se entiende por recurso didáctico y se presentan algunos ejemplos. Posteriormente, se tratan de manera independiente el libro de texto, un recurso bastante utilizado en el proceso de enseñanza y aprendizaje, y los materiales manipulativos, presentando una clasificación y mostrando algunos ejemplos de la utilización de materiales existentes y propuestas de elaboración. Finalmente, se analizan las ventajas e inconvenientes de la utilización de los diferentes recursos, se presentan algunos consejos junto con un decálogo para su buen uso, y se termina con unas consideraciones finales.

Recursos didácticos

Entendemos como recurso didáctico para el aprendizaje de las matemáticas cualquier medio que, utilizado convenientemente, contribuya a la consecución de dicho aprendizaje. Por ello, se puede entender que los diversos recursos engloban, además del libro de texto, los materiales manipulativos, tecnológicos y otras situaciones o medios, como la prensa, el cine, la literatura, los juegos o el plegado del papel, entre otros. Estos pueden ser adaptados según el nivel educativo y el objetivo pretendido.

Los currículos actuales manifiestan la relevancia del uso de diferentes recursos e inciden en la importancia de que el docente utilice diferentes metodologías didácticas que fomenten la motivación por aprender, despierten la curiosidad y hagan ver a los alumnos la necesidad de adquirir conocimientos, destrezas y actitudes hacia el área. Consideramos que el uso de recursos diversos puede contribuir a ello.

A continuación, se muestran algunos ejemplos de recursos que pueden utilizarse en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Ejemplo 1: La prensa

Diversos autores analizan la importancia de la utilización de la prensa en las aulas (Chamoso et al., 2005; Olmos y Martí-Contreras, 2021). Esta puede ayudar, por ejemplo, al aprendizaje del sentido estocástico mediante el estudio de gráficos estadísticos. Para ello, planteamos dos posibilidades. La primera es pedir a los estudiantes que lleven un periódico cualquiera al aula y, a partir de ahí, descubrir las diferentes gráficas utilizadas y si son o no las más adecuadas para transmitir la información de la noticia en la que aparecen. Esto permite introducir o profundizar en las características de cada tipo de gráfica, el significado de sus elementos, la interpretación de los datos, sacar conclusiones, etc. La segunda posibilidad, es lo que denominamos *Proyecto Sabuesos*, donde los estudiantes deben buscar posibles errores estadísticos, cometidos tanto en la redacción como en la representación de la información (Figura 1), explicar los motivos por los que constituye un error, justificar la posible intencionalidad, desconocimiento u otros aspectos de cada uno de ellos. Se completa con la redacción de una carta al periódico expresando el malestar por el error cometido e incluyendo una propuesta de mejora sobre cómo se debería reflejar esa información de manera adecuada. A partir de ahí, parece fundamental facilitar la discusión en el aula para que, mediante una reflexión crítica, se puedan obtener conclusiones que faciliten el aprendizaje. Además, este proyecto es ampliable a cualquier medio de comunicación. Se puede encontrar una colección de errores estadísticos cometidos en la prensa española en la página web Malaprensa (http://www.malaprensa.com/).

El mayor número de cincuentones solteros de España se encuentra en Salamanca. (2021, 27 octubre). Diario Noticias Salamanca 24 Horas.

"En Salamanca, el 45,65% de las personas entre 20 y 59 años está soltera. En el caso de los varones, el índice asciende a 51,43% y, en el caso de las mujeres, a 40,12%". Error: El intervalo seleccionado no corresponde con el título de la noticia porque el porcentaje de "cincuentones" se sitúa entre 20 y 59 años.

https://www.salamanca24horas.com/local/mayor-numero-cincuentones-solteros-espana-se-encuentra-en-salamanca_15016919_102.html

En la imagen, aparece un diagrama de barras presentado en una conocida cadena de televisión, que representa el número de fallecidos por la COVID en la comunidad de Madrid, durante los meses de julio a octubre (2021). Error: Se puede observar que a pesar de que septiembre tenga un mayor número de fallecidos (1136), la barra que lo representa se sitúa por debajo de la barra del mes de octubre (1056), que refleja un menor número de fallecidos.

Figura 1. Errores en la redacción y representación, presentados por los "sabuesos"

Ejemplo 2: El cine

El uso del cine en el aula permite distintas posibilidades como pueden ser el visionado de largometrajes completos o, únicamente, de determinadas secuencias. En el primer caso, parando en los momentos adecuados para incidir en algunos aspectos de interés, aunque tiene la limitación del tiempo, pues no permite realizarlo en una sesión de clase. En el segundo caso, se seleccionan escenas de corta duración y se plantean actividades asociadas, por ejemplo, *La habitación de Fermat* permite ver la escena en la que se tratan los números primos y plantear actividades centradas en dicho contenido, lo que ayuda a reforzarlo o a motivarlo mostrando contextos diferentes. Además, ofrece situaciones para la resolución de problemas, como cronometrar 9 minutos utilizando dos relojes de arena de 4 y 7 minutos. Una tercera posibilidad es detectar situaciones imposibles o errores matemáticos e intentar solventarlos. Sorando (2018) muestra una selección de películas y actividades, clasificadas por curso y contenido, algunas de las cuales se encuentran en https://matematicasentumundo.es/CINE/100escenas.htm. Además, Martín y Martín (2021) presentan en http://www.centrocp.com/proyecto-esc3n4s-ma-tematicas/ una colección de fichas con actividades referidas a escenas del cine y series de televisión, para ser llevadas al aula.

Ejemplo 3: La literatura

La literatura brinda diversas posibilidades, como usar obras literarias completas con las matemáticas como tema central, por ejemplo *El diablo de los números, El señor del cero, El hombre que calculaba, Planilandia*… cuya lectura puede realizarse de manera conjunta con la asignatura de Lengua. Otra opción es mediante obras que únicamente aluden a las matemáticas en determinados momentos y de las que se pueden extraer fragmentos con los que trabajar un contenido concreto, por ejemplo *Los Viajes de Gulliver* o *Alicia en el País de las Maravillas* cuyo cuadernillo de trabajo se puede descargar en la web de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas *https://www.fespm.es/IMG/pdf/dem2002_-_las_matematicas_de_alicia_y_gulliver.pdf* (Quintana, 2002). Además, en Leermatemáticas (http://www.leermatematicas.es/) se pueden encontrar lecturas recomendadas según el nivel educativo, y fichas de trabajo descargables para su uso en el aula. También se pueden utilizar cuentos infantiles. Por ejemplo, *Blancanieves y los Siete Enanitos* permite trabajar desde el conteo a la proporcionalidad, planteando situaciones como: teniendo en cuenta que Blancanieves necesitó juntar todas las camitas para poder dormir, ¿qué tamaño tendrían los personajes del cuento?, ¿cómo debería ser la puerta para que Blancanieves pudiera entrar y salir de la casa?, entre otras.

Una última posibilidad es la elaboración de pequeñas narrativas, cuentos, cómics, etc., por los estudiantes (Sánchez-Barbero, Cáceres et al., 2020). Como ejemplo, el cuento elaborado por estudiantes de Grado en Maestro en Educación Primaria, *Los* *tres cerditos matemáticos,* donde, mediante la narrativa en la que los cerditos se hacen mayores y desean independizarse, se introducen tamaños y formas (los cerditos pequeño, mediano y grande hicieron sus casas redonda, triangular y cuadrada, respectivamente), se plantean enunciados verbales (recogieron 3, 1, 2 flores, respectivamente, ¿cuántas recogieron entre todos?) y se trabaja el uso del reloj (llegaron a casa a las 10:20, ¿puedes situar las agujas del reloj?) (Figura 2).

Figura 2. Algunas páginas de "Los tres cerditos matemáticos", elaborado por estudiantes

Ejemplo 4. Los Juegos

Desde una perspectiva lúdica, recursos como los juegos tradicionales o los juegos de mesa también pueden contribuir al aprendizaje de las matemáticas (Chamoso et al., 2004, 2005; Muñiz-Rodríguez et al., 2014). Aunque es común el uso de juegos para el aprendizaje de la probabilidad, esta no es la única posibilidad. Por ejemplo, jugando con tres dados, se pueden lanzar y plantear cuestiones como: intenta construir triángulos cuyos lados midan los valores obtenidos, en caso de conseguirlo, ¿qué tipo de triángulo sería?, ¿es esto posible siempre? ¿Cuándo? De esta forma se pueden deducir propiedades, trabajar clasificaciones, etc. (Corbalán, 1994, pp. 161-162).

Otra posibilidad es utilizar juegos basados en la magia. La *matemagia* despierta la curiosidad del estudiante y, gracias a la inquietud por descubrir los fundamentos matemáticos ocultos, contribuye al desarrollo del razonamiento matemático y el pensamiento crítico. Una propuesta puede ser realizar diversos trucos, provocar la discusión sobre por qué sucede eso y, mediante el trabajo en grupo y las aportaciones del docente en los momentos adecuados, facilitar el descubrimiento del truco, la matemática escondida. Posteriormente, se recomienda la práctica entre iguales, para comprobar la validez de su deducción. Por ejemplo, se puede mejorar el cálculo mental, profundizar en los sistemas de numeración, establecer patrones, trabajar composición y descomposición de números, etc., mediante el truco de adivinar la fecha de cumpleaños de un espectador, utilizando tarjetas numéricas construidas usando el sistema de numeración binario (Gardner, 1956). A un voluntario se le entregan las tarjetas (Figura 3) y se le pregunta en qué tarjetas figura el número que corresponde al día de su nacimiento. El estudiante las mira y devuelve al mago aquellas que lo contengan y, en ese instante, el mago lo adivina. Para ello, debe sumar el número más bajo en cada tarjeta (en este caso, situado en la esquina superior izquierda), por ejemplo, si el número elegido es 12, el estudiante entregaría las tarjetas naranja y amarilla, y el mago inmediatamente lo diría en voz alta (4+8=12). Se puede repetir la actividad adivinando el mes de nacimiento. Posteriormente se insta a deducir el truco y practicarlo. Es posible adaptarlo a diferentes niveles, por ejemplo, en Educación Infantil se puede realizar la adivinación de números del 1 al 15 (ayudándose de pegatinas en el reverso, para facilitar el conteo al pequemago), o en niveles superiores, motivar a los estudiantes a que elaboren sus propias tarjetas para adivinar números mayores. Después de profundizar en varios matetrucos, se puede proponer la invención de uno propio que puede estar, o no, basado en alguno de los realizados, y que lo practiquen con sus compañeros, lo que obliga a pensar en operaciones, propiedades, jerarquía, paréntesis, etc. Alegría y Ruíz (2002) ofrecen una colección de trucos con su correspondiente explicación matemática.

1	3	5	7	2	3	6	7	4	5	6	7	8	9	10	11	16	17	18	19
9	11	13	15	10	11	14	15	12	13	14	15	12	13	14	15	20	21	22	23
17	19	21	23	18	19	22	23	20	21	22	23	24	25	26	27	24	25	26	27
25	27	29	31	26	27	30	31	28	29	30	31	28	29	30	31	28	29	30	31

Figura 3. Tarjetas mágicas

Ejemplo 5. El Plegado del papel

Un recurso tradicionalmente utilizado en el aula de matemáticas es la papiroflexia, que permite hacer figuras de papel doblando, sin cortar o pegar. Por ejemplo, se pueden construir los puntos notables de un triángulo y la Recta de Euler, o utilizar la papiroflexia modular para construir figuras en 3D. Se pueden encontrar ejemplos de papiroflexia y matemáticas en la revista pajarita de la Asociación Española de Papiroflexia (AEP), (https://www.pajarita.org/articulos/).

Sin embargo, entendemos que, para su uso en el aula, se pueden permitir algunas acciones prohibidas en la papiroflexia, por ello preferimos hablar del doblado del papel en general. En esta ocasión, utilizamos el *Proyecto Dobla y Rasga*, que ofrece posibilidades de aprendizaje del sentido geométrico, por ejemplo, mediante la construcción de un Tangram. Para ello, comenzamos con un papel cuadrado, doblamos y rasgamos por su diagonal obteniendo 2 triángulos rectángulos iguales (Ta y Tb). Doblamos Ta por una de las alturas (bisectriz del ángulo recto), y rasgamos, obteniendo dos triángulos rectángulos iguales, que serán dos piezas de nuestro Tangram (P1 y P2). Este paso permite comprobar que, en un triángulo rectángulo isósceles, respecto al vértice del ángulo recto y su lado opuesto, coinciden altura, mediana, mediatriz, bisectriz. Por otro lado, doblamos y rasgamos Tb por una paralela a su hipotenusa, obteniendo un triángulo rectángulo menor, tercera pieza (P3). Doblamos la pieza restante (trapecio isósceles) por uno de sus vértices, mediante una perpendicular a las bases, para separar un triángulo rectángulo, cuarta pieza (P4), y un trapecio rectángulo. Al doblar este último por la mediatriz de su base menor obtenemos un cuadrado, quinta pieza (P5). Por último, doblando y rasgando por una paralela al lado oblicuo del trapecio rectángulo resultante obtendremos un triángulo rectángulo (P6) y un romboide (P7), sexta y séptima pieza del tangram (Figura 4). Hacer esta construcción permite trabajar el lenguaje matemático, figuras geométricas, diagonales, paralelas, etc., más deducir la relación entre áreas y perímetros de las piezas.

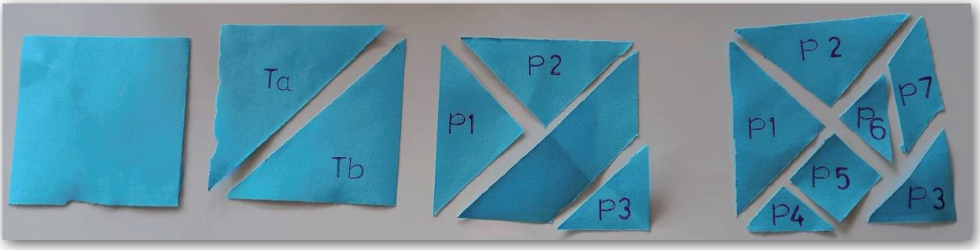


Figura 4. Proyecto Dobla y Rasga. Tangram

Otra opción, doblando papeles o cartulinas es la elaboración de un Lapbook. Este recurso consiste en una cartulina doblada, habitualmente en tres partes de manera que la parte central es el doble que las laterales, y al abrirlo aparece toda la información y materiales que los estudiantes hayan seleccionado, elaborado y colocado, en solapas, bolsillos, desplegables, libritos, etc. Son los estudiantes los que lo elaboran, lo que favorece la creatividad, la investigación en el aula y un aprendizaje más significativo. En la Figura 5 se muestra un ejemplo de uso para repasar un contenido. Se establecieron grupos de trabajo entre los que se distribuyeron los contenidos, y cada uno elaboró su Lapbook, incluyendo los aspectos que consideró más relevantes. Posteriormente se realizó la presentación en el aula y se colocaron a la vista de todos para recordar los aspectos del aprendizaje que cada uno consideró.

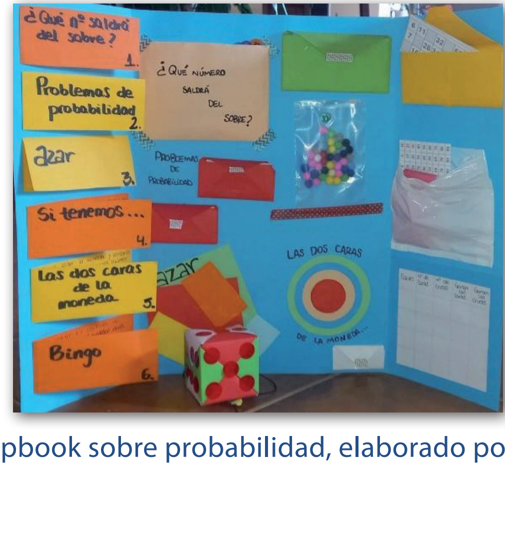


Figura 5. Lapbook sobre probabilidad, elaborado por estudiantes

El libro de texto

El Real Decreto 1744/1998 de 31 de julio (B.O.E. 4-9-1998), normativa legal vigente en la actualidad, en su artículo 2 indica:

> 2. Se entiende por libro de texto el material impreso de carácter duradero y autosuficiente, destinado a ser utilizado por los alumnos y que desarrolla, atendiendo a las orientaciones metodológicas y criterios de evaluación correspondientes, los contenidos establecidos por la normativa académica vigente para el área o materia y el ciclo o curso de que en cada caso se trate.

En particular, centrándonos en el área de Matemáticas, Van Dormolen (1986) distingue tres tipos de libros de texto:

– Libros de ejercicios y problemas.
– Libros de teoría, por un lado, y problemas y ejercicios por otro.
– Mezcla: teoría regularmente mezclada con problemas y ejercicios.

En el presente trabajo, se entiende por libro de texto de matemáticas el que corresponde a un curso concreto y cuyo uso específico es la enseñanza.

El libro de texto es un recurso que se encuentra presente en las aulas de forma habitual. De hecho, en muchos casos, es el propio manual el que establece el currículo real que se desarrolla en un aula. Su uso en el aula puede realizarse de forma exclusiva o bien de forma conjunta con otros materiales y recursos. Una de las grandes ventajas que presenta el libro de texto en el aula es la ayuda que supone para la planificación de las clases. Sin embargo, precisamente esta ventaja se puede convertir en un gran inconveniente si el libro de texto se convierte en el elemento que guía la práctica docente de forma exclusiva. Torres considera que para el profesorado se puede producir una "descualificación profesional" (1994, p. 177). Trabajar siguiendo un libro de texto nos puede llevar a cuestionarnos la formación del profesorado. El profesor debe tener la preparación suficiente para poder buscar diferentes formas de poner el conocimiento de contenido matemático específico a disposición del alumnado, teniendo en cuenta la diversidad de alumnos que existe en las aulas y tratando de motivarlos en función de sus inquietudes e intereses. Por otra parte, al plantearse la posibilidad de que un libro de este tipo pudiera permitir al alumno trabajar de forma autónoma, sin contar con la presencia de un profesor, Van Dormolen (1986) señala que la pérdida de interacción entre los alumnos y de estos con el profesor no favorece una comprensión profunda de las matemáticas. Aunque como señala Cockcroft el libro de texto se pueda considerar una "ayuda inestimable" para el profesor, es preciso destacar la importancia de la figura del profesor para que el libro de texto pueda ser utilizado de forma que contribuya de la manera más adecuada en el aprendizaje de los alumnos (1985, p. 113). Por ejemplo, la presencia del profesor es necesaria para que, utilizando el libro de texto, pueda atender a la diversidad del alumnado. Las clases online, que se desarrollaron durante el periodo en que los alumnos no pudieron asistir de manera presencial a las aulas debido a la pandemia de COVID-19, pusieron de manifiesto que el proceso de enseñanza y aprendizaje no se podía llevar a cabo de manera que el alumno trabajara de forma autónoma con su libro de texto, sino que era necesaria la presencia de un profesor.

Como señalan Cantoral et al., el libro de texto presenta "visiones institucionalizadas del conocimiento que con frecuencia suelen ser distantes de los estudiantes" (2015, p. 11). La normativa legal hace hincapié en la importancia de proponer situaciones de aprendizaje contextualizadas, que fomenten la reflexión, el razonamiento y el establecimiento de conexiones y que permitan trabajar la modelización en las diferentes etapas educativas. Se propone la utilización de metodologías activas, que permitan trabajar de forma individual y colectiva. En particular se señala la importancia del trabajo por proyectos como metodología para el desarrollo de actividades de carácter interdisciplinar lo que permitirá promover la reflexión. Sin embargo, como señalan López et al., resulta curioso que "la principal herramienta de trabajo en el aula no sea coherente con estas ideas, y que sólo aparezcan problemas en los que se pone en marcha la lógica, el ingenio o problemas cercanos a la vida real en lugares puntuales de la unidad" (2015, p. 89). En esta misma línea se encuentran los resultados obtenidos en las investigaciones realizadas analizando el álgebra y el análisis matemático a través de las situaciones reales presentes en los libros de texto de Educación Secundaria (Codes et al., 2010, 2011) donde se ha puesto de manifiesto la escasez de actividades que fomenten la reflexión y la presencia de una serie de tareas que, tratando de ser contextualizadas, realmente proponen planteamientos demasiado artificiales, lo que hace que los alumnos las encuentren alejadas de sus intereses.

En definitiva, con respecto al uso del libro de texto en las aulas, es fundamental la figura del profesor y de él depende la función que tenga el manual en el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje. La posibilidad de realizar trabajos en grupo, fomentar la comunicación de ideas matemáticas y prestar atención a la construcción social del conocimiento son tareas propias del profesor. El libro de texto no tiene que ser un material cerrado, sino que puede tener una propuesta de tareas de investigación, de proyectos, etc. Sin duda, la posibilidad de plantear estas tareas, de carácter diferente a lo que se encuentra tradicionalmente en el libro de texto, debería ser una ventaja del libro de texto digital. Sin embargo, al menos de momento, el libro de texto digital no se está utilizando de modo habitual en las aulas. Sería necesario que todos los alumnos pudieran contar con un dispositivo para acceder a él en el aula de forma que, en muchas ocasiones, el uso se limita a la proyección en la pantalla del mismo texto que los alumnos tienen en papel. Las actividades que se proponen en el libro de texto digital suelen ser las mismas que se realizan de forma habitual en las aulas y, cuando tiene alguna actividad en la que se utilizan recursos diferentes, como por ejemplo Geogebra, en general se limitan a actividades ya realizadas y que pueden visualizarse, cuando la gran ventaja de este y otros recursos tecnológicos es precisamente la posibilidad de que los alumnos realicen tareas de investigación que les permitan comprender los conceptos matemáticos y aplicarlos a diferentes situaciones. El hecho de que el alumno trabaje solo con su libro digital en su dispositivo tampoco favorece la interacción con el resto de los compañeros, aspecto fundamental para la comprensión de las matemáticas, como ya se ha indicado.

Diversos autores (Torres, 1994; Villella y Contreras, 2005) y la propia experiencia como docentes muestran que la utilización del libro de texto en el aula permite al profesorado gestionar la temporalización de manera más sencilla y al alumnado tener acceso a un documento que podrá consultar si no ha quedado clara alguna explicación y, sobre todo, como fuente para la realización de actividades. Pero, salvo estas ventajas, una para alumnos y otra para profesores, encontramos una serie de inconvenientes como el hecho de que no parte de los conocimientos previos de los alumnos sino que da por supuesto el punto de partida y no atiende a la diversidad. Además, no fomenta la interacción con los compañeros, la realización de trabajos cooperativos, trabajos de campo o de investigación o talleres de carácter interdisciplinar y potencia la actividad rutinaria y repetitiva.

Todo lo expuesto anteriormente nos lleva a considerar, tal como señalan Villella y Contreras (2005) que, a pesar de la importancia que tiene la utilización del libro de texto en el aula y la responsabilidad que en muchas ocasiones se deja que recaiga en el manual, la elección de dicho recurso no se realiza de una forma especialmente cuidadosa. Por este motivo consideramos que es importante que la elección del libro de texto que va a utilizarse en el aula se realice siguiendo un modelo de análisis y valoración de manuales escolares que permita realizar dicha elección de forma rigurosa (Monterrubio y Ortega, 2009, 2011, 2012). En muchas ocasiones, esta decisión provoca situaciones en las que, cuando ya se está utilizando el libro de texto en el aula, se observan deficiencias importantes que hacen que el funcionamiento no sea el esperado. Por este motivo, de acuerdo con Villella y Contreras, consideramos que "parece necesario buscar espacios en el ámbito de la formación inicial y permanente del profesorado para realizar actividades formativas que permitan añadir al conocimiento profesional del docente criterios explícitos para la selección y uso de libros de texto" (2005, p. 431).

Materiales manipulativos

Bruner (1966) indica que para interiorizar un concepto o adquirir un conocimiento matemático es necesario el paso por tres procesos: Concreto, donde los materiales manipulativos sirven de apoyo para un acercamiento a la realidad; Pictórico, donde la información se interpreta de forma visual a través del dibujo; y Simbólico, donde son los propios símbolos involucrados en la tarea los que cobran importancia, plasmando así los Procesos mentales de la fases Concreta y Pictórica. English (2013; citado en Rodríguez-Muñiz et al., 2021) señala que el trabajo con objetos, primero desde la manipulación y después desde lo gráfico, permite a los alumnos la distinción de diferentes características de esos objetos, facilitando así el paso a la abstracción matemática.

Para establecer una correcta clasificación de los materiales manipulativos, se van a adaptar diferentes clasificaciones no excluyentes que han dado algunos autores, como son su diseño y creación (Cascallana, 1988) y la utilidad y el formato en el que se presentan (Flores et al., 2011). Además, se ha ampliado con una clasificación de los materiales manipulativos según el material de creación, obteniendo así una clasificación más completa (Figura 6).

Quizás una de las clasificaciones que se debe explicar para una mejor comprensión es la realizada por Cascallana (1988), quien entiende por material estructurado o específico aquel cuyo diseño y creación tiene un fin didáctico (por ejemplo: las regletas de Cuisenaire, los geoplanos o los policubos, entre otros), y por material no estructurado o no específico, aquel cuyo diseño y creación está relacionado con otros aspectos cotidianos, sin finalidad didáctica propia (por ejemplo: animales, muñecos, coches, entre otros).

El uso de los materiales manipulativos no debería ser una recomendación, sino una obligación pedagógica (Alsina, 2004; Canals, 2013, citados en Sotos y Ródenas, 2018). De hecho, su uso en cualquier nivel académico permite que el alumnado adquiera conocimientos y desarrolle la competencia matemática (De Castro y Palop, 2019), quizás por este motivo, los nuevos currículos educativos le prestan especial atención.

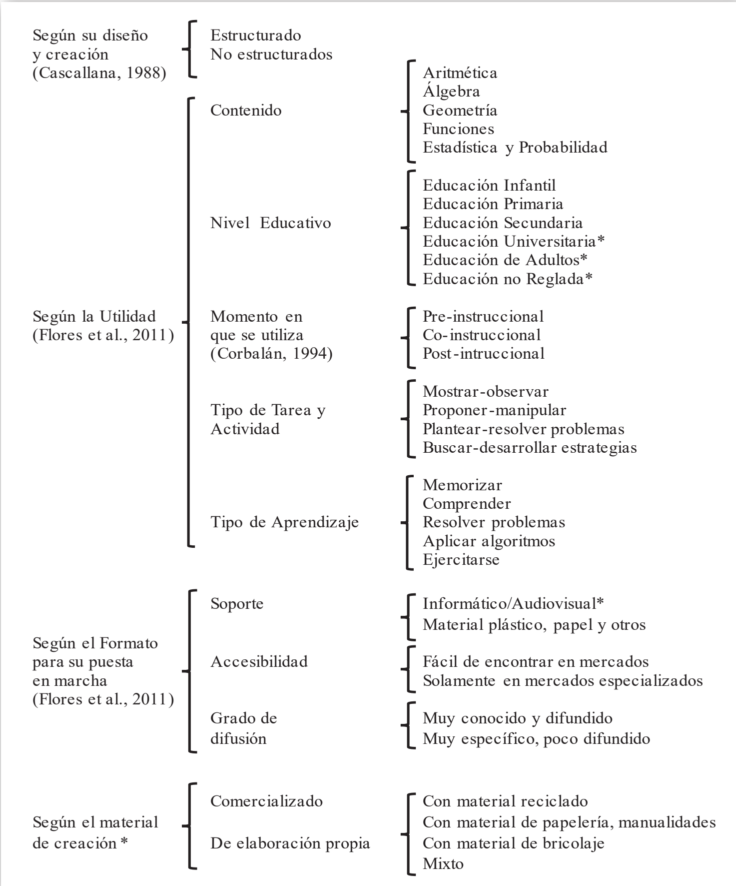


Figura 6. Clasificación de materiales manipulativos. (Nota: La ampliación de la clasificación está indicada con asterisco (*))

El Real Decreto 95/2022 de 1 de febrero de 2022 (B.O.E. 02-02-2022) y el Real Decreto 157/2022 de 1 de marzo de 2022 (B.O.E. 02-03-2022) por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil y Primaria, respectivamente, apuntan que, para un correcto desarrollo de la competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería, se ha de atender especialmente a la manipulación de objetos y comprobación de fenómenos, contextualizando e invitando a los alumnos a la reflexión, al razonamiento y al establecimiento de relaciones. Del mismo modo, el Real Decreto 217/2022 de 29 de marzo de 2022 (B.O.E. 30-03-2022) por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Enseñanza Secundaria Obligatoria defiende que la formulación y comprobación de las conjeturas se puede realizar por medio de materiales manipulativos. Además, los nuevos currículos educativos incluyen como saber básico el sentido socioafectivo, teniendo cabida en él las creencias, actitudes y emociones de los alumnos hacia las matemáticas.

Ante todas estas cuestiones, ha de quedar claro que el docente tiene un papel importante en el aula que debe trabajar en varios sentidos, siempre teniendo en cuenta el objetivo de aprendizaje que se plantee para un correcto desarrollo y cumplimiento del currículo (Abaurrea et al., 2019). Por una parte, es el que debe seleccionar el tipo de tareas matemáticas que quiere desarrollar en el aula (Sánchez-Barbero, Chamoso et al., 2020); por otra parte, es el que debe seleccionar el medio adecuado para la consecución de este objetivo (Valbuena et al., 2018) y, por último, es el que debe mediar en el aula redirigiendo la interacción de los estudiantes hacia un correcto uso del material dependiendo de la tarea propuesta, para la consecución del objetivo de aprendizaje planteado (Sua y Jaime, 2021). Esto, junto con las ideas de Valbuena et al. (2018) referidas a que la calidad de la educación está ligada a la calidad docente, lleva a pensar que en la formación docente debería asumir mayor importancia el aprendizaje del uso de recursos didácticos (Sánchez-Barbero, Cáceres et al., 2020) o, incluso, trabajar en la formación docente cómo elaborar materiales manipulativos (Sánchez-Barbero et al., 2018).

Aunque existen numerosos y variados materiales manipulativos, a modo de ejemplo se van a utilizar los policubos, fundamentalmente por tres razones: es un material manipulativo conocido, su versatilidad permite trabajar diversos contenidos matemáticos en diferentes niveles y su bajo coste es asumible por cualquier centro educativo.

Ejemplo 1: Patrones y sentido numérico

La búsqueda de patrones y regularidades es un contenido que se puede trabajar desde Educación Infantil, comenzando con los patrones de repetición, donde se puede pedir a los alumnos que continúen añadiendo policubos a la pieza que se les presenta (Figura 7).

Figura 7. Patrón de repetición

Unido a la búsqueda de patrones, se puede trabajar el sentido numérico planteando diferentes situaciones como la que se presenta en la Figura 8 donde se espera que continúen añadiendo cuatro fichas rojas, una ficha blanca, cinco fichas rojas, etc., o la que se muestra en la Figura 9 donde el objetivo es trabajar la secuencia numérica de números pares e impares.

Figura 8. Patrón numérico

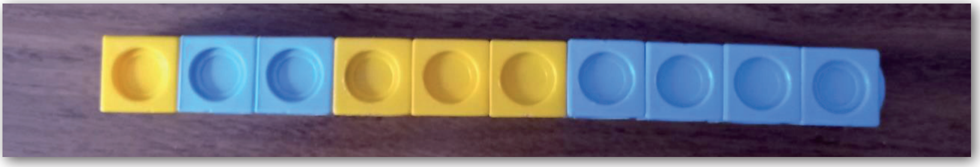


Figura 9. Secuencia numérica, pares e impares

Ejemplo 2: Sentido geométrico

El sentido geométrico se puede trabajar pidiendo a los alumnos que construyan los tricubos (Figura 10), los tetracubos (Figura 11) y, finalmente, se eligen las piezas de éstos que permiten construir un cubosoma (Figura 12).

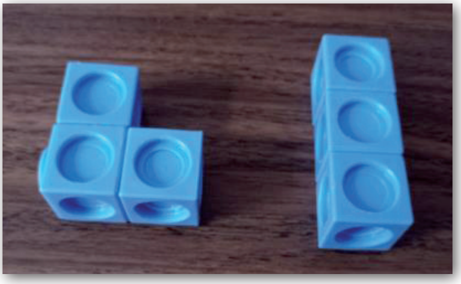


Figura 10. Tricubos

Figura 11. Tetracubos

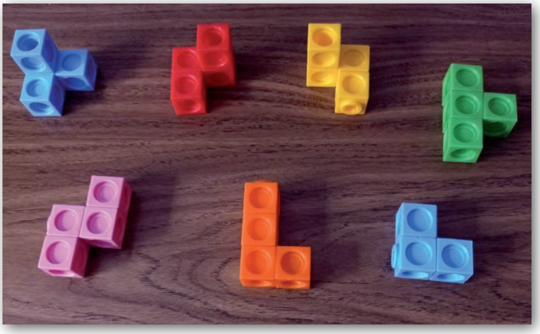


Figura 12. Cubosoma

A continuación, y de modo amplio, se muestran ejemplos para trabajar el sentido estocástico desde Educación Infantil hasta Educación Secundaria.

Ejemplo 3: Moda (Figura 13)

– Situación: se pregunta a 10 alumnos cuántos hermanos tienen. Tres han dicho que cero, cuatro que uno y tres que dos. ¿Cuál es la moda de hermanos?
– Pensamiento: la moda correspondería a la columna más alta.
– Respuesta: la moda es 1.

Figura 13. Cálculo de la moda

Ejemplo 4: Media (Figura 14)

– Situación: un alumno ha sacado en sus exámenes de matemáticas del primer trimestre un 4, 5 y 6, pero… ¿cómo le ayudamos a calcular su nota final?
– Pensamiento: tendríamos que conseguir que las tres columnas relativas a las notas de cada examen tengan la misma altura.
– Respuesta: la media es 5.

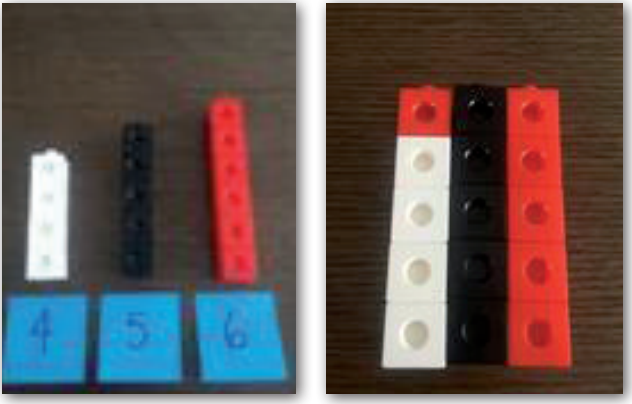


Figura 14. Cálculo de la media

Ejemplo 5: Mediana con un número impar de datos (Figura 15)

- Situación: se pregunta a 9 alumnos cuántos hermanos tienen. Tres han dicho que 0, tres que 1 y tres que 2. ¿Cuál es la mediana de hermanos?
- Pensamiento: ordenar todos los policubos, primero el color correspondiente a cero hermanos, después el correspondiente a un hermano y por último el correspondiente a dos hermanos; retiraríamos un policubo de cada extremo; y así repetidamente hasta que en el centro solo quede uno (el número de alumnos es impar), que sería la mediana.
- Respuesta: la mediana es 1.

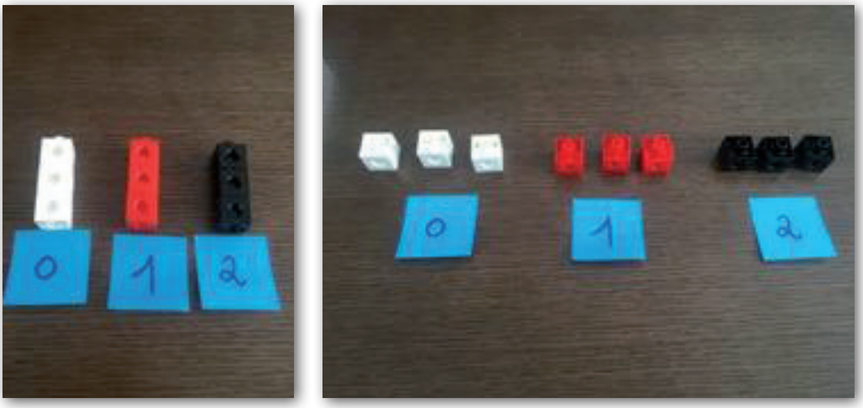


Figura 15. Cálculo de la mediana con número impar de datos

Ejemplo 6: Mediana con un número par de datos (Figura 16)

- Situación: se pregunta a 10 alumnos cuántos hermanos tienen. Tres han dicho que cero, cuatro que uno y tres que dos. ¿Cuál es la mediana de hermanos?
- Pensamiento: ordenar todos los policubos, primero el color correspondiente a cero hermanos, después el correspondiente a un hermano y por último el correspondiente a dos hermanos; retiraríamos un policubo de cada extremo; hasta que en el centro queden dos policubos (el número de alumnos es par). Ahora, calcularíamos la media de estos dos números.
- Respuesta: la mediana es 1.

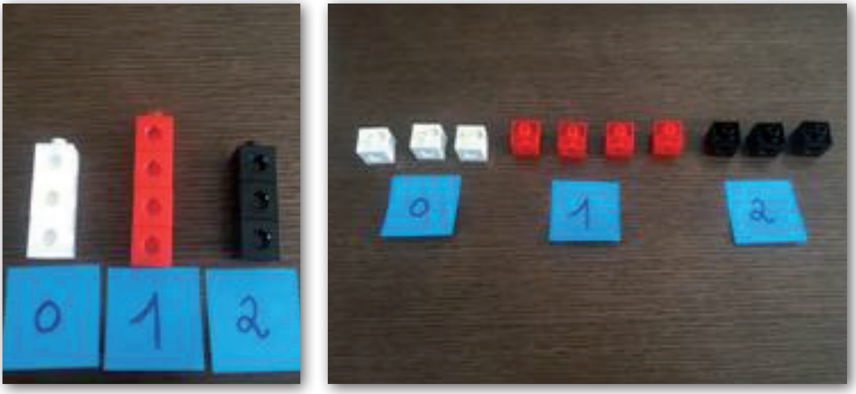


Figura 16. Cálculo de la mediana con número par de datos

Ejemplo 7: Permutaciones (Figura 17)

- Situación: con 3 colores distintos (blanco, negro y rojo), ¿cuántas banderas de 3 colores distintos podemos formar?
- Pensamiento: hay tres elementos, tomamos todos de tres en tres y sí importa el orden.
- Respuesta: son permutaciones de 3 elementos tomados de 3 en 3.

$$P_n = n! = P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Figura 17. Cálculo de permutaciones

Ejemplo 8: Variaciones sin repetición (Figura 18)

- Situación: con 3 colores distintos (blanco, negro y rojo; m), ¿cuántas banderas de 2 colores distintos (n) podemos formar?
- Pensamiento: hay tres elementos, tomamos de dos en dos, sí importa el orden y no se pueden repetir.
- Respuesta: son variaciones sin repetición de 3 elementos tomados de 2 en 2.

$$V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!} = V_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 6$$

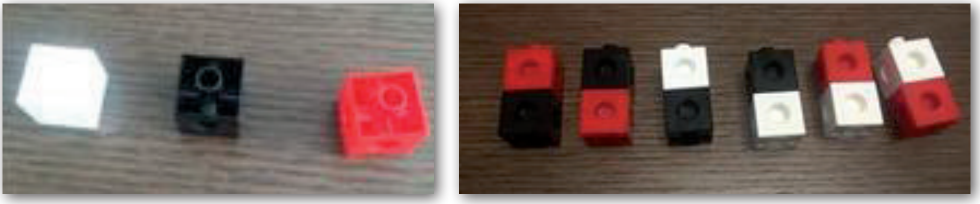


Figura 18. Cálculo de variaciones sin repetición

Ejemplo 9: Variaciones con repetición (Figura 19)

- Situación: con 3 colores distintos (blanco, negro y rojo; m), ¿cuántas banderas de 2 colores (n) podemos formar?
- Pensamiento: hay tres elementos, tomamos de dos en dos, sí importa el orden y sí se pueden repetir.
- Respuesta: son variaciones con repetición de 3 elementos tomados de 2 en 2.

$$VR_{m,n} = m^n = V_{3,2} = 3^2 = 9$$

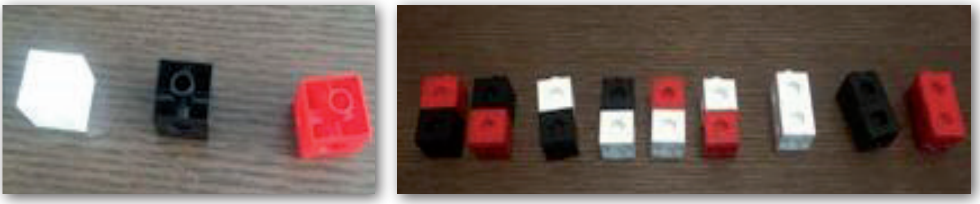


Figura 19. Cálculo de variaciones con repetición

Ejemplo 10: Combinaciones sin repetición (Figura 20)

- Situación: con 3 colores distintos (blanco, negro y rojo; m), ¿cuántos grupos de 2 colores (n) podemos formar?
- Pensamiento: hay tres elementos, tomamos de dos en dos, no importa el orden y no se pueden repetir.

– Respuesta: son combinaciones sin repetición de 3 elementos tomados de 2 en 2.

$$Cm,n = \frac{V_{m,n}}{P_n} = C_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)! \cdot 2!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3$$

Figura 20. Cálculo de combinaciones sin repetición

Ejemplo 11: Combinaciones con repetición (Figura 21)

– Situación: con 3 colores distintos (blanco, negro y rojo; m), ¿cuántos grupos de 2 colores (n) podemos formar?
– Pensamiento: hay tres elementos, tomamos de dos en dos, no importa el orden y sí se pueden repetir.
– Respuesta: luego son combinaciones con repetición de 3 elementos tomados de 2 en 2.

$$CRm,n = \binom{m+n-1}{n} = CR_{3,2} = \binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 6$$

Figura 21. Cálculo de combinaciones con repetición

Elaboración de materiales manipulativos y ejemplos

Según la clasificación de materiales manipulativos (Figura 6), existe material reciclado y de papelería, entre otros, que pueden servir de materia prima para la elaboración de materiales manipulativos adaptados a las necesidades de los alumnos. Por ejemplo, en la enseñanza para adultos (tengan o no discapacidades o dificultades de aprendizaje) cuando se disponen a trabajar con material manipulativo para el aprendizaje de un cierto contenido matemático, se encuentran con materiales comercializados, a veces muy infantiles, que nada tienen que ver con su edad. Por otra parte, en ocasiones, no se encuentran materiales manipulativos comercializados útiles para el aprendizaje de determinados contenidos o conceptos matemáticos, o son demasiado costosos para poder disponer de ellos en los centros educativos, por lo que una posibilidad, ante estos casos, es la elaboración de materiales manipulativos atendiendo a las necesidades reales de los usuarios.

Es preciso tener claros los contenidos y objetivos matemáticos que quieren abordarse con la utilización del material manipulativo que se quiere elaborar. Generalmente, es preferible elaborar un material para abordar un contenido u objetivo específico, que uno general.

Por otra parte, hay que determinar con claridad la población a la que irá destinado el material. Precisamente esta es una de las grandes ventajas de la elaboración de este tipo de material ya que podemos crear un material para atender las necesidades específicas de un alumnado concreto.

A continuación, se muestran ejemplos de materiales manipulativos, elaborados por futuros docentes de Educación Infantil, Primaria y Secundaria, que permiten su adaptación para alumnos con discapacidad visual. La ficha sigue el formato propuesto por Chamoso et al. (1997).

Ejemplo 1:

NOMBRE: *"La mariquita de colores"* (Figura 22)

NIVEL: Educación Infantil

CONTENIDOS:
- Colores.
- Conteos numéricos.

OBJETIVOS:
- Conocer los colores.
- Discriminar por colores.
- Relacionar los colores.
- Realizar conteos numéricos.

MATERIALES QUE SE UTILIZAN: fieltro y ojos móviles.

DESCRIPCIÓN DEL JUEGO: se tiene la mariquita, puntos de tres colores (rosas, azules y verdes) y un dado en cuyas caras tienen los tres colores relativos a los puntos. El alumno tira el dado y tendrá que poner sobre la mariquita todos los puntos del mismo color que el dado indica. Así mismo, el alumno podrá realizar el conteo de cuántos puntos hay sobre la mariquita a medida que los va colocando.

VARIANTES: según se avanza de nivel, se puede modificar el material:

– Añadir más colores para su discriminación.
– Añadir un dado numérico de modo que el alumno debe tirar los dos dados (el de colores y el numérico) y poner sobre la mariquita tantos puntos como indica el dado numérico y del color que indica el dado de colores.
– Realizar sumas y restas. El alumno tira dos veces el dado numérico y deberá sumar o restar (del mayor número sacado el menor de ellos), de modo que ese sería el total de puntos que debe poner sobre la mariquita, del color que indique el dado de colores.

OBSERVACIONES: adaptación a discapacidad visual. Realizar los puntos de la mariquita de diferente material, por ejemplo: los puntos rosas en goma eva, los verdes en fieltro y los azules en cartón con relieve (y lo mismo para el dado de colores). Si algún alumno presenta una discapacidad visual, mediante el tacto sabrá los puntos que debe poner sobre la mariquita y así realizar la actividad con los compañeros.

Figura 22. La mariquita de colores

Ejemplo 2:

NOMBRE: *"El árbol de los números"* (Figura 23)

NIVEL: Educación Primaria y Secundaria

CONTENIDOS:
– Números pares e impares.
– Números enteros.

OBJETIVOS:
– Clasificar números.
– Diferenciar números positivos y negativos.
– Diferenciar números pares e impares.

MATERIALES QUE SE UTILIZAN: cartulina, goma eva, perlitas adhesivas y plástico de plastificar.

DESCRIPCIÓN DEL JUEGO: se tienen dos ramas en el árbol. Una de ellas soporta los números pares y otra los impares y, a su vez, cada una de ellas se bifurca en positivos y negativos. El alumno deberá seleccionar una ficha numérica al azar y tendrá que clasificar el número de la ficha según sea par o impar, y con signo positivo o negativo, introduciendo la ficha del número en la copa del árbol adecuada.

VARIANTES: el alumno realiza operaciones con las fichas numéricas y, clasifica el resultado, en la copa del árbol correspondiente.

OBSERVACIONES: adaptación a discapacidad visual. Las palabras que nos llevan a la correcta clasificación de las fichas numéricas están en sistema braille. Un aspecto importante sería adaptarlas adecuadamente siguiendo las dimensiones que requiere la lectura en dicho sistema. También podría hacerse cada manzana de un material diferente para que los alumnos con discapacidad visual puedan reconocerlas al tacto.

Figura 23. El árbol de los números. Material adaptado a discapacidad visual

Ejemplo 3:

NOMBRE: *"La revolución de las figuras geométricas"* (Figura 24)

NIVEL: Educación Secundaria

CONTENIDOS:
- Figuras planas.
- Cuerpos de revolución.

OBJETIVOS:

– Conocer cómo se forman los diferentes cuerpos de revolución (cono, tronco de cono, cilindro y esfera)
– Asociar el cuerpo de revolución a la figura geométrica que lo genera.

MATERIALES QUE SE UTILIZAN: goma eva, pajitas, pegamento y tijeras.

DESCRIPCIÓN DEL JUEGO: al hacer girar las pajitas se generan los cuerpos de revolución correspondientes.

Figura 24. La revolución de las figuras geométricas

Ventajas e inconvenientes del uso de recursos y materiales manipulativos

El uso de recursos y materiales manipulativos para el aprendizaje de las matemáticas cuenta con ventajas e inconvenientes que se han tratado de recoger en una única tabla (Tabla 1), aunque debido a la diversidad de recursos y materiales y de las formas de uso, es posible que algunas de ellas no correspondan a determinados recursos.

Tabla 1. Ventajas e inconvenientes del uso de recursos y materiales manipulativos para el aprendizaje de las matemáticas

Ventajas	Inconvenientes
Aumenta la motivación y las actitudes positivas hacia las matemáticas	Desconocimiento del profesorado
Propicia la participación del estudiante	Falta del material necesario
Minora el rechazo hacia las matemáticas y ayuda a superar bloqueos	Alto coste económico
Mejora la comprensión	Ratio profesor-alumno
Ayuda al desarrollo del pensamiento matemático y facilita el paso de concreto a abstracto	Disposición y tamaño del aula

Ventajas	Inconvenientes
Transforma el aula en un taller para la construcción del conocimiento matemático mediante la manipulación y experimentación	Necesidad de flexibilidad horaria
Proporciona un aprendizaje significativo	Sensación de pérdida (o de falta) de tiempo
Posibilita la investigación en el aula y fomenta la resolución de problemas	Menosprecio o rechazo por parte de algunos padres
Promueve el trabajo en grupo (cooperativo/colaborativo)	
Fomenta la interacción positiva entre compañeros	
Ayuda en el reconocimiento del éxito y los errores propios y ajenos. Mejora la empatía	
Refuerza la autoestima y fomenta la autonomía	
Facilita la adquisición de rutinas y el respeto a las normas	
Estimula la imaginación y potencia la creatividad	
Desarrolla pensamiento crítico y favorece la discusión	
Facilita la adquisición de competencias y la alfabetización matemática	
Permite la atención a la diversidad	

Recomendaciones para el uso de recursos y materiales

Para poder utilizar cualquier recurso se deben seguir los siguientes pasos: "1º Reconocerlo, tener conciencia de que existe. 2º Admitir que se necesita, creer en él. 3º Saber utilizarlo." (Chamoso y Rawson, 2003, p.120). Existen multitud de recursos didácticos que se pueden encontrar en catálogos, páginas web, etc., a los que hay que añadir aquellos que pueden elaborar tanto el profesor como los estudiantes (Paso 1º). A la hora de seleccionarlos, se debe decidir si son adecuados, o no, para cumplir el objetivo de aprendizaje pretendido, y que no debería ser, únicamente, desarrollar una sesión divertida (Paso 2º). Por último, se debe planificar un uso adecuado del mismo (Paso 3º). Queremos incidir en la importancia del segundo paso, de tener confianza en los beneficios que este puede aportar, conocerlo detalladamente, su aplicación y su posible contribución al aprendizaje. Además, su uso debe ser resultado de la planificación de situaciones de aprendizaje con una selección de recursos y actividades, en la medida de lo posible, vinculadas al contexto cotidiano, y en función del desarrollo del pensamiento del alumno.

Algunos aspectos para su utilización que se deben tener en cuenta en esta planificación son los siguientes: objetivos de aprendizaje (contenido…), alumnos a los que se dirige (número, edad, características, …), tiempo de uso (cuándo y cuánto), modo de empleo (metodología, …). Así, cuando nos planteamos el uso de recursos o materiales manipulativos para trabajar matemáticas en las aulas, debemos dar respuesta a algunas preguntas tal como se recoge en la Tabla 2.

Tabla 2. Preguntas fundamentales a la hora de usar recursos y materiales

Preguntas	Respuestas
Qué	Contenidos y objetivos matemáticos que se van a trabajar
A quién	Características particulares de los alumnos a los que se dirige
Cuándo y cuánto	Tiempo que se va a emplear
Dónde	Características del aula o lugar
Cómo	Metodología para el desarrollo de la sesión

Teniendo en cuenta lo anteriormente expuesto, se propone el siguiente Decálogo para la utilización de recursos y materiales manipulativos para el aprendizaje de las matemáticas (Figura 25).

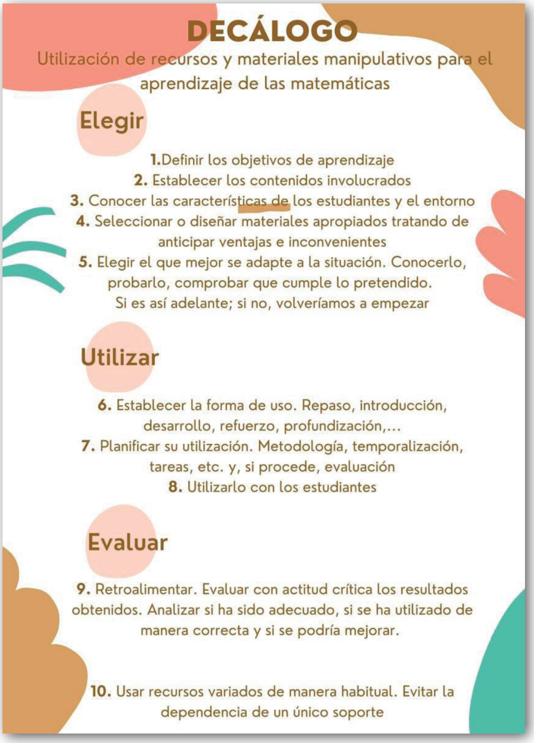


Figura 25. Decálogo para la utilización de recursos y materiales manipulativos para el aprendizaje de las matemáticas (creado con plantilla a través de www.canva.com)

Consideraciones finales

Las nuevas leyes educativas dejan constancia de la importancia del uso de diferentes recursos, en particular de materiales manipulativos, para una correcta comprensión de las matemáticas, facilitando el paso de nuestro alumnado de lo concreto a lo abstracto y haciendo hincapié en las posibilidades que ofrece para atender a la diversidad presente en las aulas de forma habitual.

Teniendo en cuenta los inconvenientes que presenta la utilización del libro de texto como único recurso en el aula, así como las deficiencias que, al menos de momento, se observan en los libros de texto digitales, consideramos fundamental el uso de diferentes recursos didácticos en el aula de matemáticas ya que favorecen el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, fomentan el razonamiento matemático y potencian los procesos de abstracción.

Se ha tratado de mostrar diversos recursos y posibilidades de utilización, pero no se debe olvidar que su uso, en el aula de matemáticas, es un medio para conseguir el objetivo perseguido y no el fin en sí mismo. Cualquier recurso utilizado, ya sea el libro de texto, material manipulativo u otros recursos, debe estar al servicio del profesor, no al revés. Se recomienda no abusar de ninguno de ellos, ya que se convertiría en algo repetitivo, perdiendo su aspecto motivador mientras que, por el contrario, el uso variado evita la dependencia del soporte utilizado y puede favorecer el proceso de generalización de los conceptos. Por otro lado, se entiende que los diferentes recursos y materiales deberían utilizarse de manera habitual, tanto dentro como fuera del aula de Matemáticas, sin reducir su uso únicamente a ocasiones especiales.

Con todo lo expuesto en el capítulo queda patente la importancia del uso de recursos y materiales diferentes al libro de texto, pero que se complementen entre sí, así como la importancia que tiene el docente en el aula, pues es el encargado de la selección tanto de las tareas como de los recursos que se utilizarán en el aula. Es por esto por lo que se debe dar mayor importancia a la introducción en los planes de formación docente de la enseñanza de una adecuada elección y un correcto uso y elaboración de diferentes recursos didácticos.

Referencias

Abaurrea, J., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R (2019). Análisis didáctico de actividades para el estudio de lugares geométricos. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII*, 143-152. SEIEM.

Alegría, P. y Ruiz, J. C. (2002). La Matemagia Desvelada. *SIGMA, 21*, 145-174. https://www.researchgate.net/publication/28067236_La_matemagia_desvelada.

Alsina, Á. (2004). *Desarrollo de las competencias matemáticas con recursos lúdico-manipulativos para niños y niñas de 6 a 12 años*. Narcea.

Area, M., Parcerisa, A. y Rodríguez, J. (Coords.) (2010). *Materiales y recursos didácticos en contextos comunitarios*. Graó.

Bruner, J. S. (1966). Toward a theory of instruction. Harvard University Press.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso matemático escolar en los libros de texto, una mirada desde la teoría socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 8*, 9–28.

Cascallana, M. T. (1988). *Iniciación a la matemática. Materiales y recursos didácticos*. Aula XXI.

Chamoso, J. M., Durán, J., García, J. F., Martín, J. y Rodríguez, M. (2004). Análisis y experimentación de juegos como instrumento para enseñar matemáticas. *SUMA, 47*, 47-58.

Chamoso, J. M., Graña, B., Rodríguez, M. y Zárate, J. (2005). *Matemáticas desde la Prensa.* Nivola.

Chamoso, J. M., Martín, P., Pereña, J. C. y Revuelta, F. J. (1997). Algunos materiales para su utilización en el aula de Matemáticas. *Aula, 9*, 319-350.

Chamoso, J. M. y Rawson, W. (2003). *Matemáticas en una tarde de paseo*. Nivola.

Cockcroft, W. H. (1985). *Las Matemáticas sí cuentan*. Ministerio de Educación y Ciencia.

Codes, M., González, M. T., Monterrubio, M. C. y Delgado, M. L. (2010). El análisis matemático a través de las situaciones reales presentes en los libros de texto de educación secundaria. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación,* 173-186. SEIEM.

Codes, M., González, M. T., Monterrubio, M. C. y Delgado, M. L. (2011). El álgebra a través de las situaciones reales presentes en los libros de texto de educación secundaria. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática*, 237-247.

Corbalán, F. (1994). *Juegos matemáticos para Secundaria y Bachillerato*. Síntesis.

De Castro, C. y Palop, B. (2019). ¿Ayudan los materiales manipulativos a resolver tareas matemáticas? Sí, pero... En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII*, 243-252. SEIEM.

Flores, P., Lupiáñez, J. L., Berenguer, L., Marín, A. y Molina, M. (2011). *Materiales y recursos en el aula de matemáticas*. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Gardner, M. (1956). *Mathematics, Magic and Mystery*. Dover.

López, E. M., Guerrero, A. C., Carrillo, J. y Contreras, L. C. (2015). La resolución de problemas en los libros de texto: un instrumento para su análisis. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *8*, 73 – 94.

Martín, M. y Martín, A. (2021). Proyecto "ESC3N4S MA/TEMÁTICAS". *Making Of. Cuadernos de Cine y Educación, 162.* Centro de Comunicación y Pedagogía. http://www.centrocp.com/proyecto-esc3n4s-ma-tematicas/.

Monterrubio, M. C. y Ortega, T. (2009). Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII*, 37-53. SEIEM.

Monterrubio, M. C. y Ortega, T. (2011). Diseño y aplicación de instrumentos de análisis y valoración de textos escolares de matemáticas. *PNA, 5*(3), 105-127.

Monterrubio, M. C. y Ortega, T. (2012). Creación y aplicación de un modelo de valoración de textos escolares matemáticos en educación secundaria. *Revista de Educación, 358*, 471-496. http://doi.org/10-4438/1988-592X-RE-2010-358-087.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., Kelly, D. L. y Fishbein, B. (2020). *TIMSS 2019 International Results in Mathematics and Science.* https://timssandpirls.bc.edu/timss2019/international-results/.

Muñiz-Rodríguez, L., Alonso, P. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2014). El uso de los juegos como recurso didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas: estudio de una experiencia innovadora. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 39*, 19–33.

Olmos, R. y Martí-Contreras, O. (2021). ¿Nos ayuda la competencia matemática a no dejarnos engañar por las fake news? En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV*, 668. SEIEM.

Quintana, J. (2002). *Las Matemáticas de Alicia y Gulliver: lo grande y lo pequeño*. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. https://fespm.es/IMG/pdf/dem2002_-_las_matematicas_de_alicia_y_gulliver.pdf

Real Decreto 1744/1998, de 31 de julio, sobre uso y supervisión de libros de texto y demás material curricular correspondientes a las enseñanzas de Régimen General. *Boletín Oficial del Estado, 212,* de 4 de septiembre de 1998. https://www.boe.es/boe/dias/1998/09/04/pdfs/A30005-30007.pdf.

Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero de 2022, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil. *Boletín Oficial del Estado, 28*, de 2 de febrero de 2022. https:// https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/02/01/95.

Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo de 2022, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado, 52*, de 2 de marzo de 2022. https://www.boe.es/buscar/act.php?id=BOE-A-2022-3296.

Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo de 2022, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Enseñanza Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado, 76*, de 30 de marzo de 2022. https://www.boe.es/boe/dias/2022/03/30/pdfs/BOE-A-2022-4975.pdf.

Rodríguez-Muñiz, L. J., Muñiz-Rodríguez, L. y Aguilar-González, Á. (2021). El recuento y las representaciones manipulativas. Los primeros pasos de la alfabetización estadística. *PNA, 15*(4), 311-338. https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.22511.

Sánchez-Barbero, B., Cáceres, M. J., Chamoso, J. M., Rodríguez, M. M. y Rodríguez, D. (2020). Elaborando cómics en tiempo de confinamiento para aprender matemáticas en Educación Infantil y Primaria. *Magister, 32*(1), 97-101. https://doi.org/10.17811/msg.32.1.2020.97-101.

Sánchez-Barbero, B., Chamoso, J. M., Cáceres, M. J., Rodríguez, M. M., Salomón, M. S. y González, M. T. (2018). Creación de material manipulativo para futuros docentes de Infantil, Primaria y Secundaria para el aprendizaje de Matemáticas. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León y Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán" (Eds.), *XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León*, 236-244.

Sánchez-Barbero, B., Chamoso, J. M., Vicente, S. y Rosales, J. (2020). Analysis of teacher-student interaction in the joint solving of non-routine problems in Primary Education classrooms. *Sustainability*, *12*, 10428. https://doi.org/10.3390/su122410428.

Sorando, J.M. (2018). *100 escenas de cine y televisión para la clase de matemáticas.* Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Sotos, M. A. y Ródenas, M. A. (2018). Análisis cuantitativo del uso de materiales didácticos para trabajar las matemáticas en educación infantil. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII*, 664. SEIEM.

Sua, C. y Jaime, A. (2021). Enriquecimiento extracurricular para talento matemático con ayuda de recursos manipulativos. En Á. Gutiérrez, M. J. Beltrán-Meneu, J. M. Ribera, R. Ramírez-Uclés, A. Jaime, E. Arbona, C. Sua, L. Rotger, C. Jiménez-Gestal, A. A. Magreñán y A. M. Damián (Eds.), *Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática*, 159-166. Universidad de La Rioja.

Torres, J. (1994). *Globalización e interdisciplinariedad: el currículum integrado*. Morata.

Valbuena, S., Conde, R. y Ortiz, J. (2018). La investigación en educación matemática y práctica pedagógica, perspectiva de licenciados en matemáticas en formación. R*evista Educación y Humanismo, 20*(34), 201-215. http://doi.org/10.17081/eduhum.20.34.2593.

Van Dormolen, J. (1986). Textual Análisis. En Christiansen, B., Howson, A. G. Y Otte, M. (Eds.), *Perspectives on Mathematics Education*, 141-171. D. Reidel Publishing Company.

Villella, J. y Contreras, L. C. (2005). La selección y uso de libros de texto: un desafío para el profesional de la enseñanza de la matemática. *La Gaceta de la RSME*, *8*(2), 419-433.

Matemáticas transversales

Cross-disciplinary mathematics

Arce, M.[a], Arnal-Palacián, M.[b], Conejo, L.a, García-Alonso, I.[c] y Méndez-Coca, M.[d]
[a] *Universidad de Valladolid,*
[b] *Universidad de Zaragoza,*
[c] *Universidad de La Laguna,*
[d] *Universidad Complutense de Madrid*

Resumen

Más allá de su carácter instrumental, las matemáticas forman parte del acervo cultural de la humanidad, y tienen un papel fundamental en la comprensión, representación y construcción del mundo, lo que también debe reflejarse en la actividad de aula. Este capítulo pretende proporcionar ideas, claves y propuestas para trabajar otros aspectos relacionados con las matemáticas, como son las conexiones de esta con otras disciplinas; el tratamiento desde las matemáticas de problemáticas y desafíos de la sociedad actual, como los Objetivos de Desarrollo Sostenible o la perspectiva de género; la presencia de las matemáticas en espacios distintos a la clase reglada, como las experiencias de matemáticas fuera del aula; o la importancia de fuentes más allá del currículo, como son las actividades de divulgación.

Palabras clave: Proyectos interdisciplinares, ODS, Matemáticas al aire libre, Género y matemáticas, Divulgación matemática.

Abstract

Beyond its instrumental nature, mathematics is part of the cultural heritage of humanity. Mathematics plays a fundamental role in the understanding, representation, and construction of the world, and this should also be reflected in classroom activity. This chapter aims to provide ideas, keys, and proposals to work on other aspects related to mathematics, in particular the following: the connections between mathematics and other disciplines; the mathematical approach to problems and challenges of today's society, such as the Sustainable Development Goals or a gender-sensitive approach; the presence of mathematics in different spaces, like the mathematical experiences outside the classroom; or the importance of sources beyond the curriculum, like dissemination activities.

Keywords: Interdisciplinary projects, SDG, Open-air mathematics, Gender and mathematics, Mathematics dissemination.

Introducción

Vivimos en un mundo complejo y cambiante que cada vez nos exige mayor responsabilidad en el ejercicio de nuestra ciudadanía. La UNESCO, en su Agenda 2030 para el Desarrollo Sostenible, identifica a los docentes como los verdaderos actores del cambio, de cara a construir una sociedad comprometida y que respete las necesidades de la sociedad futura. La LOMLOE incorpora este enfoque en el nuevo currículo, que promueve entre el alumnado empatía hacia el entorno natural y social.

Las matemáticas poseen un papel de enorme relevancia en la formación de la ciudadanía, no solo por su propio papel en la formación científica e intelectual, sino porque las matemáticas contribuyen a la comprensión y construcción de un mundo mejor desde diferentes escenarios. Este capítulo pretende proporcionar algunas ideas y propuestas en este sentido. Dada la amplitud de este propósito, el desarrollo se centra en algunos aspectos, que constituyen los apartados del capítulo, y que enumeramos a continuación. Por una parte, se presentan ideas y sugerencias para trabajar las matemáticas conectadas con otras disciplinas, así como con el contexto real, con actividades para desarrollar tanto dentro como fuera del aula ordinaria. Además, se mostrará cómo las matemáticas conectan con desafíos actuales como la sostenibilidad o la promoción de estudios científicos entre las niñas y adolescentes. Finalmente, se hablará de la divulgación matemática como campo con un enorme potencial formativo, tanto para el alumnado como el profesorado, que contribuye a popularizar las matemáticas y a hacer consciente a la sociedad de su papel fundamental en el mundo actual.

Matemáticas interdisciplinares

Las *conexiones* son uno de los ejes que organizan las competencias específicas en matemáticas del currículo de la LOMLOE. Las conexiones son todas aquellas relaciones que pueden establecerse tanto de tipo intramatemático (es decir, relaciones de los diferentes bloques de contenido matemático entre sí) como de los contenidos matemáticos con otras áreas de conocimiento o con otros entornos o contextos no matemáticos (Alsina, 2019). Los estándares del *National Council of Teachers of Mathematics* estadounidense (NCTM, 2003) también reconocen las conexiones como uno de los estándares de proceso indicando que "los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para reconocer y aplicar las matemáticas en contextos no matemáticos" (p. 68). Esta idea es recogida en una de las competencias específicas vinculadas al eje de conexiones en los nuevos decretos curriculares, por lo que se espera que los estudiantes sean capaces de identificar y reconocer las matemáticas presentes en situaciones reales y en otras disciplinas, y establecer conexiones que permitan, también, reconocer la aportación de las matemáticas para resolver problemas y retos de la sociedad actual.

Como indica Lehrer (2021, citado en Tytler et al., 2021) las propuestas interdisciplinares posibilitan la transferencia de conocimiento entre las matemáticas y otras disciplinas, enfatizan la relevancia del conocimiento de cada disciplina para resolver problemas importantes, y permiten construir un sistema de conocimiento estructurado y conectado que favorezca la resolución de problemas. No obstante, Tytler et al. (2021) marcan la necesidad, y el desafío, de que se mantenga la integridad de cada disciplina involucrada, y de sus características para generar conocimiento.

Las orientaciones curriculares del nuevo decreto mencionan el trabajo por proyectos como una aproximación metodológica que favorece la generación de conexiones de las matemáticas con el contexto real y con otras disciplinas. También se sitúa a la resolución de problemas (ver capítulo 3.2 del libro) como otro de los ejes fundamentales de la enseñanza de las matemáticas, y como un objetivo de su aprendizaje. Al igual que sucede con la resolución de problemas (Blanco y Cárdenas, 2013), existen al menos dos formas diferentes de concebir el trabajo interdisciplinar por proyectos:

– Diseñar e implementar proyectos que permitan aplicar en contextos nuevos contenidos matemáticos ya enseñados, para generar conexiones a través de su aplicación (más cercano a una *enseñanza de las matemáticas para la resolución de problemas*).
– Diseñar e implementar proyectos con situaciones que den sentido a la propia introducción y desarrollo de contenidos matemáticos a través del proyecto (más cercano a una *enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas*).

Ambas aproximaciones tienen su espacio, pero la segunda añade más oportunidades para desarrollar procesos propios de la generación y construcción de conocimiento matemático, ayudando a generar una concepción más completa de qué son las matemáticas y cómo se construyen.

Para desarrollar un trabajo interdisciplinar por proyectos, es necesario realizar un estudio detallado de la *fenomenología* de cada concepto y estructura matemática (Freudenthal, 1983), compuesta por aquellos fenómenos para los cuales el concepto o estructura seleccionada sirve de medio para su organización y desarrollo, dotándole de sentido. Por ejemplo, los números enteros organizan fenómenos discretos asociados a un criterio de compensación o equilibrio entre estados (balances contables, deportivos…) así como fenómenos asociados a la expresión de escalas, medidas, posiciones o cantidades orientadas con un punto de referencia relativo o "cero" (temperaturas, coordenadas, magnitudes vectoriales…) (Arce et al., 2019). No todos los contenidos curriculares ofrecen las mismas posibilidades para desarrollar un trabajo interdisciplinar. Lo importante es detectar y aprovechar aquellas oportunidades donde estas relaciones surjan con mayor naturalidad. Si partimos de los seis sentidos presentes en el nuevo currículo, el sentido de la medida tiene presencia habitual en muchos proyectos interdisciplinares (elección de unidades, uso de instrumentos de medida, detección y comprensión de relaciones entre magnitudes…), así como el sentido estocástico (sobre todo el tratamiento, presentación e interpretación de datos, y la toma de decisiones). El trabajo en el aula de estos sentidos puede ganar riqueza y significatividad si se hace con proyectos interdisciplinares, superando enfoques centrados en la aritmetización de la medida o del tratamiento de la información.

Recogemos algunas claves resaltadas por la investigación educativa sobre las potencialidades y factores limitantes de las propuestas interdisciplinares:

– Los proyectos deben focalizarse en contenidos cuya integración cree sinergias entre disciplinas, así como contar con una adecuada orientación y andamiaje en su desarrollo, evitando proyectos excesivamente abiertos (Benjumeda et al., 2015; Tytler et al., 2021). Cómo generar integraciones sinérgicas sigue siendo un tema que precisa de más investigación (Toma y García-Carmona, 2021).
– La implementación de proyectos interdisciplinares genera un impacto positivo en aspectos afectivos, actitudinales y transversales (Diego-Mantecón et al., 2021; Toma y García-Carmona, 2021). Los resultados positivos sobre el aprendizaje de los contenidos involucrados son algo menos concluyentes.
– Es necesaria una implementación continuada de este tipo de proyectos para percibir sus efectos (Diego-Mantecón et al., 2021), dada la ruptura que provocan en la concepción de las matemáticas escolares que suele tener buena parte del alumnado. Ante estos proyectos, muchos estudiantes tienen dificultades para percibir que están haciendo matemáticas. Es útil hacer al alumnado consciente de los contenidos matemáticos involucrados y aprendizajes conseguidos (Benjumeda et al., 2015).
– Es necesario tener presente que el diseño y gestión exitosa de un proyecto interdisciplinar demanda a los docentes un conocimiento disciplinar y didáctico amplio de las áreas de conocimiento involucradas (Tytler et al., 2021; Toma y García-Carmona, 2021), y que la organización de la docencia en España hace que existan menos restricciones institucionales para llevar a cabo estos proyectos en aulas de Educación Infantil (enseñanza globalizada) y Primaria (figura del profesorado tutor) que en niveles superiores.

Algunos ejemplos de propuestas interdisciplinares

Mostramos en este apartado una selección de propuestas interdisciplinares que involucran a las matemáticas. Muchas se basan en el desarrollo de proyectos STEM (iniciales en inglés de Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas) o STEAM (incluyendo también las Artes), basadas en un trabajo integrado de algunas de estas disciplinas, y en muchos casos vinculadas también a la sostenibilidad (ver siguiente apartado).

Alsina (2020) recoge varias propuestas de actividades STEAM para Educación Infantil que tratan de promover conexiones de las matemáticas con otras disciplinas y con el entorno, enfatizando un enfoque globalizado. Un ejemplo es *Land Art Maths*, vinculando matemáticas, naturaleza y arte. En ella, se parte de una recolección de materiales sensorialmente ricos del entorno natural. Con ellos, el alumnado puede analizar sus cualidades y realizar comparaciones y clasificaciones de sus cualidades y atributos. Posteriormente, se muestran ejemplos de *Land Art* (composiciones artísticas creadas con material del entorno natural cercano) para que el alumnado participante, en diferentes grupos, reflexione sobre cómo diseñar su propia composición y la construya siguiendo algún patrón lógico determinado pactado con ellos para, finalmente, enriquecer la composición y poder representar la misma en un mural. En la Figura 1 puede verse un ejemplo creado.

Figura 1. Ejemplo de Land Art construido al implementar esta propuesta (tomado de Alsina, 2020, p. 187)

En Educación Primaria, el proyecto europeo *STEM4MATH*, en el que han participado miembros de la Universidad de Valladolid, ha generado 20 proyectos donde los conocimientos y habilidades matemáticas se trabajan integrados con contenidos de otras disciplinas y con contextos reales o significativos para el alumnado. La página web https://www.stem4math.eu/es contiene todos los proyectos y materiales generados, junto con orientaciones para su implementación. Los proyectos se inician con una situación o motivación inicial para resolver, llegando generalmente a la construcción de algún producto como resultado del proyecto. Un ejemplo es *Pasta de dientes*, en el que se parte del problema de la caries en infantes generada por una incorrecta higiene bucodental, a través de una historieta. Posteriormente, los estudiantes recogen datos sobre su higiene bucodental usando un cuestionario creado para ello y, por grupos, analizan la información, la representan haciendo uso de tablas y gráficos y proponen sugerencias para mejorar los hábitos de la clase. En la segunda parte, los estudiantes, por grupos, crean su propia pasta de dientes, buscando previamente información para ello, y diseñan un embalaje y un logotipo para la misma.

En Educación Secundaria destacamos, por una parte, los proyectos europeos *KIKS* y *STEM for Youth*, con participación de miembros de las Universidades de Cantabria y de Santiago de Compostela. Estos proyectos buscan promover el interés de los estudiantes hacia las áreas STEAM, a través del diseño de actividades y proyectos que puedan implementarse en el aula y donde, además, los resultados que se obtengan puedan ser presentados y discutidos con estudiantes homólogos de otros países participantes, formando parte de una comunidad educativa. Una muestra del impacto del proyecto KIKS puede verse en Diego-Mantecón et al. (2021). Las páginas web https://www.kiks.unican.es/ y https://stemforyouth.unican.es/ contienen información detallada sobre ambos proyectos y los materiales generados. Por ejemplo, encontramos actividades y proyectos vinculados a la construcción de rampas para garantizar la accesibilidad, el número áureo o la modelización de situaciones físicas como la ley de Hooke en un muelle.

Otro ejemplo es el proyecto europeo COMPASS, en el que ha participado la Universidad de Jaén. Este proyecto busca apoyar a los docentes en la implementación de actividades que conecten las matemáticas y las ciencias entre sí, así como con el entorno cercano, haciendo uso de metodologías basadas en la resolución de problemas y el aprendizaje por indagación. La página web http://www.compass-project.eu/ recoge toda la información sobre el proyecto.

El libro de Ortega (2005) contiene también un buen número de propuestas de actividades y situaciones para conectar las matemáticas con otras disciplinas y con situaciones cotidianas.

Desarrollo sostenible a través de las matemáticas

En relación con los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS), los docentes de matemáticas tienden a pensar, en general, que trabajar la sostenibilidad en el aula consiste en desarrollar, a través de proyectos, la conciencia medioambiental orientada al cuidado del entorno natural (Vásquez et al., 2020) indicando que, para ello, no cuentan con las herramientas didácticas y disciplinares necesarias. Pero integrar la sostenibilidad en la clase de matemáticas o llevar a cabo una enseñanza orientada a la educación para el desarrollo sostenible trae consigo más implicaciones que la sensibilización sobre aspectos medioambientales.

Cuando la UNESCO presenta la Agenda 2030 (UNESCO, 2015) reta a toda la humanidad a lograr 17 objetivos centrados en torno a tres ámbitos principales, económico, social y ambiental, con los que conseguir que la sociedad actual disfrute de los recursos y bienes que aporta el planeta sin poner en riesgo el bienestar y los recursos de las generaciones futuras.

Figura 2. Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS). Fuente: UNESCO (2017a)

Podemos inferir que la consecución de estos objetivos está directamente relacionada con el papel de la Educación, pues es quien tiene en sus manos la generación del futuro y quien posee la capacidad de desarrollar la concienciación social en torno a estos objetivos. Pero, para ello, debe tener en cuenta que se hace a través de una formación con unas características particulares, que se denomina Educación para el Desarrollo Sostenible (EDS), es decir, una educación comprometida con la sensibilización y la promoción de los ODS en nuestro entorno y nuestra vida y que compromete a todos los educadores. Será, por tanto, una enseñanza holística, integradora y transformadora (UNESCO, 2017a), con capacidad para incorporar en su práctica habitual los distintos enfoques de enseñanza en sostenibilidad (UNESCO, 2012, p. 13):

- **Integrador:** estudiar desde sus tres dimensiones los ODS y cómo se contribuye a ellos desde las matemáticas.
- **Crítico:** tomando conciencia de alternativas, en sintonía con los ODS, al paradigma dominante, promoviendo el pensamiento crítico.
- **Transformador:** la matemática como instrumento para profundizar en el conocimiento de nuestro entorno y como modulador de cambios de hábitos.
- **Contextual:** la matemática nos explica el contexto con una finalidad transformadora.

Estos enfoques promueven una enseñanza de las matemáticas que vaya más allá del aprendizaje de cálculos mecánicos y procedimientos estándar, sugiriendo una enseñanza donde los datos tienen un sentido realista que llevan al planteamiento de nuevas preguntas que despierten la capacidad crítica (Barwell, 2018, p. 151). No en vano, el lenguaje de las matemáticas provoca cambios en el comportamiento humano (Skovsmose, 1999), pues una vez conocido el modelo explicativo, ajustamos nuestro comportamiento a dicho modelo. Así pues, debemos tratar el conocimiento matemático como aquel con capacidad para transformar la sociedad moderna.

Los ODS aglutinan necesidades individuales y colectivas, así como necesidades actuales y necesidades futuras. El conocimiento matemático va a contribuir a analizar las demandas existentes y buscar posibles soluciones a estas tensiones (UNESCO, 2017b).

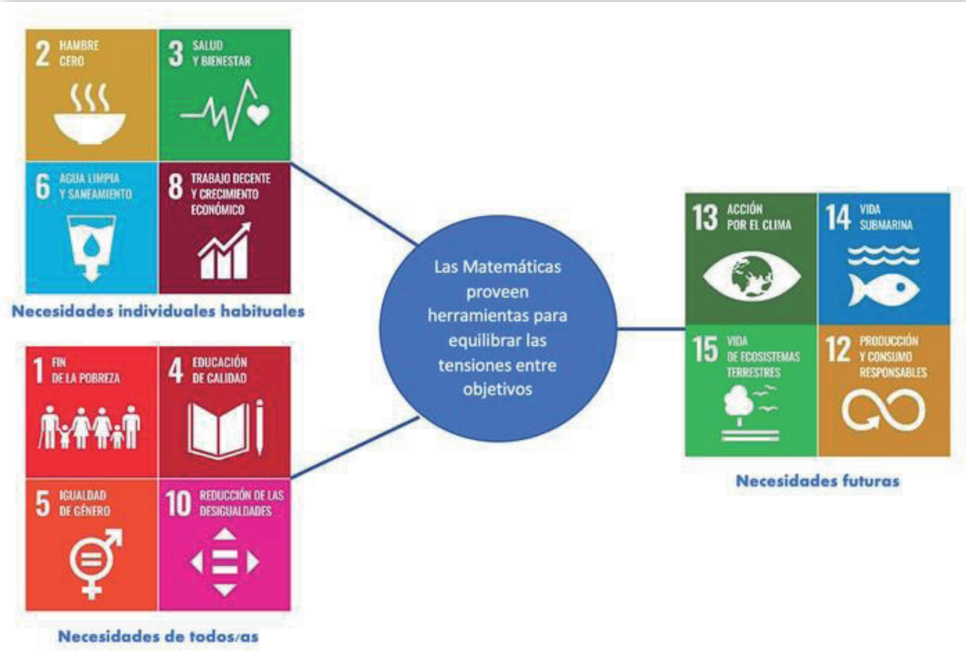


Figura 3. Las Matemáticas equilibran las diferentes necesidades humanas. Fuente: UNESCO (2017b)

¿Cómo abordar este desafío en las aulas de matemáticas?

Para llevar a cabo esta transformación en el aula, se propone que la EDS se desarrolle de forma intencional y embebida en la práctica de aula por parte de todas las materias y no como una materia nueva, separada del resto (UNESCO, 2017b, p. 17). Desde esta perspectiva, la enseñanza de las matemáticas se debe desarrollar siguiendo los enfoques anteriores y con un propósito relevante desde el punto de vista social y global, pero sin perder de vista la construcción necesaria del contenido disciplinar.

La actividad humana dedicada a contar, medir y localizar proviene, de hecho, de la conexión de los individuos con su entorno, por lo que un enfoque adecuado permitirá construir una enseñanza de las matemáticas alineada con la EDS en cualquier nivel educativo. Es más, las matemáticas también desarrollan: la construcción de algoritmos y patrones, un lenguaje preciso y exacto, la fundamentación de las decisiones, la descripción de la belleza y la armonía. Todo lo anterior contribuye en el desarrollo de las competencias en sostenibilidad: *pensamiento sistémico, anticipación, normativo, estratégico, de colaboración, pensamiento crítico, autoconciencia y de resolución de problemas.*

Algunos principios a tener en cuenta en el diseño o selección de actividades matemáticas con enfoque a la EDS (UNESCO, 2017b) son:

- **Evitar la simplificación.** La realidad no es simple y, como indicamos antes, los contextos son fuente de aprendizaje, lo que dará mayor significado al aprendizaje de las matemáticas. Además, un mismo escenario puede llevar a diferentes decisiones y la argumentación será la clave para el desarrollo del conocimiento. Por ejemplo, ante un recuento de una votación se puede preguntar por las condiciones para ser votante, cómo tener en cuenta los votos nulos y votos en blanco o cómo estudiar las cuotas de poder al elegir un líder…
- **Trabajar con los problemas "ricos" que contiene el contexto**, y no sólo mediante la contextualización de los problemas verbales. Es decir, que se elaboren preguntas propias dentro del contexto, tratando los aspectos de forma significativa. Para ello, se puede orientar la enseñanza matemática a procesos matemáticos fundamentales (organización, comparación, modelización, predicción, medida, representación, diseño de algoritmos, generalización…) y a partir de ahí estudiar los contextos, o bien, entrar en los contextos de la EDS y a partir de ahí estudiar los procesos matemáticos.
- **Desarrollar el pensamiento crítico,** a través del trabajo en equipo cooperativo, que permite abordar un mismo problema desde diferentes perspectivas y con distintos argumentos.
- **Compromiso docente con los retos de la EDS.** Pues, aunque parece obvio, los docentes deben ser los primeros en tomar consciencia de la necesidad de introducir este enfoque en su enseñanza, y acompañar este compromiso con la necesaria reflexión matemática para reorientar su enseñanza.

Las investigaciones nos señalan que, aparte de la necesaria reflexión y compromiso docente, también se deben desarrollar líneas formativas específicas para los docentes, como principales promotores de los cambios exigidos (García-Alonso y Vásquez, 2021). La lectura de publicaciones especializadas es una buena fuente de formación continua, así como la lectura de monográficos. A modo de ejemplo, están las revistas *Uno: Revista de Educación Matemática* o *Profesorado: Revista de currículum y formación de profesorado*. Las actas de los congresos de Educación Matemática o los artículos de investigación también pueden ser fuente de formación o de intercambio de experiencias para docentes en activo o en formación. La UNESCO también está haciendo un esfuerzo por la difusión de trabajos orientados a la EDS, existiendo publicaciones con ejemplos de temáticas para llevar al aula de matemáticas y experiencias implementadas en las aulas (UNESCO, 2017b, p. 47 y siguientes).

En España, recientemente se ha publicado un trabajo para desarrollar en Educación Primaria y Secundaria para tomar conciencia en torno al consumo del agua y los desperdicios que generamos, que puede encontrarse en:
https://marzomates.webs.ull.es/matematicas-y-sostenibilidad/

El estudio de contextos reales necesita de fuentes de información confiables y reales, que permitan el análisis de nuestro entorno, y que nos lleven a acciones relevantes (ver ejemplos en el libro UNESCO, 2017b, p. 48). La humanidad se enfrenta a un reto que, necesariamente, debemos abordar, pues de nuestro esfuerzo de hoy dependen las generaciones futuras y el bienestar global. Pero los docentes tenemos una responsabilidad mayor, pues formamos a la ciudadanía del futuro. Los docentes de matemáticas, además, promovemos un conocimiento que permite entender y construir un mundo mejor, un mundo sostenible.

A modo de ejemplificación del trabajo de los ODS en el aula de matemáticas, proponemos una tarea que aborde el modelo energético que poseemos en nuestra vivienda o nuestro colegio o instituto. Esta temática se puede enmarcar en el ODS-7 (Energía asequible y no contaminante), aunque será el enfoque que el docente decida lo que determinará el ODS abordado.

El contexto de la energía renovable supone un tema de actualidad pues estamos ante un cambio de paradigma energético en el planeta. La tarea que se plantee a los estudiantes puede dirigirse al análisis del consumo individual o familiar de energía, a estudiar la huella de carbono de la energía que el estudiante utiliza diariamente, o incluso a realizar un presupuesto de lo que costaría cambiar el modelo energético de su vivienda familiar, colegio o instituto.

En el trabajo de clase se pueden plantear diferentes preguntas que pueden partir de aspectos más relacionados con el individuo, como puede ser su consumo diario o familiar, o bien, la lectura de un recibo eléctrico real así como la previsión de consumo eléctrico anual. Se puede profundizar más en el tema, haciendo que los estudiantes indaguen sobre los elementos necesarios para contar con un sistema de autoabastecimiento eléctrico para su vivienda familiar y, según el nivel educativo, que identifiquen y seleccionen dónde instalarlos, además de generar un presupuesto de dicha instalación. La Tabla 1 muestra un ejemplo de información que podría facilitarse al alumnado para realizar una tarea de este tipo. Como cierre de la tarea, se recomienda que los estudiantes lleven a cabo una reflexión acompañada de alguna acción sobre su entorno individual o social. En este sentido, se puede analizar el coste de la instalación de un sistema de autoabastecimiento energético en su colegio, o en algún edificio de carácter público en su ciudad. Y aprovechar esto para elevar a sus representantes en el centro o en la ciudad la propuesta que hayan decidido, basando sus argumentos en el estudio matemático llevado a cabo en clase.

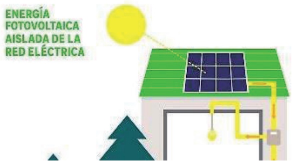
Tabla 1. Ejemplo de información facilitada a los estudiantes para realizar la tarea (utilizando una unidad monetaria inventada como los zeds). Fuente: Elaboración propia

Consumo generado en un trimestre:
Potencia contratada: 5.75 kW
Consumo mes 11: 385 kWh
Consumo mes 12: 650 kWh
Consumo mes 01: 612 kWh

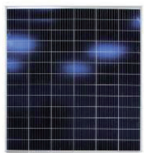
Ingresos familiares:
Nóminas: 1750 zeds al mes
Ahorro: 250 zeds al mes

Precio:
3.26 zeds por kW contratado
0.10 zeds por kWh

Consumo medio:
Consumo medio de 3.21 zeds
Consumo medio en los últimos 14 meses: 2.36 zeds
Consumo acumulado en el último año: 5725 kWh



Superficie del tejado: 12 metros cuadrados

			
34,99 zeds cada 100 m	34.95 zeds 2000 ciclos 12V/14Ah	189 zeds 445 W 217.8 x 99.6 cm	229 zeds 540 W 238 x 35 cm

Con este ejemplo hemos mostrado cómo una actividad matemática habitual, de cálculo, se convierte en una estrategia de EDS, a través del contexto seleccionado y con una acción como muestra del compromiso de cambio adquirido. Además, en este mismo contexto, las decisiones del docente no son únicas y se pueden seleccionar diferentes focos: concienciación acerca del consumo energético, impacto del modelo energético actual, cambio de modelo en nuestro centro o ciudad…

Ahora bien, la matemática implicada en la tarea no sólo aborda el cálculo, sino que incluye la estimación y la toma de decisiones con base en los resultados que obtenemos. Es más, no existe una única solución o respuesta válida, sino que encontraremos respuestas bien argumentadas, con una correcta interpretación de los cálculos en el contexto seleccionado.

Matemáticas fuera del aula

Abordamos aquí tres aspectos: las matemáticas al aire libre, las matemáticas en los museos y las rutas matemáticas en la ciudad.

Matemáticas al aire libre

El nuevo currículo de Educación Infantil en España determina que en esta etapa se debe atender de manera progresiva al descubrimiento del entorno, incluyendo a los seres vivos que conviven en él y algunas características físicas y sociales del medio. Es por esta determinación del currículo por lo que consideramos al aire libre el lugar adecuado en el que poder descubrir el entorno de una manera más natural que dentro del aula.

La educación al aire libre no es nueva del nuevo currículum y tampoco del presente siglo. Las escuelas al aire libre nacieron en España a principios del siglo XX (Bernal, 2012) en un contexto higiénico-sanitario para infantes débiles y con alguna enfermedad. Fournié (1928) pretendió extender estas escuelas a toda la infancia, permitiendo más libertad de pensamiento y acción a los infantes, acompañado de nuevas perspectivas metodológicas. En la actualidad, las escuelas al aire libre, principalmente para la etapa de Educación Infantil, son un modelo educativo implantado en Europa, Estados Unidos y Asia. En ellas, el alumnado pasa la mayor parte del tiempo fuera del aula, especialmente en lugares rodeados de bosque (Bruchner, 2012).

Figura 4. Paseo en el bosque en una escuela al aire libre en Alemania (tomado de Zotes y Arnal-Palacián, 2019, 2022)

La formación al aire libre, especialmente en la etapa de Educación Infantil, permite la experimentación en un contexto rico, facilitando oportunidades para el desarrollo y la resolución autónoma de diferentes situaciones complejas (Sánchez y González, 2016). Algunos estudios, como el de Wells (2000), determinan que los efectos sobre el desarrollo cognitivo del alumnado son positivos.

Particularizando en estudios al aire libre en la educación matemática, desde la SEIEM se ha dado espacio para la presentación de algunos estudios. En el grupo Investigación en Educación Matemática Infantil (IEMI), Zotes y Arnal-Palacián (2019) presentaron cinco actividades desarrolladas íntegramente en el bosque involucrando a diferentes nociones matemáticas de lógica, aritmética, geometría y medida. Asimismo, en el XXIV Simposio de la SEIEM que tuvo lugar en Valencia, Salvador-Beltri et al. (2021) presentaron un póster en el que analizaban cómo los huertos escolares podían desarrollar los contenidos de las asignaturas de matemáticas y de ciencias naturales para la Educación Infantil y Educación Primaria, resultando gratificante para toda la comunidad educativa que se implicaba en él.

Si bien es cierto que no todo son bondades en estos lugares para la formación del alumnado. Zotes y Arnal-Palacián (2022), en un estudio realizado en Alemania sobre la adquisición de las magnitudes, concluyeron que es posible anticipar la edad del manejo de la longitud y el área, sin embargo, existen mayores dificultades para el volumen y la masa que en un aula convencional.

Matemáticas en los museos

En relación con las experiencias no formales de formación, como puede ser la visita a museos, la *National Science Teachers Association* de EE.UU. (1998) declaró que este tipo de experiencias influyen en el aprendizaje del alumnado de manera positiva tanto a nivel cognitivo como afectivo.

Las actividades que involucren a nociones matemáticas han sido trabajadas más en otro tipo de museos que no son los matemáticos. Un ejemplo de ello es el estudio de Segal y Segal (2019), en el que analizaron cómo los estudiantes identificaban las formas geométricas, los patrones repetitivos en la decoración, los volúmenes de las herramientas y el peso de cada tipo de piedra en el Museo de Arqueología en Gan HaShlosha (Israel). En el ámbito universitario, en particular en la formación del profesorado, y aprovechando la reforma del sistema educativo en Serbia y el enfoque por proyectos en todos los niveles del sistema educativo, Milinkovic et al. (2021) desarrollaron un programa experimental en el Museo de Arte Africano de Belgrado (Serbia) en el que los infantes de prescolar descubrían ideas matemáticas en actividades de proyectos, y analizaron entrevistas a futuros docentes para reflexionar sobre esta experiencia.

En España, existen museos destinados exclusivamente a las matemáticas, como son el Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA), https://mmaca.cat/es; el

Museo de Matemáticas de Aragón, https://planetariomat.planetariodearagon.com; la recientemente inaugurada La Casa-Museo de la Matemática Divulgativa y Educativa de Gran Canaria, http://sinewton.es/la-casa-de-las-matematicas/; así como otros más pequeños gestionados por sociedades de profesores. El MMACA fue creado en 2014 y, además de la exposición permanente en el Palau Mercader en Cornellà de Llobregat (Barcelona), cuenta con exposiciones itinerantes y ferias a nivel nacional e internacional, tanto en el ámbito de la educación como de la divulgación matemática. Las actividades propuestas en la exposición permanente se organizan en dos líneas: desde 1.º hasta 4.º de Educación Primaria (6-10 años) y otra para grupos desde 5.º de Educación Primaria en adelante (desde 10 años hasta adultos). El museo se organiza de la siguiente manera: a) cálculo y número de oro; b) ilusiones ópticas y espejos; c) combinatoria, grafos, estrategia y puente Leonardo; d) geometría, curvas, poliedros y fórmulas inductivas; e) estadística y probabilidad; y f) espacio para los primeros años de la escuela primaria. El Museo de Matemáticas de Aragón fue inaugurado en 2019 en el Monasterio de Casbas (Huesca). Durante unos meses, coincidiendo con el confinamiento, permaneció cerrado, y su nueva ubicación es el Planetario de Huesca.

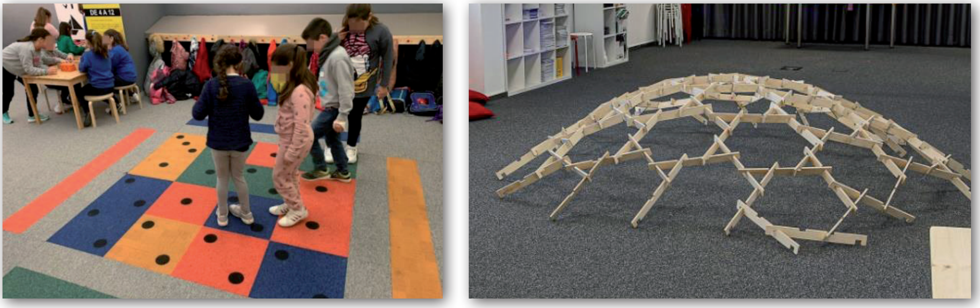


Figura 5. Imágenes extraídas de las páginas web del Museu de Matemàtiques de Catalunya y del Museo de Matemáticas de Aragón, respectivamente

Además, existen otros museos de ciencias con exposiciones permanentes en matemáticas o con un papel importante de las mismas. Por ejemplo, el Museo Didáctico e Interactivo de Ciencias de la Vega Baja del Segura (Alicante) y el Museo de la Ciencia de Valladolid.

En Europa, existen otros museos destinados en exclusiva a las matemáticas: Quaregnon (Bélgica), Beaumont-de-Lomagne (Francia), Giessen (Alemania) y Florencia (Italia).

A partir del análisis de diferentes propuestas didácticas, Guisasola et al. (2005) afirman que los museos, en especial los de ciencias, son espacios de aprendizaje no formal donde los docentes pueden llegar a no tener el control sobre las nociones involucradas y las experiencias que sus estudiantes allí tengan. Para evitarlo, estos autores abogan por que el profesorado disponga de material didáctico que facilite la visita y oriente el aprendizaje de su alumnado.

Rutas matemáticas en la ciudad

Considerando la definición proporcionada por Shoaf et al. (2004), una ruta o paseo matemático es aquel en el que se pueden analizar, resolver y formular tareas matemáticas en las que su resolución requiere la interacción con el lugar en el que se localiza la actividad. Estos paseos no surgieron con el objetivo de desarrollar nociones matemáticas, sino de realizar tareas de divulgación para toda la sociedad (Blane, 1989). Desde la investigación, Olmos y Martí-Contreras (2021) proponen las siguientes categorías que permiten analizar las rutas y problemas propuestos en ellas: tipos de problemas a tratar, contexto, formulación del problema, tarea matemática y solución.

En España, la posibilidad de conocer la ciudad con ojos matemáticos ha sido promovida desde diferentes sociedades de profesores de matemáticas: *Rutas Matemáticas por Madrid: el eje de la Castellana*, a cargo de la SMPM Emma Castelnuovo; *Un paseo matemático por Compostela*, organizado por AGAPEMA; *Paseo Matemático X Zaragoza*, promovida por la SAPM, entre otros.

Desde 2012, las rutas matemáticas se trabajan también desde un contexto tecnológico. *MathCityMap*, https://mathcitymap.eu/es/, es una plataforma mundial, desarrollada en la Universidad Goethe, en la que poder crear y utilizar actividades que requieran de una ruta matemática. España se encuentra entre los países más activos en la aplicación, contando con más de 200 rutas y actividades propuestas (véase Figura 6).

Figura 6. Rutas públicas en España en *MathCityMap*

Cada una de ellas cuenta con un descargable en .pdf, además de una primera información en línea (Figura 7) en la que se muestran las nociones matemáticas involucradas, los cursos para los que ha sido deseñada, el número de tareas previstas para ser realizadas por el alumnado, la duración aproximada y la longitud del recorrido.

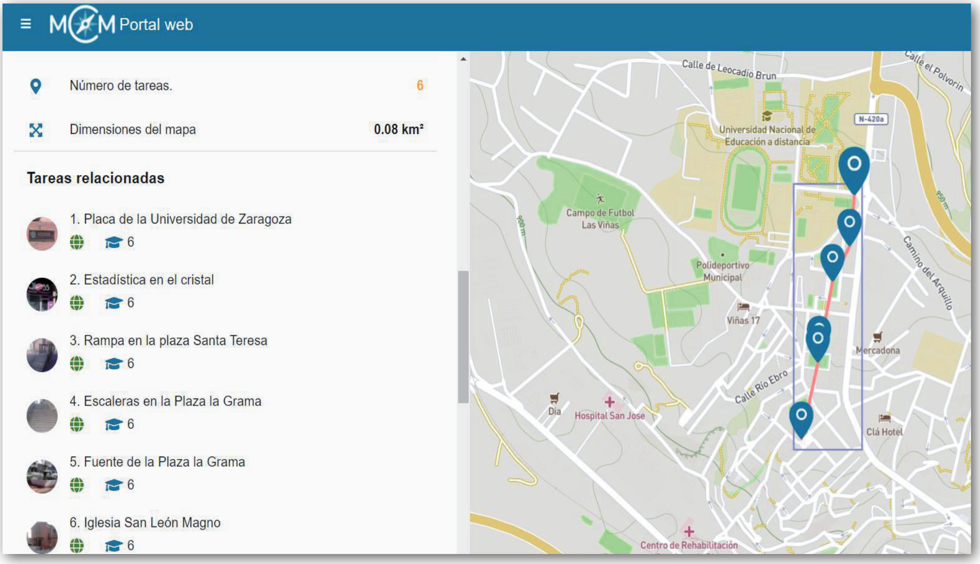


Figura 7. Ruta "Matemáticas por el barrio San León de Teruel" en *MathCityMap*

Desde una revisión bibliográfica, destacamos los manuales de Chamoso y Rawson (2003) y Blanco-Nieto (2021). El primero de ellos, *Matemáticas en una tarde de paseo* (Chamoso y Rawson, 2003) presenta, en forma de diálogo, las conversaciones de dos profesores en una tarde de paseo. En ellas se ofrecen estrategias para la resolución de problemas en situaciones cotidianas. Más recientemente fue publicado el libro *Mirar la ciudad con ojos matemáticos* (Blanco-Nieto, 2021), en el que se presentan referencias históricas, patrimoniales y culturales y en el que las matemáticas actúan como hilo conductor, destacando este tipo de actividades como un recurso de enseñanza-aprendizaje fundamental en un ambiente ameno y divertido pero sin perder el rigor que las matemáticas merecen.

Matemáticas con perspectiva de género

Se tratan aquí tanto algunos estereotipos sobre el aprendizaje de las matemáticas, como la motivación de las alumnas hacia las matemáticas y la visibilización de la mujer en matemáticas.

Estereotipos sobre el aprendizaje de las matemáticas

Los avances tecnológicos, de la información y de la comunicación se suceden rápidamente, sin embargo, persisten las diferencias de género en la elección de los estudios superiores de las áreas de conocimiento STEM. En la motivación de esta selección no solo influyen los procesos psicológicos, sino también las creencias y los principios de cada uno.

La creencia de que *la inteligencia no cambia* puede influir al alumnado. Pensar que el éxito o el fracaso en matemáticas o en ciencias dependen de unas capacidades cognitivas fijas, estáticas, que no pueden desarrollarse con el tiempo ni con la práctica afecta a la actitud del alumnado ante el estudio de las asignaturas (Degol et al., 2018). Estas ideas conducen a no valorar ni considerar el esfuerzo y el trabajo porque el éxito y el fracaso están predeterminados por sus capacidades, favoreciendo una conducta en el alumnado, en muchos casos, de "huir de las matemáticas". Las investigaciones muestran que las mujeres y las niñas con estas creencias se pueden ver más afectadas que los hombres y los niños con las mismas ideas, aunque pueden responder más positivamente a entrenamientos de cambio de estas (Blackwell et al., 2007; Dweck, 2007). Además de a los estudiantes, pensar que una persona es *buena en matemáticas* o *mala en matemáticas* puede afectar al profesorado y a las familias también. Estas ideas se traslucen cuando las familias dicen de sus hijas que obtienen buenas notas porque trabajan y se esfuerzan mucho, pero que en cambio sus hijos las alcanzan porque son brillantes en matemáticas.

La elección de los grados de áreas de conocimiento STEM puede estar condicionada por los valores y principios personales, así como por la falta de confianza en las propias habilidades para aprender matemáticas. La investigación respalda que el asociar las carreras STEM con valores de menor relación con los demás, más alejados del cuidado de otras personas y de ciertos beneficios altruistas aleja a las mujeres de la elección de estos estudios (Wegemer y Eccles, 2019). El Libro Blanco de la Real Sociedad Matemática Española (RSME) recoge una encuesta realizada a 741 personas. El 65% de mujeres trabajando en empresas estaban de acuerdo con la siguiente afirmación: "Las matemáticas no son percibidas como útiles para dar servicio a la sociedad, suponiendo un elemento desmotivador para que las mujeres jóvenes elijan las matemáticas como futuro profesional" (Macho et al., 2020, p. 384).

Motivación de las alumnas hacia las matemáticas

La motivación es un aspecto que no podemos dejar de atender cuando se busca mejorar la calidad de la educación, ODS-4 de la Agenda 2030 de la UNESCO (2015). El alumnado motivado tiene una conducta más activa ante su aprendizaje que el desmotivado. A menudo el profesorado comenta que sus estudiantes no se involucran en la actividad matemática del aula o fuera de ella. La motivación puede tener diferente graduación, percibiéndose en la conducta del alumnado desde una desmotivación hasta una conducta motivada intrínsecamente, pasando por diferentes grados intermedios (Ryan y Deci, 2000). La motivación intrínseca se caracteriza porque un estudiante hace tareas, estudia y experimenta prácticas matemáticas que elige, porque las disfruta, les gustan y/o siente un reto en ellas que quieren vivir.

Las necesidades psicológicas de competencia, autonomía y relación afectan a la motivación de una forma directa (Ryan y Deci, 2020). La satisfacción de estas necesidades mejora la motivación intrínseca y el detrimento de ellas la disminuye. La necesidad de competencia es la urgencia de sentir que uno es capaz de hacer algo, que es "bueno" en esa tarea o que "puede" con esa actividad. La necesidad de autonomía se vincula con la posibilidad de decidir, de elegir libremente, sin presión. La necesidad de relación está asociada a sentir que pertenece a un grupo y que está estableciendo relaciones con otros. Se puede desarrollar la motivación hacia las matemáticas, a través de mejorar la satisfacción de estas tres necesidades, durante los procesos de enseñanza de las matemáticas.

La *Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos* (OCDE) organiza, cada tres años, la evaluación internacional PISA (*Programme for International Students Assessment*), para evaluar las competencias matemática, científica y lingüística del alumnado de 15 años de los países participantes, centrándose principalmente en una de las competencias en cada edición. La última edición focalizada en la competencia matemática fue en el año 2012 y esta incluía una medición del índice de motivación intrínseca del alumnado, de media 0 y desviación típica 1, de todos los países que participaron:

> El "índice de motivación intrínseca para aprender matemáticas" es negativo en España (-0,14) lo que indica un menor interés hacia las matemáticas que en la OCDE. Existen diferencias entre chicos y chicas en este índice. Tanto en España, como en la OCDE y en la UE, el índice refleja un menor interés de las alumnas por las matemáticas. La diferencia entre chicos y chicas es algo superior en España que en la OCDE. Las chicas, con -0,23 puntos, obtienen 0,12 puntos menos que las de la OCDE (Instituto Nacional de Evaluación Educativa INEE, 2014, p. 151).

Uno de los factores que influye en la conducta del alumno, en concreto, en su aprendizaje de las matemáticas, es la percepción de la propia competencia. El informe muestra que "los chicos tienen mejor concepto de sus capacidades matemáticas que las chicas, tanto en España como en la OCDE y la UE" (INEE, 2014, p. 161). A menudo podemos escuchar en el aula "no soy buena en matemáticas", "las matemáticas no son para mí", "no valgo para las matemáticas". Propuestas que promuevan actitudes, creencias y emociones positivas hacia las matemáticas y su aprendizaje son necesarias (Gil et al., 2005); así como fomentar tareas matemáticas en el aula para realizar grupalmente, que les hagan disfrutar de las matemáticas y les hagan valorarlas (Méndez et al., 2019).

Visibilización de mujeres matemáticas

Las propuestas para mejorar el aprendizaje de las matemáticas que encontramos en el Libro Blanco de la RSME (Macho et al., 2020, p. 386-388) son:

- Fomentar la intervención de las chicas en clase, incidiendo en que el error es también un elemento del proceso de aprendizaje.
- Facilitar ambientes de enseñanza de las matemáticas no competitivos.
- Fomentar la divulgación de las matemáticas como un elemento con énfasis en la utilidad y la aportación a las mejoras sociales.
- Elaborar material para ayudar al profesorado a favorecer vocaciones científicas entre las alumnas y contrarrestar los estereotipos.
- Crear juegos educativos matemáticos con un claro perfil social que rompan estereotipos de género.
- Conceder, desde la RSME, medallas virtuales de calidad a los centros de enseñanza para distinguirlos por su labor real en HACER MATEMÁTICAS EN FEMENINO.
- Visualizar el trabajo de las mujeres en el ámbito de las matemáticas en los centros de Educación Primaria y Secundaria.

La visualización y visibilización de modelos de mujeres se puede explorar a través de la lectura (ver Tabla 2) y de películas. A través del conocimiento de mujeres matemáticas se fomenta la motivación de las alumnas hacia el estudio de las matemáticas y el cambio de los estereotipos.

Tabla 2. Libros sobre mujeres matemáticas

Título	Autor/a	Editorial	Año	Páginas
Mujeres matemáticas. Trece matemáticas, trece espejos	Marta Macho Stadler (Coord.)	SM-RSME	2019	212
Mujeres matemáticas	María Concepción Romo Santos	CultivaLibros	2010	158
Mujeres, manzanas y matemáticas	Xaro Nomdedeu Moreno	Nivola	2000	192
Mujeres matemáticas: las grandes desconocidas	Amelia Verdejo Rodríguez	Universidad de Vigo	2017	294

Título	Autor/a	Editorial	Año	Páginas
Ada Magnífica, científica (Pequeños creativos) (para alumnado de 4 a 8 años)	Andrea Beaty	Beascoa	2021	40
Pequeña y grande Rosa Parks (para alumnado de 6 a 8 años)	Mª Isabel Sánchez Vegara	Alba	2019	32
La ingeniosa Maryam Mirzakhani (para alumnado de 6 a 10 años) http://nm.cmm.uchile.cl/libros/	Matías Celedón y Paloma Valdivia		2017	17
Mujeres de ciencia: 50 pioneras intrépidas que cambiaron el mundo (para alumnado de 9 a 12 años)	Rachel Ignotofsky	Loqueleo	2018	123

También hay películas que pueden mejorar la visibilidad de las mujeres en las ciencias. Algunos ejemplos son *Ágora*, de 2009 y dirigida por Alejandro Amenábar (duración: 126 minutos); *El viaje de Jane*, de 2010 (Lorenz Knauer, 106 minutos); *An invisible sign*, de 2011 (Marilyn Agrelo, 93 minutos); *Gravity*, de 2013 (Alfonso Cuarón, 91 minutos); *Codegirl*, de 2015 (Lesley Chilcott, 107 minutos) y *Figuras ocultas*, de 2016 (Theodore Melfi, 127 minutos).

El cine, además de dar la oportunidad de hacer visible a las mujeres matemáticas y poder ser utilizado de forma divulgativa, también proporciona a los docentes problemas y tareas matemáticas así como contextos para diseñar tareas que pueden resultar motivadores. Por ejemplo, la película *Ágora* muestra a Hipatia, una mujer con unos conocimientos matemáticos sobresalientes y con una destacada vocación por aprender y enseñar. A partir de diferentes escenas de la película, que se describen a continuación, se pueden diseñar prácticas de enseñanza que se podrían proponer en el aula para mejorar la comprensión de las cónicas:

– El dibujo de cónicas a partir de la experiencia que se describe en la película: En el minuto 68, Hipatia dibuja en la arena un círculo colocándose en el centro con la ayuda de un palo, comentando que todos los puntos de la circunferencia son equidistantes del centro. En el minuto 102, Hipatia dibuja en la arena una elipse colocando dos antorchas como focos y una cuerda atada a las dos y, con un palo que tensa la cuerda, va dibujando una elipse haciendo ver que la suma de las distancias de cualquier punto de la elipse a los focos es constante.
– La construcción y utilización de material manipulativo para visualizar las cónicas: En el minuto 78, Hipatia muestra el cono de Apolonio para ver las distintas curvas como intersección entre el cono y un plano: círculo, parábola, elipse e hipérbola.

– La utilización de la realidad para estudiar las cónicas: En los minutos 2 y 102 Hipatia describe la circunferencia y la elipse como las trayectorias de las estrellas y los planetas.

Para conocer más tareas matemáticas relacionadas con el cine y/o los contextos que este proporciona a los docentes para el diseño de problemas, se pueden consultar los libros de José María Sorando Muzás (por ejemplo, Sorando, 2018). Algunos ejemplos disponibles se pueden analizar en la página web https://matematicasentumundo.es/CINE/100escenas.htm

Divulgación y matemáticas

La divulgación científica se entiende como el conjunto de actividades que interpretan y hacen accesible el conocimiento científico o, en particular, matemático, al público general. Según describen Ibáñez et al. (2020), la divulgación de las matemáticas es una actividad reciente en España, en comparación con la tradición divulgativa de otros países del entorno como Francia, Alemania o Reino Unido. Sin embargo, y tomando como referencia el año 2000, año proclamado como Año Mundial de las Matemáticas, se ha observado un esfuerzo creciente en poner en marcha eventos y actividades divulgativas a lo largo de todo el territorio español, con el objetivo de que las matemáticas se entiendan "como parte de la cultura, accesibles a todo el mundo, independientes de la edad, el sexo, la situación social o económica, la ubicación física, el nivel de estudios o cualquier otro elemento diferenciador que se pueda considerar" (Ibáñez et al., 2020, p. 422).

Si bien la divulgación matemática, así como la divulgación de la didáctica de la matemática, puede tener un papel muy relevante en la enseñanza de esta ciencia, no está diseñada con un fin didáctico de aula, sino que son los propios docentes de las diferentes etapas educativas los que pueden tomar como referencia este material en dos sentidos: como fuente de actividades para su alumnado, y en las que en ocasiones será necesario que el docente haga una adaptación del material de divulgación a su actividad de aula, o como recurso para el desarrollo profesional docente, tanto desde el punto de vista de la propia matemática como de la didáctica de la matemática. A continuación, se presentan algunas ideas y fuentes que pueden ser útiles en cada uno de estos dos sentidos.

La divulgación como recurso para el aula

El uso de material de divulgación como fuente de recursos para el aula se alinea con una de las competencias descritas en los actuales currículos de la LOMLOE, sobre la identificación de las matemáticas como ciencia implicada en otras áreas o en la vida cotidiana, así como con la competencia clave en conciencia y expresión culturales, pues promueve el conocimiento y respeto por el patrimonio cultural de cualquier época, y en ese patrimonio están las matemáticas.

Un buen punto de partida para localizar elementos de divulgación en matemáticas lo constituyen las asociaciones y sociedades relacionadas con las matemáticas. Por ejemplo, la Real Sociedad Española Matemática (RSME, https://www.rsme.es/) es una sociedad con el objetivo de estimular la investigación en matemáticas, la transferencia del conocimiento, la mejora de su enseñanza y la difusión e impacto social de esta ciencia, entre otros. En su página web podemos encontrar difusión de sus iniciativas, actividades, conferencias… Por ejemplo, actualmente tienen activa la sección *El problema del mes*, iniciativa orientada hacia escolares y sus profesores y en la que cada mes se propone una serie de problemas, por niveles desde 5.º/6.º de Educación Primaria hasta Bachillerato, y en la que los participantes pueden enviar sus soluciones, de forma que aquellas más originales, rigurosas e ingeniosas pueden ser premiadas y publicadas. También cuenta con una sección de divulgación y difusión, donde se pueden consultar diversas iniciativas, como por ejemplo las actividades propuestas para el Día Internacional de las Matemáticas (14 de marzo, por el número Pi). Otro ejemplo es el Centro virtual de divulgación de las matemáticas, divulgaMAT (https://www.divulgamat.net/), dependiente de la RSME, donde podemos encontrar información y materiales interesantes, como pueden ser libros de divulgación, retos, o la sección de recursos, en la que se muestran actividades que pueden ser de utilidad en el aula. Por último, cabe destacar que la RSME organiza la Olimpiada Matemática Española, orientada a estudiantes de Bachillerato, y que puede suponer una actividad extracurricular muy interesante cuyo objetivo es promover el talento matemático.

Otra asociación de gran interés es la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM, https://fespm.es/), que aglutina a las sociedades y asociaciones autonómicas de profesores de matemáticas. La FESPM (o sus sociedades) organiza y promueve tanto actividades orientadas al alumnado, como son la Olimpiada matemática para escolares de últimos cursos de Primaria y de Secundaria, o el Día escolar de las matemáticas.

También cabe destacar la Red de Divulgación Matemática (DiMa, http://dima.icmat.es/), plataforma formada por personas divulgadoras de las matemáticas de España, que cuenta con el apoyo de instituciones (universidades y centros de investigación) y de sociedades matemáticas. Un ejemplo de iniciativa interesante es el proyecto Marzo, mes de las matemáticas, iniciativa desarrollada en colaboración con la Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología - Ministerio de Ciencia e innovación (FECYT) a lo largo del año 2021 (https://marzomates.webs.ull.es/author/marzomates/). En su página web puede encontrarse información sobre eventos, recursos (papiroflexia, *escape rooms*…), exposiciones o conferencias que fueron desarrollados a lo largo del proyecto.

Por último, cabe destacar la utilización de algunos medios de divulgación como herramienta de actividades de aula, como los blogs. Según Sánchez y Vargas (2016), esta herramienta ha sido bastante utilizada en el aula, y son varios los estudios que muestran que su empleo resulta eficaz como estrategia didáctica facilitadora de la adquisición de contenidos. En su estudio, ellas proponen el blog como recurso para el desarrollo de la capacidad de comunicación matemática en Educación Secundaria y, aunque no facilita el uso del lenguaje matemático al no permitir la escritura directa de símbolos o representaciones gráficas, sí que permite la comunicación del pensamiento matemático, la organización de este, y propicia el debate virtual a partir de los comentarios, así como la explicación y justificación.

La divulgación en el desarrollo profesional docente

Aunque en un principio la divulgación matemática está orientada hacia un público más general, muchas veces podemos encontrar actividades de divulgación que pueden contribuir en la formación continua como profesionales de la docencia en el área de las matemáticas, ya sea porque profundizan en temas de la matemática escolar menos conocidos, o porque sirven de difusión y transferencia de las novedades en el campo de la investigación en educación matemática.

Una fuente de información interesante lo constituyen los blogs educativos, que ya habíamos indicado que se pueden utilizar como herramientas para utilizar con el alumnado, pero que constituyen un medio de divulgación de experiencias de aula o cuestiones matemáticas muy accesible. En las siguientes dos direcciones podemos consultar listados de blogs, en el primer caso principalmente orientados hacia la divulgación matemática, y que pueden ser útiles para los docentes y, en el segundo, blogs de matemáticas para Educación Primaria que en gran medida recogen experiencias llevadas a cabo en centros educativos (https://www.edu-casio.es/10-blogs-espanoles-de-divulgacion-matematica-para-docentes/ y https://www.educaciontrespuntocero.com/recursos/matematicas-para-primaria-blogs-que-visitar/).

También en las redes sociales podemos encontrar información interesante para el desarrollo profesional docente, sobre todo en el ámbito de la educación matemática. Algunos ejemplos de estos investigadores-divulgadores en el área de Didáctica de la Matemática son Pablo Beltrán-Pellicer (https://tierradenumeros.com/), profesor de la Universidad de Zaragoza, o José Ángel Murcia (http://www.tocamates.com/), profesor de la Universidad Complutense, que también ofrecen información útil para el diseño de actividades para el aula, con el valor añadido de basar su divulgación en aportaciones de la investigación en Didáctica de la Matemática en diferentes niveles, aunque especialmente en las etapas de Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria. Su actividad se divulga también a través de la red social Twitter, en la que además podemos encontrar otros investigadores en educación matemática o a matemáticos que comparten ideas y conocimiento, y debaten sobre aspectos relacionados con la enseñanza de las matemáticas (@pbeltranp; @druizaguilera; @MsIdeasMnosCtas; @SergioMJGR; @clabebal; @carlosyedma; @ljrguezmuniz; @

Matias_ArceSan; @AngelAlsinaP; @IreneFerrando1; @MatJuanmi; @qsaurio; @RocioDidMat; @bpalop; @GoCalero…, entre otros).

Por último, cabe destacar a las páginas webs de instituciones o universidades que divulgan recursos e investigaciones en el campo de la educación matemática. Algunos ejemplos interesantes son los siguientes: la red *Development and Research in Early Math Education*, de la Universidad de Stanford (https://dreme.stanford.edu/), cuyo objetivo es avanzar en el campo de la investigación en educación matemática temprana (desde el nacimiento hasta los 8 años aproximadamente) y cuyos miembros dirigen investigación básica y aplicada y desarrollan herramientas innovadoras en torno a la educación matemática temprana. Otro ejemplo es la Cooperativa de matemáticas tempranas del *Erikson Institute* (https://earlymath.erikson.edu/es/), cuyo objetivo es aumentar la calidad de la educación matemática temprana a través del desarrollo profesional de docentes, formadores y administradores, realizando investigaciones en torno a la enseñanza de las matemáticas en infantes y como fuente de información sobre las matemáticas fundamentales. Otro ejemplo de gran interés es la página web de *Nrich Mathematics* (https://nrich.maths.org/), de la Universidad de Cambridge, que resulta de la colaboración entre las Facultades de Matemáticas y de Educación de dicha universidad. En ella se recogen cientos de recursos matemáticos online libres dirigidos a estudiantes desde los 3 a los 18 años, así como breves artículos sobre diferentes aspectos de la educación matemática que pueden ser de gran utilidad para los docentes.

A modo de conclusión

Una de las concepciones más habituales de las matemáticas, también presente en el nuevo currículo de la LOMLOE, es la de su carácter instrumental, como disciplina que proporciona herramientas que se aplican en otras disciplinas, áreas o situaciones. Ese carácter está, obviamente, muy presente al trabajar las matemáticas en los diferentes niveles escolares. Sin embargo, se puede correr el riesgo de considerar las matemáticas escolares como una preparación propedéutica para aplicaciones que se trabajarán después y en las otras áreas (por ejemplo, física, química…). Esto puede dificultar la generación en el alumnado de una percepción adecuada sobre la importancia de las matemáticas como parte del acervo cultural de la humanidad, así como su papel indispensable en la sociedad.

En este capítulo se han mostrado diferentes ideas clave y propuestas para considerar e implementar unas matemáticas escolares con un mayor carácter transversal, entendida la transversalidad en diferentes sentidos, que favorezca en el alumnado la consideración de los roles cultural, social y público de las matemáticas. Por una parte, se ha mostrado cómo el trabajo interdisciplinar y situado en el propio entorno ayuda a dar sentido y promover la necesidad de introducir y trabajar ideas y conceptos matemáticos. También hemos ejemplificado el diseño y planteamiento de propuestas para trabajar, desde las matemáticas, aspectos transversales del currículo, como son la sostenibilidad y la perspectiva y los roles de género. Y, por último, a través también de la posible explotación de diferentes recursos de tipo divulgativo, ya sea sobre las matemáticas o sobre la propia educación matemática.

Hemos abordado una temática muy amplia y somos conscientes de que esto es solo una pincelada del alcance de las matemáticas en el aprendizaje con enfoque en otros contextos. Queda en manos de los lectores seguir profundizando y ampliando su concepción y aplicación de las matemáticas en los diferentes niveles educativos, y lograr así consolidar en el aula su carácter transversal.

Referencias

Alsina, À. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años).* Graó.

Alsina, À. (2020). Conexiones matemáticas a través de actividades STEAM en Educación Infantil. *UNIÓN, 58,* 168-190.

Arce, M., Conejo, L. y Muñoz-Escolano, J. M. (2019). *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.* Síntesis.

Barwell, R. (2018). Some Thoughts on a Mathematics Education for Environmental Sustainability. En P. Ernest (Ed.), *The Philosophy of Mathematics Education Today. ICME-13 Monographs.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77760-3_9

Benjumeda, F. J., Romero, I. y López-Martín, M. M. (2015). Alfabetización matemática a través del aprendizaje basado en proyectos en secundaria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 163-172). SEIEM.

Bernal, J. M. (2012). De las escuelas al aire libre a las aulas de la naturaleza. *Áreas. Revista Internacional De Ciencias Sociales, 20*, 171-182.

Blackwell, L. S., Trzesniewski, K. H. y Dweck, C. S. (2007). Implicit Theories of Intelligence Predict Achievement Across an Adolescent Transition: A Longitudinal Study and an Intervention. *Child Development, 78*(1), 246-263. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2007.00995.x

Blanco, L. y Cárdenas, J. A. (2013). La resolución de problemas como contenido en el currículo de Matemáticas de Primaria y Secundaria. *Campo Abierto, 32*(1), 137-156.

Blanco-Nieto, L. (2021). *Mirar la ciudad con ojos matemáticos.* Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Blane, D. (1989). Mathematics trails. En *ICMI Papers on The Popularization of Mathematics* (pp. 126-132). ICMI.

Bruchner, P. (2012). Escuelas infantiles al aire libre. *Cuadernos de pedagogía, 420,* 26-29.

Chamoso, J. y Rawson, W. (2003). *Matemáticas en una tarde de paseo.* Nivola.

Degol, J. L., Wang, M., Zhang, Y. y Allerton, J. (2018). Do growth mindsets in math benefit females? Identifying pathways between gender, mindset, and motivation. *Journal of Youth and Adolescence, 47*, 976-990. https://doi.org/10.1007/s10964-017-0739-8

Diego-Mantecón, J. M., Blanco, T. F., Ortiz-Laso, Z. y Lavicza, Z. (2021). Proyectos STEAM con formato KIKS para el desarrollo de competencias clave. *Comunicar, 66*, 33-43. https://doi.org/10.3916/C66-2021-03

Dweck, C. S. (2007). Is Math a Gift? Beliefs That Put Females at Risk. En S. J. Ceci y W. M. Williams (Eds.), *Why aren't more women in science?: Top researchers debate the evidence* (pp. 47–55). American Psychological Association. https://doi.org/10.1037/11546-004

Fournié, E. (1928). Las escuelas al aire libre desde el punto de vista pedagógico. *Boletín de la Institución Libre de Enseñanza, 814,* 33-37.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Reidel.

García-Alonso, I. y Vásquez, C. (2021). Educación Estadística en el contexto de la sostenibilidad: una perspectiva de formación con futuros profesores de Educación Primaria. *Tangram. Revista de Educação Matemática, 4*(4), 3-34. https://doi.org/10.30612/tangram.v4i4.15407

Gil, N., Blanco, L. J. y Guerrero, E. (2005). El dominio afectivo en el aprendizaje de las Matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. *UNIÓN, 2,* 15-32

Guisasola, J., Azcona, R., Etxaniz, M., Mujika, E. y Morentin, M. (2005). Diseño de estrategias centradas en el aprendizaje para las visitas escolares a los museos de ciencias. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, 2*(1), 19-32

Ibáñez, R., Alegría, P., Blasco, F., Pérez, A. y Timón, A. (2020). Divulgación de las matemáticas. En D. Martín, T. Chacón, G. Curbera, F. Marcellán y M. Siles (Coords.), *Libro blanco de las Matemáticas* (pp. 421-481). Fundación Ramón Areces.

INEE (2014). *PISA 2012. Programa para la evaluación internacional de los alumnos. Informe Español.* Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Macho, M., Padrón, E., Calaza, L., Casanellas, M., Conde, M., Lorenzo, E. y Vázquez, M. E. (2020). Igualdad de género en el ámbito de las Matemáticas. En D. Martín, T. Chacón, G. Curbera, F. Marcellán y M. Siles (Coords.), *Libro blanco de las matemáticas* (pp. 375-420). Fundación Ramón Areces.

Méndez, D., Méndez, M., Anguita, J. M. y Suárez, C. (2019). Motivation in the use of digital platforms for teaching and learning mathematics. En *Proceedings of The International Conference on Modern Research in Education, Teaching and Learning ICMETL 2019* (pp. 53-64). Diamond Scientific Publishing. https://www.doi.org/10.33422/icmetl.2019.06.295

Milinkovic, J., Vorkapic, M. y Stanojevic, I. (2021). Discovering mathematics in the museum of african art. En J. Novotná y H. Moraová (Eds.), *Broadening experiences in elementary school mathematics* (pp. 300-309). Charles University of Prague.

National Science Teachers Association (1998). *Science for all Americans.* NSTA.

NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática* (Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, Trad.). Autor (Trabajo original publicado en 2000)

Olmos, R. y Martí-Contreras, O. (2021). Clasificación de tareas creadas por el alumnado para una ruta matemática históricamente contextualizada. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 667). SEIEM.

Ortega, T. (2005). *Conexiones matemáticas: motivación del alumnado y competencia matemática.* Graó.

Ryan, R. M. y Deci, E. L. (2000). Self-determination theory and the facilitation of intrinsic motivation, social development, and well-being. *American Psychologist, 55*(1), 68–78.

Ryan, R. M. y Deci, E. L. (2020). Intrinsic and extrinsic motivation from a self-determination theory perspective: Definitions, theory, practices, and future directions. *Contemporary Educational Psychology, 61.* https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2020.101860

Salvador-Beltri, A., Lorenzo-Valentín, G, Santágueda-Villanueva, M. y Monferrer-Sales, L. (2021). Los huertos escolares como espacios para aprender matemáticas y ciencias experimentales: una realidad o una innovación educativa en la provincia de Castellón. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 677). SEIEM.

Sánchez, S. y González, C. (2016). La asamblea en educación infantil: un espacio para crecer como grupo. *Revista Iberoamericana de Educación, 71,* 133–150.

Sánchez, G. M. y Vargas, C. J. (2016). Uso del blog para el desarrollo de la capacidad de comunicación matemática en la Educación Secundaria. *Revista Complutense de Educación*, *27*(3), 1327-1350. http://dx.doi.org/10.5209/rev_RCED.2016.v27.n3.48462

Segal, R. y Segal, D. (2019). Educational and Experiential Activities for Students and Teachers of Mathematics and Sciences in a Classical Museum of Archeology. En *Conference Proceedings of the 9th International Conference The Future of Education.*

Shoaf, M.-M., Pollak, H. O. y Schneider, J. (2004). *Math Trails.* COMAP Incorporated.

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica.* (P. Valero, Trad.) Una Empresa Docente (Trabajo original publicado en 1994)

Sorando, J. M. (2018). *100 escenas de cine y tv para la clase de matemáticas*. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Toma, R. B. y García-Carmona, A. (2021). "De STEM nos gusta todo menos STEM". Análisis crítico de uma tendencia educativa de moda. *Enseñanza de las Ciencias, 39*(1), 65-80. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3093

Tytler, R., Mulligan, J., Prain, V., White, P., Xu, L., Kirk, M., Nielsen, C. y Speldewinde, C. (2021). An interdisciplinary approach to primary school mathematics and science learning. *International Journal of Science Education, 43*(12), 1926-1949. https://doi.org/10.1080/09500693.2021.1946727

UNESCO (2012). *Shaping the Education of Tomorrow: 2012 Report on the UN Decade of Education for Sustainable Development, A bridged.* Autor.

UNESCO (2015). *Transformar nuestro mundo: la Agenda 2030 para el desarrollo sostenible.* Autor. Recuperado de: https://unctad.org/system/files/official-document/ares70d1_es.pdf

UNESCO (2017a). *Educación para los objetivos de desarrollo sostenible: objetivos de aprendizaje.* Autor.

UNESCO (2017b). *Textbooks for sustainable development. A guide to embedding.* Autor.

Vásquez, C., Seckel, M. J. y Alsina, Á. (2020). Belief system of future teachers on Education for Sustainable Development in Math classes. *UNICIENCIA, 34*(2), 1-30. http://dx.doi.org/10.15359/ru.34-2.1

Wegemer, C. M. y Eccles, J. S. (2019). Gendered STEM career choices: Altruistic Values, beliefs, and identity. *Journal of Vocational Behavior, 110*, 28-42. https://doi.org/10.1016/j.jvb.2018.10.020

Wells, N. M. (2000). At Home with Nature: Effects of "Greenness" on Children's Cognitive Functioning. *Environment and Behavior, 32*(6), 775–795. https://doi.org/10.1177/00139160021972793

Zotes, E. y Arnal-Palacián, M. (2019). *Las matemáticas en Educación Infantil en el Modelo Europeo al Aire Libre.* Comunicación en el grupo IEMI de la SEIEM. XXIII Simposio de la SEIEM.

Zotes, E. y Arnal-Palacián, M. (2022). Matemáticas en Educación Infantil: una mirada al aprendizaje de las magnitudes desde el desarrollo sostenible. *Educación Matemática*, 34(1), 306-334. https://doi.org/10.24844/EM3401.11

Parte 4

Formación y desarrollo profesional del profesorado de matemáticas

Mathematics Teacher Education and Professional Development

Formación y desarrollo profesional del profesorado de matemáticas[1]

Mathematics Teacher Education and Professional Development

Llinares, S.[a] (Coord.)
Breda, A [b], Climent, N.[c], Fernández, C.[a], Font, V.[b], Lupiáñez, J.L.[d], Moreno, M.[a], Perez-Tyteca, P.[a], Ruiz-Hidalgo, J.F.[d], Sánchez, A.[b]
[a] *Universidad de Alicante,*
[b] *Universidad de Barcelona,*
[c] *Universidad de Huelva,*
[d] *Universidad de Granada.*

Resumen

La investigación en Didáctica de la Matemática proporciona evidencias que permiten materializar propuestas de formación de maestros y profesores de matemáticas basadas en un marco de competencias profesionales docentes. Dos ideas son claves en este proceso. Por una parte, la identificación de diferentes prácticas profesionales específicas que configuran la práctica de enseñar matemática. Por otra, la identificación del conocimiento que se activa en la realización de estas prácticas profesionales que se considera conocimiento especializado que debe poseer un profesor de matemáticas y que procede de las investigaciones en Didáctica de la Matemática. Este capítulo propone y describe formas de materializar un marco de competencias profesionales docente para la formación de maestros y profesores de matemáticas de educación secundaria.

Palabras clave: Formación profesores de Matemáticas, Desarrollo profesional, Prácticas profesionales específicas, Conocimiento especializado, Enseñar matemáticas, Competencia profesional para la enseñanza.

Abstract

Research in Didactics of Mathematics provides evidence that allows materializing mathematics teacher education based on a framework of professional teaching skills. Two ideas are key in this process. First, the identification of different core practices that makes up mathematics teaching as a practice. Second, the identification of the specific knowledge activated in the performance of these core practices considered mathematics teachers' professional knowledge. This knowledge comes from the research in Didactics of Mathematics. This chapter proposes and describes ways to materialize a framework of core practices for the mathematics teacher education (primary and secondary school teachers).

Keywords: Mathematics Teacher Education, Professional development, Core practices, Mathematics Knowledge for Teaching, Mathematics Teaching, Teaching competence.

1. Autores de cada sección: A.1. Ceneida Fernández y Mar Moreno (UA); A.2. José Luis Lupiáñez y Juan Francisco Ruiz Hidalgo (UGR); A.3. y C.2. Adriana Breda, Alicia Sánchez, Vicenç Font (UB); C.1. Nuria Climent (UHU); D.1. Patricia Perez-Tyteca (UA).

Introducción

Es reconocida la importancia del papel de los docentes para una enseñanza eficaz. Como consecuencia, se necesita tener docentes bien formados y profesionalmente capaces. Esto implica reconocer la existencia de un conocimiento específico para enseñar matemáticas y la identificación de un determinado conjunto de *prácticas específicas profesionales* que conforman la práctica de enseñar matemáticas. La articulación entre prácticas específicas profesionales y el conocimiento que apoya el desarrollo de estas prácticas configuran el significado de las competencias docentes profesionales. Es decir, ser competente en la enseñanza de las matemáticas implica ser capaz de tomar decisiones de acción apoyadas en procesos de razonamiento usando conocimiento específico vinculado al conjunto de prácticas que constituyen las prácticas de enseñar matemáticas.

Llegar a ser competente en la enseñanza de las matemáticas, desde estas referencias, exige tener en cuenta aproximaciones y perspectivas desarrolladas en la investigación en Didáctica de la Matemática sobre la formación inicial y sobre el desarrollo profesional, así como en la articulación del acceso a la profesión docente. En este sentido, el conocimiento generado por las investigaciones en formación inicial y permanente de profesores de matemáticas en el ámbito de la Didáctica de la Matemática aporta elementos que pueden dar coherencia al modelo de formación de docentes de matemáticas desde un marco de competencias profesionales docentes (desde la formación inicial de maestros y profesores de educación secundaria, hasta las propuestas de desarrollo profesional) (Badillo et al., 2019). Dicho modelo de profesión docente derivado de los resultados de proyectos de investigación y desarrollo (evidencias que apoyan las decisiones) y la experiencia práctica de los formadores de docentes de matemáticas permite asumir una manera coherente de concebir la formación inicial, el acceso a la profesión y las iniciativas de desarrollo profesional que se organiza por competencias profesionales. Estos proyectos de investigación y desarrollo han proporcionado conocimiento sobre los procesos formativos y han generado recursos didácticos específicos (Castro, 2011; Chamorro, 2003; Carrillo et al., 2016). En este capítulo se proporciona información sobre los conocimientos y recursos proporcionando ejemplos de cómo materializar una manera de entender un marco de competencias profesionales docentes para organizar la formación de los maestros y profesores de matemáticas.

Las investigaciones desde la Didáctica de la Matemática han permitido identificar *prácticas profesionales específicas* vinculadas a la práctica de enseñar matemáticas y han generado *conocimientos que apoyan dichas prácticas específicas*. En la formación inicial y continua, tanto de maestros de educación primaria e infantil, como de profesores de matemáticas de educación secundaria, estas ideas y formas de proceder comparten el principio básico de que los currículos formativos deben estar organizados por el desarrollo de competencias profesionales (binomio entre prácticas específicas profesionales y conocimiento que apoya la realización de dichas prácticas). Para ello, se identifican tanto las prácticas específicas vinculadas a la práctica de enseñar matemáticas como el conocimiento derivado desde las investigaciones en Didáctica de la matemática que apoya dichas prácticas. En particular, conocimientos específicos que permitan a los docentes describir, analizar, explicar lo que sucede en una clase de matemáticas para poder justificar las decisiones de acción (proponer propuestas de mejora). Algunas de estas prácticas profesionales específicas (formando parte de competencias profesionales docentes) son:

– Interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes a partir de sus producciones matemáticas (orales o escritas) como una forma de dar sentido a lo que sucede en el aula para tomar decisiones de acción adecuadas.
– Identificar el potencial matemático de las tareas matemáticas como medio para apoyar la creación de oportunidades de aprendizaje, considerando las expectativas de aprendizaje y las dificultades y errores que cometen los estudiantes (Planificación/diseño, selección y valoración de tareas y secuencias de enseñanza) como un ámbito de interacción con el currículo y los materiales y recursos didácticos.
– Gestionar las secuencias didácticas en el aula de matemáticas considerando las interacciones entre el contenido, los estudiantes, y el contexto.
– Reflexionar sobre la propia práctica como una forma de problematizar el proceso de enseñanza de las matemáticas (identificar problemas en la enseñanza de las matemáticas para generar soluciones).

En estas prácticas profesionales específicas, la evaluación del aprendizaje matemático y la competencia en el uso de las tecnologías de la educación en la enseñanza de las matemáticas es transversal lo que requiere el uso de conocimiento de Didáctica de la Matemática para diseñar instrumentos e identificar niveles de logro de las competencias indicadas en el currículo.

La sinergia entre prácticas profesionales específicas y conocimiento activado en su realización define competencias docentes profesionales vinculadas a la enseñanza de las matemáticas. Esta sinergia es la que caracteriza las propuestas de formación docente y, por tanto, el modelo formativo por competencias. El conocimiento específico vinculado al desarrollo de estas prácticas funciona como un instrumento/herramienta conceptual para permitir a los docentes describir, explicar y justificar sus acciones. Por ejemplo, ideas tales como trayectorias de aprendizaje de los conceptos matemáticos, criterios de idoneidad didáctica de las secuencias de enseñanza, oportunidades de aprendizaje o demanda cognitiva de las tareas matemáticas, se convierten en referencias para el desarrollo de las prácticas profesionales específicas que configuran la práctica de enseñar matemáticas.

Además, el modelo de formación docente debe considerar cómo se desarrollan estas competencias profesionales y cómo podemos generar indicadores de su desarrollo (como una manera de tener instrumentos para la evaluación de dichas competencias). Por ello, la investigación en formación de maestros y profesores de Matemáticas en el ámbito de la Didáctica de la Matemática ha empezado a generar dichos indicadores de desarrollo de las competencias profesionales mediante ciclos de diseño, implementación y análisis de entornos de aprendizaje, oportunidades de aprendizaje y de propuestas formativas.

Por otra parte, las prácticas específicas y el conocimiento que las apoya (conocimiento didáctico y matemático que se activa al realizarlas) están estrechamente vinculados al conocimiento de matemáticas del futuro docente. Esto genera cuestiones particulares tanto en la formación de maestros como de profesores de matemáticas de educación secundaria. En el caso de la formación inicial de maestros, el conocimiento de matemáticas que deben poseer los aspirantes a entrar en el programa de formación debe asegurarnos que puedan aprovechar las oportunidades de desarrollo de las competencias profesionales que los programas de formación pueden ofrecer (Gorgorio et al., 2021). La realidad y las investigaciones realizadas indican que el sistema educativo no está garantizando el conocimiento elemental de matemáticas (su competencia matemática) para poder aprovechar al máximo las oportunidades de aprendizaje y de desarrollo de las competencias profesionales docentes que los programas de formación de maestros ofrecen. Por otra parte, también es necesario asegurar la competencia matemática de los aspirantes a profesores de educación secundaria como condición para asegurar el aprovechamiento de las oportunidades de desarrollo de las competencias profesiones.

Finalmente, el modelo de formación docente que se apoya en el desarrollo de competencias docentes específicas en la enseñanza de las matemáticas subraya la relevancia del *periodo de prácticas* en los centros educativos y el papel que pueda desempeñar el tutor tutora. El significado de *aprender en la práctica* significa concebir las aulas de los centros de prácticas como ambiente de aprendizaje con los mismos focos de aprender a razonar sobre los diferentes aspectos de la enseñanza de las matemáticas. La consideración de las aulas de los centros de prácticas como contextos para aprender a razonar sobre la enseñanza de las matemáticas (y no solo como lugar de aplicación de conocimiento previamente aprendido) implica desarrollar una nueva manera de concebir la formación docente. Esta nueva forma de entender el papel de los centros de prácticas incide en que las prácticas formativas en los centros educativos deben ser coherentes con el objetivo de aprender competencias profesionales específicas de la enseñanza de las matemáticas.

Las secciones siguientes proponen formas de materializar un marco de competencias profesionales docentes para la formación de maestros y profesores de matemáticas de educación secundaria. Ejemplos y formas de proceder que permiten identificar estas ideas en la práctica de formar maestros y profesores de matemáticas se presentan en cuatro secciones: sobre la formación inicial, el acceso a la profesión, sobre el desarrollo profesional y el dominio afectivo como una cuestión transversal.

Parte A. Formación inicial

A.1. Interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes para decidir sobre la enseñanza

Interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes para proponer criterios de acción es una práctica profesional específica. Caracterizar entornos de aprendizaje en los programas de formación de maestros y profesores de matemáticas que potencian el desarrollo de estas prácticas permite plantear aproximaciones holísticas con el foco en la sinergia entre las prácticas específicas y los procesos de razonamiento usando conocimiento especializado (Fernández, Choy, 2019; Fernández et al., 2018; GIDIMAT-UA, 2021; Llinares y Fernández, 2021). El foco sobre esta sinergia permite apoyar el desarrollo de competencias profesionales que doten a los docentes de matemáticas de recursos para describir, explicar, interpretar y proponer criterios de acción para apoyar el aprendizaje matemático de los estudiantes.

Por ejemplo, la competencia docente "mirar profesionalmente" el pensamiento matemático de los estudiantes articula las siguientes tres destrezas interrelacionadas: (i) reconocer estrategias de los estudiantes identificando elementos matemáticos importantes, (ii) interpretar la comprensión de estos elementos matemáticos, y (iii) tomar decisiones sobre la enseñanza con el objetivo de favorecer la progresión conceptual de los estudiantes (Jacobs et al., 2010). Esta competencia requiere el uso de conocimiento de matemáticas, sobre la enseñanza y sobre el aprendizaje de las matemáticas para decidir cómo continuar en la enseñanza (Brown et al., 2020; Mason, 2002).

Características de los entornos de aprendizaje en los programas de formación inicial dirigidos a desarrollar esta competencia son:

- Uso de representaciones de la práctica.
- Uso de preguntas guía para centrar la atención sobre los aspectos relevantes en un momento determinado del proceso formativo de los docentes.
- Uso de conocimiento generado por las investigaciones sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas a modo de instrumentos conceptuales para describir, interpretar y decidir cómo continuar en la enseñanza. Este conocimiento es condensando en documentos con información relevante para la resolución de las tareas profesionales.
- Espacios de interacción para la discusión, reflexión y uso de las ideas teóricas para describir, y analizar las situaciones de la práctica, y justificar cómo debería continuar la secuencia de enseñanza.

Las representaciones de la práctica son descripciones de situaciones y recursos de la enseñanza de las matemáticas (videos, narrativas, planes de lecciones, respuestas escritas de los estudiantes, descripciones de sucesos ocurridos en el aula en forma de narrativas o en formato cómic, etc …) que proporcionan contextos para analizar e interpretar uno o varios aspectos de la enseñanza de las Matemáticas. Por ejemplo, videos mostrando interacciones entre estudiantes resolviendo un problema o las interacciones entre estudiantes y el docente discutiendo diferentes resoluciones de un problema, o respuestas de estudiantes a varios problemas/actividades, etc. Las representaciones de la práctica son instrumentos útiles en la formación de profesorado al permitir focalizar la atención del futuro docente en aspectos de la práctica objeto del aprendizaje docente (Buchbinder y Kuntze, 2018), ofreciendo oportunidades para relacionar ideas teóricas con la situación. Por ejemplo, ofreciendo la posibilidad de observar diferentes niveles de la progresión del aprendizaje de los estudiantes de primaria o secundaria.

En este contexto, las preguntas guía permiten centrar la atención en desarrollar las destrezas de describir, interpretar y decidir haciendo uso del conocimiento procedente de las investigaciones en Didáctica de la Matemática (instrumentos conceptuales). Este conocimiento (documento teórico) proporciona al futuro docente conocimiento para analizar la representación de la práctica. Estos instrumentos conceptuales pueden ser Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA) que ayudan a estructurar la mirada profesional del futuro docente (Fernández et al., 2018; Edgington et al., 2016). Una THA consta de objetivos de aprendizaje, un modelo hipotético de aprendizaje del concepto matemático, entendido como niveles de progresión en el aprendizaje del contenido matemático, y un conjunto de actividades que favorezcan la progresión en la comprensión (Simon, 1995).

Por último, se asume una forma de entender cómo se desarrollan las competencias docentes vinculada a la colaboración con otros, adoptando una perspectiva sociocultural del aprendizaje. De esta manera, se crean espacios de interacción para las discusiones presenciales en pequeños grupos o gran grupo o a través de un foro/debate virtual. A continuación, para mostrar estas características de los entornos de aprendizaje que han sido diseñados, implementados y analizados en ciclos formativos se presentan dos ejemplos centrados en el desarrollo de *la competencia mirar profesionalmente* (i) el pensamiento geométrico de los estudiantes en la formación de maestros de Educación Primaria y (ii) el pensamiento funcional de los estudiantes en la formación de futuros profesores de matemáticas de Educación Secundaria.

Un entorno de aprendizaje para desarrollar la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento geométrico de los estudiantes para maestro/a

Este entorno de aprendizaje tiene como objetivo desarrollar la competencia en reconocer evidencias de la comprensión de los estudiantes e interpretarla, usando información procedente de las investigaciones sobre el aprendizaje matemático, con el fin de tomar decisiones para la enseñanza (Tabla 1).

Tabla 1. Estructura del entorno de aprendizaje para desarrollar competencias docentes vinculadas a interpretar el pensamiento geométrico en Educación Primaria (figuras, cuerpos geométricos e isometrías)

Tareas profesionales	Representación de la práctica y preguntas guía	Instrumento conceptual
1	▪ Representación de la práctica (Libros de texto): Capítulo 11, Figuras Planas (VV. AA (2019). Matemáticas 6º primaria, tercer trimestre, pp. 202-217. Editorial SM. ▪ Preguntas guía: Centradas en el *análisis de los materiales curriculares*, y los tipos de tareas y su organización en los libros de texto	Currículo de Educación Primaria (http://www.docv.gva.es/datos/2014/07/07/pdf/2014_6347.pdf) y documento actual pendiente del desarrollo en las CC.AA. (BOE.es - BOE-A-2022-3296 Real Decreto 157/2022). Sobre las características de las tareas
2	▪ Representación de la práctica: Respuestas de estudiantes de 2º de Educación Primaria a una tarea de clasificar figuras. ▪ Preguntas guía: Centradas en la *identificación de los elementos matemáticos e interpretación la comprensión* de los atributos relevantes de las figuras	▪ Sobre los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico: Niveles de Van Hiele (Battista, 2012; Jaime y Gutiérrez, 1987)
3	▪ Representación de la práctica: Actividades y tareas en una lección. ▪ Preguntas guía: Centradas en *anticipar posibles respuestas de estudiantes* en función del nivel de comprensión de Van Hiele, analizar respuestas de estudiantes y justificar decisiones para apoyar el progreso de los estudiantes	▪ Sobre los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico: Niveles de Van Hiele (Battista, 2012; Jaime y Gutiérrez, 1987) ▪ Sobre el pensamiento geométrico: imagen del concepto, errores y dificultades (Dickson et al., 1991; Fernández y Llinares, 2012).

Tareas profesionales	Representación de la práctica y preguntas guía	Instrumento conceptual
4 y 5	▪ Representación de la práctica: Respuestas de estudiantes a la clasificación de figuras y cuerpos geométricos, respectivamente. ▪ Preguntas guía: Centradas en *anticipar, analizar e interpretar características de la comprensión* sobre la clasificación de figuras geométricas y la clasificación de cuerpos geométricos, respectivamente, y decidir cómo continuar.	▪ Sobre los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico: Niveles de Van Hiele (Battista, 2012; Jaime y Gutiérrez, 1987) ▪ Sobre el pensamiento geométrico: imagen del concepto, errores y dificultades (Dickson et al., 1991; Fernández y Llinares, 2012).

Documentos de apoyo:

Battista, M. (2012). *Cognition-Based Assessment and Teaching of Geometrical Shapes. Building on Students' Reasoning*. Portamouth: Heinemann (pag. 36).
Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona: MEC-Labor
Fernández, C. y Llinares, S. (2012). *Dificultades en la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*. UOC. Universitat Oberta de Catalunya.
Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En: S. Llinares, S. y M.V. Sánchez, M.V. (Eds.) *Teoría y Práctica en Educación Matemática* (cap. VI). Alfar: Sevilla.

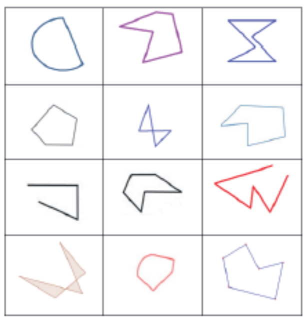
Veamos un ejemplo de una de las tareas profesionales de este entorno de enseñanza (tarea 2). Se proporciona a los estudiantes para maestro un documento teórico que es una síntesis de investigaciones sobre los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico de Van Hiele (Jaime y Gutiérrez, 1987), además de ejemplos de actividades para desarrollar la comprensión de cada nivel y la transición entre estos (Battista, 2012). La información sobre los primeros niveles de desarrollo del pensamiento geométrico caracteriza la transición entre una perspectiva perceptual de los estudiantes de los objetos geométricos hasta generar aproximaciones analíticas sobre las que se apoyan los procesos de clasificación.

La tarea se contextualiza a partir de una situación de aula (representación de la práctica) en la que una maestra de 2º de Educación Primaria, quiere saber cómo sus alumnos reconocen las figuras geométricas y sus atributos. Para ello, proporciona 12 cartas con diferentes figuras y solicita a sus estudiantes que clasifiquen las imágenes y justifiquen la clasificación realizada (Figura 1). Se aportan las respuestas de tres estudiantes en tres niveles diferentes de comprensión. El estudiante 1 es ejemplo de nivel 2 del desarrollo de la comprensión de Van Hiele, ya que es capaz de identificar los atributos de las figuras de manera individual, empieza a clasificar figuras según sus atributos y puede expresar verbalmente el criterio de clasificación empleado. Establece cuatro grupos independientes sin considerar cuando una figura es un ejemplo de un caso más general, (Figura 2). El estudiante 2, como ejemplo del nivel 1, agrupa las figuras en dos clases sin un criterio aparente. El estudiante 3 agrupa las figuras usando explícitamente la definición de polígono; hace dos grupos, el de los polígonos y el de las figuras que son no polígonos, sin usar atributos irrelevantes para la definición

Las preguntas guía tratan de que el estudiante para maestro identifique los elementos y procesos geométricos necesarios para resolver la actividad; interprete la respuesta de los estudiantes a partir de sus producciones y las dificultades manifestadas en la resolución, haciendo uso de los documentos teóricos proporcionados; y, finalmente, tome decisiones para favorecer el progreso de los estudiantes a partir de su comprensión.

En un contexto de reflexión y discusión entre iguales y con el formador, el estudiante para maestro tiene la oportunidad de analizar la tarea y valorar su exigencia cognitiva, identificando evidencias en las respuestas de los estudiantes e interpretarlas desde la perspectiva del conocimiento teórico sobre el desarrollo del pensamiento geométrico. La toma de decisiones exige al estudiante para maestro adaptarse a las necesidades específicas de los estudiantes para favorecer su progresión en el aprendizaje en función de la comprensión interpretada.

Tarea: Agrupar las siguientes figuras (los niños deben agruparlas proporcionando el criterio)
Material: 12 cartas con diferentes figuras



Maestra: En esta actividad tendrás que clasificar las figuras en grupos como tú quieras y explicar el por qué.

Figura 1. Actividad propuesta por la maestra (representación de la práctica)

Estudiante 1

DIÁLOGO ESTUDIANTE 1-ANA (MAESTRA)

Ana: Voy a darte estas fichas y me vas a agrupar las figuras como tú quieras.

Estudiante1: o sea como yo quiera, ¿no?

Ana: sí, como tú quieras

Estudiante1: pero, ¿cuántos grupos?

Ana: los que tú quieras.

[Tras agruparlos].

Ana: Vale, explícame, ¿cómo los has hecho?

Estudiante1: Pues estos porque tienen algún lado curvo (1), estos porque se cruzan (2), estos porque están abiertos (3) y todos estos porque sus lados son rectos está cerrada (4).

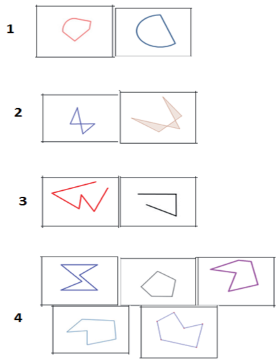


Figura 2. Diálogo entre la maestra y el estudiante 2 (representación de la práctica)

Un entorno de aprendizaje para desarrollar la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento funcional de los estudiantes (Formación de profesores de matemáticas de Educación Secundaria)

Este entorno de aprendizaje tiene como objetivo el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes sobre el límite de una función en un punto (Tabla 2).

Tabla 2. Estructura del entorno de aprendizaje para apoyar el desarrollo de competencias docentes vinculadas a interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes (sobre el concepto de límite de una función en un punto) (Adaptada de Llinares y Fernández, 2021).

Tareas profesionales	Representación de la práctica y preguntas guía	Instrumento conceptual
1	▪ Representación de la práctica: *Tres problemas de un libro de texto* sobre el concepto de límite de función en un punto. ▪ Preguntas guía: Centradas en la resolución de los problemas (Objetivo: Activar el conocimiento sobre los elementos matemáticos y modos de representación vinculados a la concepción dinámica de límite de una función en un punto).	▪ Sobre la concepción dinámica de límite (Blázquez y Ortega, 2001; Cottrill et al., 1996; Pons, 2014).
2	▪ Representación de la práctica: *Tres problemas de un libro de texto* sobre el concepto de límite de función en un punto. ▪ Preguntas guía: Anticipación de posibles respuestas de estudiantes de bachillerato para discutir posibles niveles de comprensión del concepto de límite de una función en un punto.	▪ Sobre la concepción dinámica de límite (Blázquez y Ortega, 2001; Cottrill et al., 1996; Pons, 2014).
3	▪ Representación de la práctica: *Respuestas de cuatro estudiantes de bachillerato a tres problemas* sobre el concepto de límite de una función en un punto. ▪ Preguntas guía: Identificar e interpretar distintas características de la comprensión sobre el límite de una función en un punto y decidir cómo continuar.	▪ Sobre niveles de comprensión del concepto de límite de una función en un punto (Pons, 2014).

Tareas profesionales	Representación de la práctica y preguntas guía	Instrumento conceptual
5	▪ Representación de la práctica: *Respuestas de tres estudiantes de bachillerato* a seis problemas sobre el concepto de límite de una función en un punto. ▪ Preguntas guía: Identificar e interpretar distintas características de la comprensión sobre el límite de una función en un punto y decidir cómo continuar.	▪ Sobre niveles de comprensión del concepto de límite de una función en un punto (Pons, 2014).

Documentos de apoyo:

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(3), 219–236.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning whit a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 167–192.

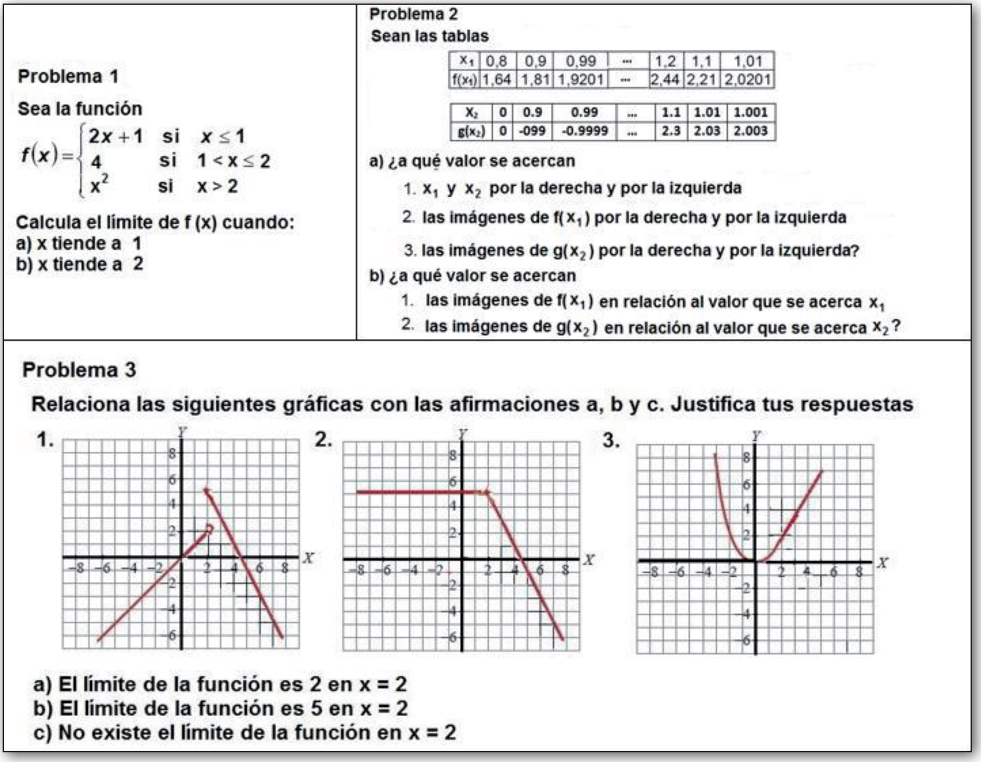
Colera, J., Olivera, M. J., García, R. y Santaella, E. (2008). *Matemáticas I. Bachillerato.* Anaya.

Pons, J. (2014). *Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto*. Tesis Doctoral. Universidad de Alicante. Alicante. España.

Pons, J., Valls, J. y Llinares, S. (2012). La comprensión de la aproximación a un número en el acceso al significado de límite de una función en un punto. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 435–445). SEIEM.

La tarea profesional 1 consta de tres problemas sobre el concepto de límite de una función en un punto en diferentes modos de representación (algebraico, numérico y gráfico). Estos problemas proceden de un libro de texto de matemáticas de primer curso de bachillerato (Figura 3, Colera et al., 2008). Las preguntas guía están centradas en la resolución de los tres problemas indicando los elementos matemáticos y modos de representación que se usan en su resolución. Para ello, se proporciona a los estudiantes para profesor un documento con la definición de límite de una función en un punto basada en la concepción dinámica y los elementos matemáticos que la conforman (Pons et al., 2012): (i) función, (ii) aproximación lateral por la derecha y por la izquierda (en el dominio, y en el rango, tanto si son coincidentes como si no lo son), y (iii) coordinación, a través de la función, de los procesos de aproximación en el dominio y en el rango considerando distintos modos de representación (gráfico, algebraico y numérico).

Se espera que el estudiante para profesor identifique en cada problema el modo de representación y los elementos matemáticos implicados como una manera de desarrollar un discurso profesional vinculado a la enseñanza de las matemáticas. Por ejemplo, el problema 1 (Figura 3) se presenta en modo algebraico con límites laterales no coincidentes en x=1 (apartado a) y coincidentes en x=2 (apartado b). Los elementos matemáticos implicados en la resolución son: (i) función definida a trozos; (ii) las aproximaciones en el dominio en x=1 y x=2, y aproximaciones en el rango para determinar el comportamiento de la *f*(x) alrededor de *f*(x)=3 y *f*(x)=4; (iii) la coordinación de los procesos de aproximación en el dominio y en el rango alrededor de los puntos x=1 y x=2.



Problema 1

Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x\le 1 \\ 4 & \text{si } 1<x\le 2 \\ x^2 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

Calcula el límite de f (x) cuando:
a) x tiende a 1
b) x tiende a 2

Problema 2
Sean las tablas

x_1	0,8	0,9	0,99	...	1,2	1,1	1,01
$f(x_1)$	1,64	1,81	1,9201	...	2,44	2,21	2,0201

x_2	0	0.9	0.99	...	1.1	1.01	1.001
$g(x_2)$	0	-099	-0.9999	...	2.3	2.03	2.003

a) ¿a qué valor se acercan
1. x_1 y x_2 por la derecha y por la izquierda
2. las imágenes de $f(x_1)$ por la derecha y por la izquierda
3. las imágenes de $g(x_2)$ por la derecha y por la izquierda?

b) ¿a qué valor se acercan
1. las imágenes de $f(x_1)$ en relación al valor que se acerca x_1
2. las imágenes de $g(x_2)$ en relación al valor que se acerca x_2?

Problema 3

Relaciona las siguientes gráficas con las afirmaciones a, b y c. Justifica tus respuestas

a) El límite de la función es 2 en x = 2
b) El límite de la función es 5 en x = 2
c) No existe el límite de la función en x = 2

Figura 3. Problemas del libro de texto que forman parte de la tarea profesional 1

En la tarea profesional 2, los estudiantes para profesor tienen que anticipar respuestas hipotéticas de estudiantes de bachillerato a los problemas que habían resuelto en la tarea profesional 1 reflejando diferentes niveles de comprensión del concepto de límite de una función en un punto.

En la tarea profesional 3, los estudiantes para profesor tiene que interpretar las respuestas dadas por cuatro estudiantes de Bachillerato (Pablo, Rebecca, Luiggi y Jorge) a los tres problemas (la Figura 4 muestra una de las respuestas) y proponer nuevas tareas para ayudar a los estudiantes a progresar en su comprensión. Las respuestas de los cuatro estudiantes de Bachillerato evidencian diferentes niveles de comprensión del límite de una función en un punto (Pons, 2014; Tabla 3).

Tabla 3. Características de la comprensión del concepto de límite de cada estudiante de bachillerato

Estudiante	Características de su comprensión
Pablo	Coordina las aproximaciones en el dominio y en el rango en los tres modos de representación (analítico, numérico y gráfico). No explicita la existencia de límite
Rebeca	Solo coordina las aproximaciones en el modo gráfico (y cuando los límites son coincidentes)
Luiggi	Coordina las aproximaciones en el dominio y en el rango en los tres modos de representación. Explicita la existencia de límite
Jorge	Coordina en modo numérico y gráfico (este último sólo cuando los límites son coincidentes)

Las preguntas guía son las siguientes:

– *Describe en cada uno de los problemas qué elementos matemáticos de la concepción dinámica de límite ha usado el "alumno X" para resolverlos e indica si ha tenido dificultades y por qué.*
– *A partir de las descripciones de cómo el alumno X ha realizado los tres problemas, ¿es posible identificar alguna característica de cómo el alumno X comprende el concepto de límite de una función en un punto? Justifica tu respuesta a partir de los elementos y los modos de representación.*
– *Considerando la comprensión de límite de una función de un punto del alumno X mostrada en la resolución de los problemas diseña una tarea para mejorar esta comprensión. Justifica tu respuesta.*

Para interpretar las respuestas de los estudiantes de Bachillerato, los estudiantes para profesor disponen de un documento con información sobre características de la comprensión del concepto de límite de una función en un punto (Figura 5, Pons, 2014). Se espera identifiquen que Jorge coordina los procesos de aproximación en el dominio y en el rango en modo numérico (cuando los límites son coincidentes y cuando no son coincidentes) pero en el modo gráfico únicamente cuando los límites son coincidentes. Considerando las características de la comprensión del concepto de limite, se podría decir que Jorge se sitúa en el nivel intermedio y que, por tanto, en las decisiones de acción se debería tener en cuenta la coordinación de aproximaciones cuando los límites son no coincidentes en modo gráfico y en modo algebraico.

Problema 1

Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x\le 1 \\ 4 & \text{si} \quad 1<x\le 2 \\ x^2 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

Calcula el límite de f (x) cuando:

a) x tiende a 1. Justifica tu respuesta 3 ya que el 1 se sustituye en la f(x) 2x+1 porque x≤1 igual que 1

b) x tiende a 2. Justifica tu respuesta 4 ya que el 2 se sustituye en la f(x) 4 porque 1<x≤2 igual que 2

Problema 2

Sean las tablas

x_1	0,8	0,9	0,99	...	1,2	1,1	1,01
$f(x_1)$	1,64	1,81	1,9201	...	2,44	2,21	2,0201

X_2	0	0.9	0.99	...	1.1	1.01	1.001
$g(x_2)$	0	-099	-0.9999	...	2.3	2.03	2.003

a) ¿a qué valor se acercan

1. **x_1 y x_2 por la derecha y por la izquierda** Tiende x_1 a 1 por la izquierda y la derecha Tiende x_2 a 1 por la izquierda y por la derecha.
2. **las imágenes de f(x_1) por la derecha y por la izquierda** Tienden a 2 por la izq y derecha
3. **las imágenes de g(..$_2$) por la derecha y por la izquierda?** Tiende a −1 por la izq y a 2 por la derecha

Justifica tus respuestas

b) ¿a qué valor se acercan

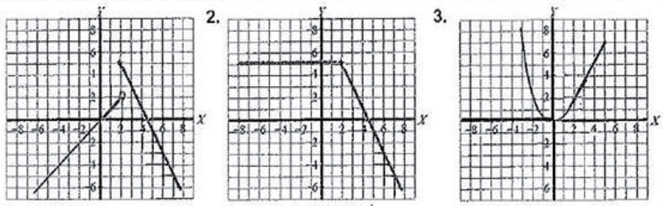
1. **las imágenes de f(x_1) en relación al valor que se acerca x_1** cuando f(x$_1$) se acerca a 2, x$_1$ se acerca a 1
2. **las imágenes de g(x_2) en relación al valor que se acerca x_2?** cuando g(x$_2$) se acerca −1, por la izq. y por la derecha a 2, x$_2$ se acerca a 1

Justifica tus respuestas

Problema 3

Relaciona las siguientes gráficas con las afirmaciones a, b y c. Justifica tus respuestas

1. **2.** **3.**



a) El límite de la función es 2 en x = 2 3 cuando x se acerca a 2 y se acerca a 2

b) El límite de la función es 5 en x = 2 2 cuando x se acerca a 2 y se acerca a 5.

c) No existe el límite de la función en x = 2 1

coinciden por la izq y derecha

Transcripción

PROBLEMA 1

a) 3 ya que el 1 se sustituye en la f(x) 2x+1, porque $x \leq 1$ *(igual que 19)*

b) 4 ya que el 2 se sustituye en la f(x) 4 , porque $1 < x \leq 2$ *(igual que 2)*

PROBLEMA 2.

a1) Tiende x_1 *a 1 por la izquierda y por la derecha*

Tiende x_2 *a 1 por la izquierda y por la derecha*

a2) Tiende a 2 por la izq y derecha

a3) Tiende a -1 por la izq y a 2 por la derecha

b1) cuando $f(x)_1$ *se acerca a 2 ,* x_1 *se acerca a 1*

b2) cuando a (x_2) *se acerca a -1, por la izq y por la derecha a 2,*

x_2 *se acerca a 1*

PROBLEMA 3

a) 3 cuando x se acerca a 2 f se acerca a 2

b) 2 cuando x se acerca a 2 f se acerca a 5

(coinciden por la izq y derecha)

c) 1

Figura 4. Respuesta de uno de los estudiantes de Bachillerato (Jorge).

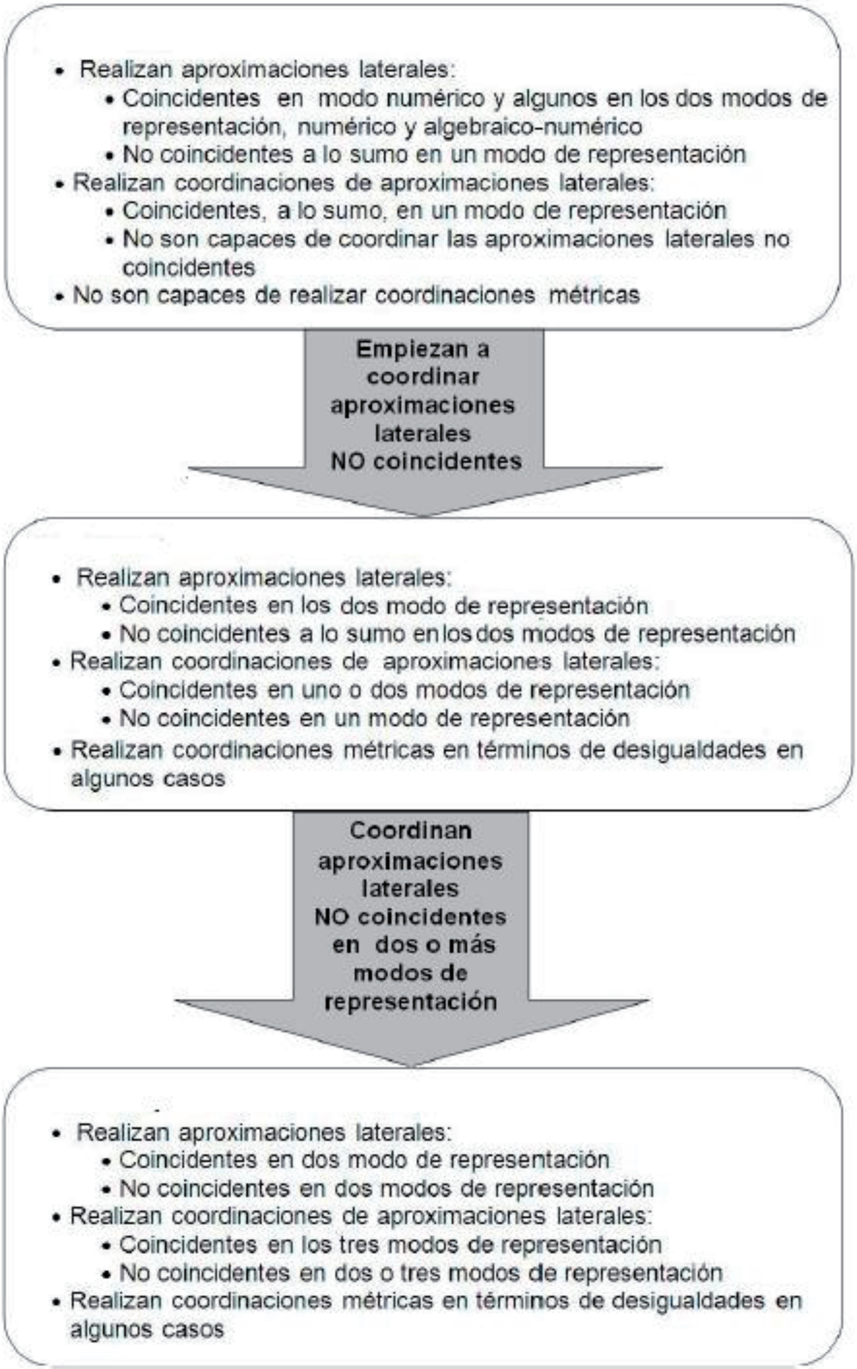


Figura 5. Documento teórico: Características de la comprensión del concepto de límite de una función en un punto.

Estos dos ejemplos de entornos de aprendizaje (en la formación de maestros de Educación Primaria y la formación de profesores de matemáticas de Educación Secundaria) están insertos en ciclos formativos y muestran características de un modelo de formación docente basado en la sinergia entre la práctica y el conocimiento, permitiendo generar ambientes para el inicio del desarrollo de competencias docentes en la formación inicial. Esta sinergia entre la práctica específica (mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes) y el conocimiento sobre el que se apoya dicha práctica, permite vincular los procesos de describir e interpretar las situaciones de enseñanza y proponer criterios para orientar y decidir lo que hacer a continuación.

A.2. Oportunidades de aprendizaje y tareas matemáticas escolares

El término "oportunidades de aprendizaje" (OTL, Opportunities to Learn) se ha empleado en la investigación educativa con diferentes interpretaciones y énfasis. Como señala Floden (2002), durante más de treinta años de estudios comparativos internacionales, OTL ha sido una noción importante en la recogida, análisis y comunicación de datos, sobre todo en matemáticas y en el aprendizaje de las ciencias en general. Aunque las OTL fueron introducidas en la primera aplicación del proyecto FIMS (First International Survey) en los inicios de los años sesenta del siglo pasado, uno de los primeros significados concretos en educación de esta noción se atribuye a John Carroll (1963), quien la definió como el tiempo dedicado al aprendizaje. Algunos años después las OTL fueron más allá de la dimensión temporal, constituyendo un elemento central en el estudio comparativo que la IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement) realizó en Estados Unidos para valorar el logro en matemáticas de sus escolares (Törnroos, 2005). Las OTL se constituyeron en una medida de si los escolares habían tenido o no la oportunidad de estudiar un tema o de resolver un problema del tipo de los que aparecían en el cuestionario.

En el SIMS (Second International Mathematics Study; de 1976 a 1982), las OTL cumplieron ese mismo cometido, y se preguntó a los profesores si habían enseñado en sus clases los contenidos matemáticos tratados en los ítems usados (McDonnell, 1995). Otras cuestiones que se plantearon a los profesores permiten delimitar el significado que se atribuía a las OTL (metas instruccionales, actitudes y creencias sobre la enseñanza de las matemáticas, estrategias docentes o su formación profesional. Durante muchos años posteriores fueron frecuentes los estudios centrados en la formación y actividad del profesor en comparación con los logros de sus escolares (Raizen y Jones, 1985). El uso de las OTL en este estudio sirvió para que esta noción se comenzara a usar a mediados de la década de los ochenta del siglo pasado para orientar tendencias educativas, y para realizar comparaciones curriculares según diferencias geográficas. Más allá del uso en el SIMS, centrado principalmente en los profesores y en el contenido matemático, en el estudio de las OTL comenzaron a incluirse estudios de escolares y responsables educativos y se abordaban aspectos tales como la organización y los recursos de los centros, el propio contenido en el currículo, la formación previa del profesor y sus estrategias instruccionales (McDonnell, 1995). De hecho, las OTL llegaron a constituirse como los vehículos más apropiados para reconducir los problemas de calidad y equidad de la educación (McLaughlin y Shepard, 1995).

En el proyecto TIMSS, las OTL se emplearon para recopilar datos, identificándose cuatro dimensiones relativas al currículum, al aula, a la escuela y a los escolares. Estas dimensiones delimitaban cuatro cuestiones: ¿Qué se espera que aprendan los escolares? ¿Quién administra la instrucción? ¿Cómo se organiza la instrucción? ¿Qué han aprendido los escolares? (Clarke y Gregory, 2003). A partir del estudio TIMSS, se profundiza en la cuestión relacionada con la organización de la instrucción y comienzan a definirse diferentes variables para caracterizar las OTL (Lupiáñez, 2009). Floden (2002) recoge un detallado análisis del papel de las OTL en diferentes estudios comparativos internacionales, reconociendo la amplitud de aspectos que abarcan las OTL como una característica común en todos ellos. En el marco de la formación de docentes también se han empleado las OTL como una noción central. Así, en el estudio TEDS-M se usa el concepto de OTL para "explicar el impacto de la preparación del profesor en su aprendizaje" (Tatto et al., 2008, p. 44).

Definiciones de OTL

La noción de OTL considera gran variedad de funciones y de propósitos y no existe una definición consensuada del término. Desde un punto de vista educativo se puede considerar la definición propuesta por Valverde et al., (2002) que la define como "la configuración de las condiciones sociales, políticas y pedagógicas que suministran a los escolares la posibilidad de adquirir conocimiento, desarrollar destrezas y formar actitudes relacionadas con las materias escolares" (p. 6). En esta definición se destaca, lo que el contexto social influye en la formación de la persona (el estudiante), que lo predispone y contribuye a su aprendizaje. Por otra parte, la definición destaca también las circunstancias educativas propuestas para incentivar ese aprendizaje (las políticas pedagógicas).

Una definición más centrada en la escuela es la que proponen Lo y Wheatly (1994), que definen las OTL como aquellas condiciones o circunstancias dentro de la escuela o el aula que promueven el aprendizaje de todos los escolares, y las caracterizan en función de varias componentes como currículos, profesores, materiales de aprendizaje o diferentes experiencias instruccionales. También señalan que las OTL se relacionan con la ausencia de barreras que dificulten el aprendizaje. Stevens y Grymes (1993) destacan además el papel del profesor a la hora de determinar oportunidades de aprendizaje "implementando modelos y programas instruccionales" (p. 3).

Esta noción se sigue considerando en la investigación en Didáctica de la Matemática, si bien su significado se ha asentado con ligeras reorientaciones o énfasis (Planas, 2014). Pero más allá de delimitar un significado para las OTL, también se han realizado diferentes aproximaciones para concretar qué aspectos o dimensiones del proceso educativo deben recoger.

Las variables que se tienen en cuenta cuando se estudian las OTL en los estudios internacionales tienen orígenes diferentes y su clasificación no es trivial. En un primer acercamiento, podríamos clasificar las variables de las OTL y, en consecuencia, las propias OTL en tres grupos (Williams et al., 2020):

- Variables que incluyen el currículum implementado, directamente generadas por los docentes, las tareas asignadas y el tipo de actividades relacionadas con el aprendizaje; pueden ser creadas e implementadas en el aula directamente por el profesorado (Cai et al., 2017).
- También se han incorporado como variables de OTL a algunas relacionadas con el currículo, que relacionan los contenidos presentados con la evaluación que se realiza, oportunidades educacionales de éstos, o implementación del plan de estudios (Schmidt et al., 2017);
- Finalmente, de manera general, indicadores amplios como el entorno, los recursos y las condiciones escolares, y la enseñanza que los estudiantes experimentan (Scherff y Piazza, 2008).

Oportunidades y tareas matemáticas escolares

Reconociendo y admitiendo la importancia de todas las dimensiones que abarcan las OTL, no cabe duda de que el diseño y la selección de tareas es una de las más relevantes desde el punto de vista de la actividad del docente. Cai et al. (2017) destacan cómo las tareas en las que se promueve el manejo de diferentes modos de representar las nociones involucradas, las que establecen diferentes demandas cognitivas, o aquellas que favorecen la aplicación de diferentes estrategias, suministran a los escolares la oportunidad de aprender matemáticas.

Las tareas constituyen el principal medio por el que un docente puede perseguir en sus escolares el logro de los objetivos específicos de un tema de matemáticas. La función cognitiva de una tarea se centra en proporcionar un contexto estructurado de demanda de actuaciones a los escolares con sentido, mediante la práctica de una o varias herramientas matemáticas. Las tareas ejemplifican y, a la vez, muestran la diversidad de actividades que pueden considerarse en relación y bajo el enunciado de un determinado objetivo. Las tareas tienen demandas cognitivas que movilizan conocimientos para su empleo. Una tarea es un reto para el estudiante, y sirve para mostrar su aprendizaje sobre un foco de contenido movilizando conceptos y procedimientos y, asimismo, un indicador para que el profesor valore el grado de logro del aprendizaje expresado mediante uno o varios objetivos (Lupiáñez, 2009). La riqueza, variedad y complejidad de tareas tienen que ver con la calidad de la enseñanza que lleva a la práctica un docente y, por tanto, con las oportunidades de aprendizaje que suministra a su alumnado.

Cuando un docente se tiene que enfrentar a sus estudiantes olvida muchos de los condicionantes del aprendizaje externos al aula y se centra en alcanzar el máximo aprendizaje de su alumnado dentro de sus clases. Para ello, utiliza tareas escolares, más conocidas como ejercicios o actividades de matemáticas. Estas tareas requieren que los estudiantes movilicen sus conocimientos y ejerciten su competencia matemática. Por tanto, cada tarea atiende a una o varias expectativas: esto es, cada tarea tiene una meta, una finalidad, pretende que los estudiantes aprendan algo (de matemáticas). Así que podemos diferenciar unas tareas de otras por la intención de aprendizaje que tienen (Ruiz-Hidalgo y Rico, 2016).

El sistema educativo actual se puede situar dentro un planteamiento funcional, donde las matemáticas que se enseñan deben tener una función, lo que condiciona cómo deben ser las tareas escolares. Estas recomendaciones curriculares indican que las tareas parten de conocimientos previos, están contextualizadas para ser significativas, progresan hacia niveles de abstracción, están secuenciadas, etc. Por tanto, la forma en la que un docente ofrece oportunidades de aprendizaje a sus estudiantes es mediante las tareas matemáticas escolares. Las tareas cumplen así con una importante función: proporcionan un contexto convencional y estructurado que demanda actuaciones con sentido, mediante práctica de habilidades matemáticas. Esta función tiene dos características de componente cognitivo (Ruiz-Hidalgo y Rico, 2016): por un lado, indica al docente si sus estudiantes cubren las expectativas. Por otro, sirve como herramienta de detección de las dificultades de aprendizaje de los estudiantes y para ayudar a la superación de estas dificultades.

Justificados por las características anteriores, el docente puede considerar dos puntos de partida para plantear oportunidades de aprendizaje:

- Las expectativas de aprendizaje
- Las dificultades y los errores que presentan los estudiantes

Oportunidades a partir de las expectativas de aprendizaje

Dentro de un marco curricular, las expectativas de aprendizaje consideran aspectos cognitivos, es decir, de aprendizaje de los contenidos matemáticos dentro del plan de formación. Concretamente, las expectativas agrupan las capacidades, las competencias, técnicas, destrezas, hábitos, valores y actitudes que se espera que los estudiantes aprendan o desarrollen como resultado de una propuesta de formación (Flores y Lupiáñez, 2016). Por ejemplo,

- En las leyes orgánicas de educación, donde se presentan los fines de la educación.
- Cuando se manifiesta el desarrollo de capacidades específicamente matemáticas. Es aquí donde toma importancia la noción de competencia matemática.
- En las indicaciones por ciclo y curso, donde se establecen criterios de evaluación y estándares de aprendizaje. Estas expectativas, en muchas ocasiones, se concretan en las programaciones de aula o de los departamentos didácticos de los centros en objetivos específicos.

De todas estas expectativas, ¿cuáles son las que debe usar el docente? Aquellas que le aporten más información, puesto que está tratando de proponer oportunidades expresadas como tareas escolares, para que sus estudiantes aprendan. Por ejemplo, ante un posible objetivo para el bloque de medidas como *medir con instrumentos, utilizando estrategias y unidades convencionales y no convencionales, eligiendo la unidad más adecuada para la expresión de una medida* en primer ciclo de primaria, un docente puede sugerir que los escolares midan las dimensiones de su pupitre: primero sin instrumentos y luego que elijan el instrumento de medida que consideren más apropiado de varios a escoger. En esta tarea, además del desarrollo de la medida mediante procedimientos directos y el desarrollo de la habilidad de utilizar un instrumento, la posterior discusión y presentación de los resultados de ambas medidas permite al docente profundizar en las unidades convencionales y no convencionales y en qué se entiende por unidad adecuada.

La implementación de la primera parte de esta tarea permite desarrollar habilidades del sentido de la medida como el reconocimiento de atributos comparables, aunque las principales capacidades que se trabajan con esta tarea serían sobre la comprensión del proceso de medir: discusión sobre la elección de la unidad, antropométrica al principio, como el palmo y que profundiza en la idea de medida como repetición de la unidad y luego con instrumentos usuales, como la regla escolar o la cinta métrica. La discusión sobre las ventajas y los inconvenientes intenta orientar a los estudiantes hacia la apreciación de la utilidad del uso de las unidades estandarizadas para compartir la información.

Un ejemplo para el tema de ecuaciones en 2º ESO, podría partir de un objetivo enunciado de la siguiente manera *Operar con las expresiones algebraicas para obtener ecuaciones (o sistemas de ecuaciones) equivalentes a una dada y calcular algebraicamente las soluciones de un sistema*". El uso de balanzas de ecuaciones y tareas relacionando las representaciones algebraicas (Figura 6) permite consolidar las transformaciones que permiten obtener sistemas equivalentes sobre la base de un contexto, abordando la técnica de resolución de sistemas de ecuaciones y facilita empezar a trabajar los conceptos de sistemas determinados e indeterminados, comparando el número de objetos que aparecen y las condiciones (situaciones de equilibrio) que cumplen.

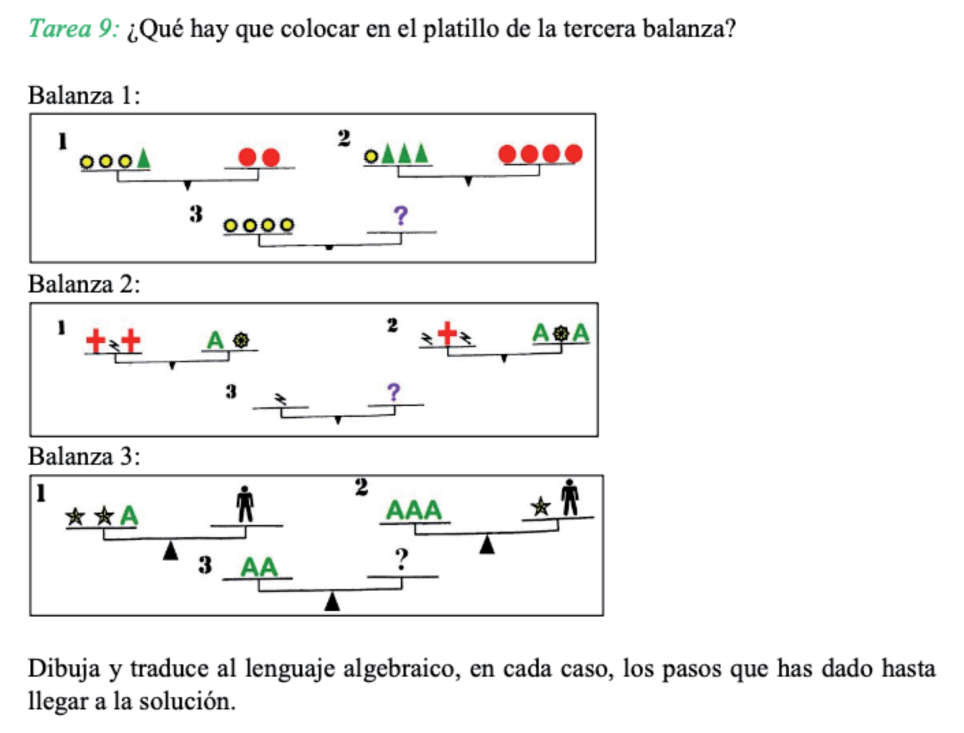


Figura 6. Tarea propuesta para 2º ESO como OTL a partir de un objetivo

El futuro docente debe saber situar este tipo de tareas en relación a los documentos curriculares, proponer tareas apropiadas para estas expectativas de manera que sean oportunidades de aprendizaje para sus estudiantes. La habilidad que se desea trabajar aquí con el futuro profesor es que sea capaz de proponer tareas apropiadas partiendo de una expectativa de aprendizaje. Para ello, se parte de una expectativa y se le anima a que:

- Identifique el nivel educativo en el que sería apropiada, para lo que puede usar los desarrollos curriculares vigentes
- Proponga una tarea escolar cuya meta sea esa expectativa

Oportunidades a partir de las dificultades y errores

La segunda fuente de organización de oportunidades son los errores y las dificultades. Aunque no sea familiar para los docentes, sobre el tema de los errores y las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas se ha investigado mucho desde la Didáctica de la Matemática. Existen infinidad de artículos y libros al respecto (sobre qué papel tiene el error en el aprendizaje, cuáles son los errores más comunes que cometen los aprendices sobre casi todos los tópicos escolares, o cómo los docentes detectan y usan los errores que presentan sus estudiantes). En educación matemática se consideran dos enfoques respecto del uso de errores (Rico, 1998). En el primero de ellos, el error es considerado una oportunidad para promover el aprendizaje de los escolares. En el segundo, la meta es el análisis del error por parte del profesor. El error proporciona información sobre el estudiante que es útil para implementar un tratamiento orientado a cambiar las nociones erróneas (Fernández-Plaza et al., 2019).

Desde el punto de vista de las oportunidades de aprendizaje, el docente debe conocer las dificultades propias de un tema de matemáticas y, o bien por su experiencia o bien por su formación, prever los errores que se pueden presentar en el aula y adelantarse a ellos incluyendo en la planificación tareas orientadas a su superación.

La búsqueda de errores es relativamente sencilla, ya que, en la actualidad, Internet y los motores de búsqueda son grandes aliados en la localización de dificultades de aprendizaje. En geometría en Educación Primaria son bien conocidos los errores y dificultades debidos a la tridimensionalidad de los objetos. Al introducir los poliedros, los escolares necesitan manipular representaciones físicas de estos objetos. Incluir tareas de representaciones posibilita la detección de relaciones y propiedades de los objetos que, en el futuro, puedan ser determinadas sin la necesidad de disponer de los modelos físicos. Así, para superar estas dificultades, conviene proponer tareas en las que se manipule y se discutan propiedades con modelos macizos hechos con plastilina, por ejemplo, o modelos huecos de palillos o cañas de refresco o desarrollos planos.

Como ejemplo para secundaria, al trabajar funciones en 4º ESO, una de las dificultades habituales es la de “no establecer conexión entre los distintos sistemas de representación” (Leinhart et al., 1990). Como idea de tarea relacionada, realizar tareas de repaso de conversiones, en las que las diferentes representaciones aparezcan juntas, puede ser una buena oportunidad de aprendizaje (Figura 7).

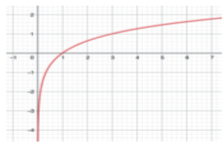
<table>
<tr><th colspan="4">TABLA DE CONVERSIONES</th></tr>
<tr><th>REPRESENTACIÓN VERBAL</th><th>REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA</th><th>REPRESENTACIÓN NUMÉRICA</th><th>REPRESENTACIÓN GRÁFICA</th></tr>
<tr><td>Si compro 3 kgs de naranjas pago 4.5€ y si compro 7 kg nos cobrarán 10.5€ (Precio total en función de los kgs).</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$y = 2^x$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td><table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>-2</td><td>2</td></tr><tr><td>-1</td><td>-1</td></tr><tr><td>0</td><td>-2</td></tr><tr><td>1</td><td>-1</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Figura 7. Tarea propuesta para 4º ESO como OTL a partir de una dificultad

Además, aprovechando el interés formativo que tiene la invención de problemas, se les podría proponer a los escolares que inventaran enunciados para cada una de las filas, procurando que se centren en contextos diferentes y que valoren la dificultad de cada uno de los problemas inventados. Esos enunciados se pueden intercambiar para ser resueltos. Ambas actuaciones, unido a la puesta en común posterior, también suministra oportunidades para aprender.

En definitiva, consideramos que el futuro docente debe saber encontrar, seleccionar y sintetizar documentos de investigación que identifiquen dificultades de aprendizaje en matemáticas y, posteriormente, proponer tareas apropiadas para la superación de dichos errores, de manera que estas tareas se conviertan en oportunidades de aprendizaje para sus estudiantes. Así, la propuesta que se le hace al futuro profesor es que, dado un error caracterizado en investigación, proponga una tarea escolar cuya meta sea la superación de dicho error.

En resumen, la noción de OTL tiene relevancia en la formación de profesores. Se debe introducir desde la formación inicial proponiendo tareas ricas y ejemplificando dinámicas y actuaciones de aula que favorezcan su creación. En el contexto curricular actual en España, en el que las competencias clave estructuran las expectativas formativas de los estudiantes a largo plazo, es necesaria una reflexión pausada del modo en el que les brindamos a los futuros profesores ejemplos de cómo pueden suministrarle a los estudiantes oportunidades para que lleguen a modelar su competencia matemática, y cómo, con esas dinámicas, estos futuros profesores disponen de oportunidades propias para desarrollar sus competencias profesionales.

A.3. Criterios de idoneidad didáctica para orientar el rediseño de la planificación e implementación de secuencias didácticas

En esta sección comentaremos brevemente el armazón de un ciclo formativo cuyo objetivo es realizar un rediseño de la práctica docente, orientado a su mejora, usando como referente teórico la herramienta Criterios de Idoneidad Didáctica (Breda et al., 2017; 2018).

Estructura de un ciclo formativo usando los Criterios de Idoneidad Didáctica como pauta para la reflexión sobre la propia práctica

Este ciclo se desarrolla de acuerdo con la siguiente secuencia:

a) Análisis de casos (sin teoría). Se propone a los participantes la lectura y análisis de episodios de clase para que hagan un análisis individual y grupal a partir de sus conocimientos previos y sin darles ninguna pauta. La puesta en común de los análisis realizados permite observar algunas regularidades, entre otras las siguientes:

– Los profesores o futuros profesores, cuando opinan (sin una pauta previamente dada) sobre un episodio de aula, expresan comentarios en los que se pueden hallar aspectos de descripción y/o explicación y/o valoración.
– Las opiniones de estos profesores se pueden considerar evidencias de diferentes tipos de conocimientos (relacionados con las matemáticas, con aspectos cognitivos, con el entorno curricular, cultural y socio-laboral, con la gestión de la interacción, con aspectos emocionales y afectivos, con el uso de recursos, etc.).
– Cuando las opiniones tienen un componente valorativo importante, se pueden inferir criterios que, en su opinión, deben guiar la práctica del profesor. Por ejemplo, si han considerado que la gestión del episodio por parte del profesor no ha motivado a los alumnos, se infiere que ellos consideran importante realizar su práctica docente procurando motivar a sus alumnos y, además, que valoran positivamente conseguir la motivación de los alumnos.

b) El siguiente paso consiste en determinar si son valores individuales o más bien son morales, en el sentido de que son valores que la comunidad interesada en la Educación Matemática está trasmitiendo a sus miembros (por ejemplo, a los futuros profesores). A partir de esta pregunta se llega a la conclusión de que, sobre todo, son criterios que gozan de un cierto consenso en la comunidad y que ellos concuerdan con este consenso por su propia experiencia y formación o bien lo asumen sin casi discusión. También se concluye que lo que están concordando o asumiendo son aspectos relacionados con tendencias sobre cómo debe ser la enseñanza de las matemáticas que se pueden encontrar en los congresos de Educación Matemática, en los currículos, en los cursos de formación de profesores inicial y permanente, etc. Dicho de otra manera, se hallan inmersos en un entorno que les envía el mensaje de que si quieren realizar una enseñanza de matemáticas de calidad tienen que seguir estas tendencias.

Todo lo anterior permite afirmar que en su caso se ha comprobado el siguiente *fenómeno*:

– El profesorado de matemáticas utiliza ciertos criterios sobre cómo deben implementarse las clases para que éstas sean de calidad, cada vez mejores, etc. (*criterios que orientan la práctica*).
– Estos criterios son similares, incluso cuando los profesores son de distintos países, culturas, religiones, nivel educativo, etc. (*gozan de un cierto consenso en una parte importante de la comunidad de educadores matemáticos*).
– Estos criterios están relacionados con las tendencias actuales sobre la enseñanza de las matemáticas (*por tanto*, *tienen relación con los resultados y constructos teóricos generados en el área de la Didáctica de las Matemáticas*).

Por último, se dedica tiempo a explicitar dichas tendencias. Entre otras, tendencia a incorporar nuevos tipos de contenidos matemáticos; tendencia a la presentación de matemáticas contextualizadas; tendencia de tipo metodológico hacia una enseñanza-aprendizaje activa (constructivista); tendencia a la incorporación de las nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación (TICs); tendencia a dar importancia a la enseñanza de los procesos matemáticos; tendencia a considerar que saber matemáticas implica ser competente en su aplicación a contextos extra-matemáticos; tendencia a aceptar el principio de equidad en la Educación Matemática Obligatoria.

c) Una vez observado el fenómeno anterior en el cual se evidencia una relación entre los criterios que orientan la práctica del profesor (cuando ésta se orienta a la mejora) y los resultados y constructos teóricos de la Didáctica de la Matemática (DM), resulta pertinente preguntarse ¿cuál es (o debe ser) el papel de la DM en la generación de criterios que orienten la práctica del profesor?

Se explica que la respuesta a esta pregunta depende de cuáles consideremos que son las demandas a las que tiene que dar respuesta la DM. Dicho de otra manera, tenemos que posicionarnos sobre si la DM tiene que dar respuesta a las dos demandas siguientes y en cómo debe hacerlo:

Demanda 1: Comprender los procesos de enseñanza-aprendizaje de esta disciplina ("¿qué ha ocurrido aquí?, ¿cómo?, ¿por qué?")

Demanda 2: Orientar cómo deben ser los procesos de enseñanza-aprendizaje de esta disciplina y, en particular, cómo mejorarlos ("¿qué se debe hacer?", "¿qué se podría mejorar?")

La primera lleva a describir, *interpretar y/o explicar* los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina (ciencia básica / teoría). La segunda lleva a *generar criterios para orientar cómo deben ser los procesos de enseñanza y aprendizaje* de las matemáticas y cómo orientar su mejora (ciencia aplicada).

Se trata de dos demandas muy diferentes pero muy relacionadas ya que sin una profunda comprensión de los procesos de enseñanza-aprendizaje de una disciplina no es posible conseguir su mejora.

Hay diversos posicionamientos sobre estas dos demandas. Asumir solo la primera significa considerar que la DM no puede enseñar a nadie qué debe hacer sino, únicamente, qué puede hacer y cómo, por ejemplo, evidenciando que fijadas unas finalidades hay "prácticas que funcionan" para conseguirlas, aunque no corresponde a la DM fijar estas finalidades. Desde este punto de vista, la segunda demanda es una petición externa al área de la DM, que se justifica por la importancia social de la educación y porque la inversión que realiza la sociedad en educación, debe revertir en una mejora de la sociedad, etc. También hay planteamientos que no se oponen directamente a la segunda demanda, simplemente asumen la primera y posponen la segunda a un futuro indeterminado. Estos posicionamientos consideran que los enfoques teóricos en DM aún están poco desarrollados, sus resultados todavía son limitados incluso para responder a la primera demanda y, por tanto, no se está en condiciones de afrontar la segunda.

Ahora bien, hay programas de investigación que están cómodos con la segunda demanda ya que consideran que la razón de ser de la DM es poder orientar la mejora de la enseñanza de las matemáticas. Por tanto, la primera demanda (describir/explicar) es simplemente un paso necesario para orientar la mejora. En cierta manera, este sería el caso de los enfoques que consideran a la DM como una ciencia orientada al diseño y evaluación de procesos y recursos para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (DBRC, 2003).

Por otra parte, hay enfoques teóricos en DM que asumen las dos demandas como es el caso del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS). En este enfoque teórico se considera que el conocimiento que se pretende construir tiene un carácter científico y, además, tecnológico. Esto quiere decir que, por una parte, se abordan problemas teóricos de clarificación ontológica, epistemológica y semiótica sobre el conocimiento matemático, en cuanto tales problemas tienen relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje (componente científico, descriptivo, explicativo y predictivo). Por otra parte, se trata de intervenir en dichos procesos para hacerlos lo más *idóneos* posible (componente tecnológico

- prescriptivo). Se entiende que la *descripción, explicación y predicción*, son los fines de la actividad científica, mientras que la *prescripción y valoración*, son los principales objetivos de la actividad tecnológica, aunque ésta también incluye elementos de investigación aplicada a la resolución de problemas concretos.

d) A continuación, la problemática sobre cuál es (o debe ser) el papel de la DM en la generación de criterios que orienten la práctica del profesor se relaciona con lo que llamamos el problema del diseño instruccional y que formulamos de la siguiente manera: ¿Qué criterios usar para diseñar y rediseñar una unidad didáctica para que sea cada vez mejor? ¿Cómo debe ser una (buena) clase (secuencia de clases) de matemáticas? ¿Cuál es el papel de la DM en la generación de estos criterios? Se trata de preguntas relacionadas con cómo determinar la calidad de un proceso de instrucción

Con relación al problema del diseño instruccional se proponen dos soluciones extremas. La primera, que llamamos opción objetivista/positivista, considera que la investigación realizada en el área de la DM nos dirá cuáles son las causas que hay que modificar para conseguir los efectos considerados como objetivos a conseguir en el proceso de instrucción, o, como mínimo, nos dirá cuáles son las condiciones y restricciones que hay que tener en cuenta para conseguir el objetivo deseado. Dicho de otra manera, la investigación en DM ofrecerá a los profesores <<prácticas que funcionan>> ya que están avaladas por investigaciones realizadas con un grupo experimental y un grupo control, por meta-investigaciones sobre muchas de estas investigaciones y por meta investigaciones realizadas sobre éstas meta investigaciones. Se trata de prácticas que se puede asegurar que funcionan porque hay datos objetivos que las avalan (evidencias). Se trata de prácticas que, según los investigadores, están validadas empíricamente de manera objetiva, por métodos cuantitativos que garantizan el control y la verificación de resultados.

Desde este punto de vista, la estrategia para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas deben ser de tipo arriba/abajo, a partir de la producción de materiales curriculares realizados por expertos que aplican conocimiento científico y de prácticas que sabemos que funcionan porque están basadas en evidencias. Este punto de vista presenta algunos problemas. Por ejemplo, dada la complejidad de los procesos de instrucción no es seguro que manipular una determinada variable produzca los efectos esperados. La segunda solución, si bien considera importante tener en cuenta a la comunidad científica del área de la DM, no cree que sea la única a tener en cuenta, ya que considera que lo que nos dice cómo guiar la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas debe emanar del discurso argumentativo de la comunidad educativa (comunidad científica, profesores, administración, padres de familia, etc.) cuando ésta busca conseguir un consenso sobre “lo que se puede considerar como mejor”. Desde esta perspectiva hay que consensuar principios que pueden servir primero para guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y, segundo, para valorar sus implementaciones.

e) De acuerdo con la perspectiva consensual, se propone al grupo de profesores o futuros profesores establecer un consenso local (en el grupo) sobre los criterios a tener en cuenta para considerar un proceso de enseñanza y aprendizaje como bueno, de calidad, idóneo, mejor, etc. Por ejemplo, en un grupo se acordó que el profesor después de implementar la clase se debía hacer las siguientes preguntas: 1) ¿He enseñado unas matemáticas de calidad? 2) ¿Han aprendido los alumnos con las tareas propuestas? 3) ¿Los contenidos se corresponden con el currículo y son útiles para su inserción social y laboral? 4) ¿Las tareas y su gestión promueven la implicación de los alumnos? 5) ¿He utilizado los recursos temporales, materiales, TIC, etc. adecuados? 6) ¿He realizado una gestión adecuada de la interacción en la clase que ha permitido resolver las dificultades de los alumnos?

f) El siguiente paso es comentar que, desde la DM, diferentes autores han realizados intentos para recopilar criterios para orientar la práctica del profesor para que ésta sea de calidad, óptima, etc. (Praetorius y Charalambous, 2018). Se trata de una recopilación de criterios que gozan de un amplio consenso en la DM. Uno de los enfoques teóricos que ha trabajado en esta línea es el EOS, desarrollando la noción de idoneidad didáctica.

g) En el siguiente paso se explica la noción de idoneidad didáctica y los criterios de idoneidad didáctica.

En el sistema teórico que configura el EOS se ha incluido la *noción de idoneidad didáctica* como criterio sistémico de optimización de un proceso de instrucción matemática. Se define como el grado en que dicho proceso (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno). Se trata de un constructo multidimensional que se descompone en seis criterios parciales (Breda, 2020; Breda et al., 2017):

– criterio de idoneidad epistémica, para valorar si las matemáticas que se enseñan son unas “buenas matemáticas”;
– criterio de idoneidad cognitiva, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los alumnos y, después del proceso, si los aprendizajes logrados se acercan a los que se pretendían enseñar;

– criterio de idoneidad interaccional, para valorar si las interacciones resuelven dudas y dificultades de los alumnos;
– criterio de idoneidad de medios, para valorar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción;
– criterio de idoneidad emocional, para valorar la implicación (intereses y motivaciones) de los alumnos durante el proceso de instrucción; y,
– criterio de idoneidad ecológica, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional, entre otros.

A continuación, se reflexiona sobre los criterios acordados por ellos y su relación con los CID. Por ejemplo, en el caso comentado en el apartado *e* anterior, se les hace observar que la primera pregunta tiene que ver con la disciplina, es decir con las matemáticas (idoneidad epistémica), la segunda con aspectos cognitivos (idoneidad cognitiva), la tercera tiene que ver con aspectos de utilidad y adaptación al entorno (idoneidad ecológica), la cuarta con aspectos afectivos (idoneidad afectiva), la quinta con el uso de recursos (idoneidad de medios) y la última con aspectos relacionados con la gestión de la interacción (idoneidad interaccional).

El hecho de que los profesores o futuros profesores hayan usado implícitamente los CID antes de conocerlos permite refinar el fenómeno observado en el apartado *b* anterior, de la siguiente manera:

– El profesorado de matemáticas utiliza ciertos criterios sobre cómo deben implementarse las clases para que éstas sean de calidad, cada vez mejores, etc. (*criterios que orientan la práctica*).
– Estos criterios son similares, incluso cuando los profesores son de distintos países, culturas, religiones, nivel educativo, etc. (*gozan de un cierto consenso en una parte importante de la comunidad matemática*).
– Estos criterios están relacionados con las tendencias actuales sobre la enseñanza de las matemáticas (*por tanto*, *tienen relación con los resultados y constructos teóricos generados en el área de la Educación Matemática*).
– Estos criterios se pueden reinterpretar en términos de los CID (criterios, componentes e indicadores).

El motivo por el cual los criterios de idoneidad didáctica se infieren en el discurso de los profesores, cuando estos tienen que justificar que sus propuestas representaban una mejora, sin habérseles enseñado el uso de esta herramienta para guiar su reflexión, se puede explicar por los orígenes del constructo ya que estos criterios, sus componentes e indicadores se han seleccionado a partir de la condición de que debían de contar con un cierto consenso en el área de la DM, aunque fuese local. Por tanto, una explicación plausible de que los criterios, sus componentes e indicadores se puedan inferir en el discurso del profesor es que reflejan consensos sobre cómo debe ser una buena enseñanza de las matemáticas ampliamente asumidos en la comunidad de educadores matemáticos; y es plausible pensar que el uso implícito que hace el profesor de ellos se debe a su formación y experiencia previa, la cual le hace partícipe de dichos consensos. Ahora bien, otra explicación también plausible es que el profesor que utiliza estos criterios, al no haber participado en el proceso de generación de los consensos que los soportan, los asuma simplemente porque se le presentan como algo naturalizado e incuestionable.

h) El siguiente paso es hacer operativos los CID mediante su desglose en componentes e indicadores.

La enseñanza y aprendizaje de los CID con sus componentes e indicadores es la parte central del ciclo formativo que estamos describiendo y es la que ocupa más tiempo. Mediante diferentes tareas el grupo va acordando diferentes componentes e indicadores de los criterios, los cuales encajan fácilmente con los propuestos en Breda et al. (2017). Se trata de generar una rúbrica (con criterios, componentes e indicadores) para ayudar a los profesores en la valoración de su práctica y guiar su rediseño, pero que es muy diferente a las guías docentes cuyo propósito es ayudar a los maestros a dar forma a la instrucción y guiar su acción y toma de decisiones (Remillard, 2018), en particular es muy diferente a las guías docentes para el profesor que acompañan a los libros de texto. Por ejemplo, para la emergencia del componente "Muestra representativa de la complejidad del objeto matemático que se quiere enseñar", primero se remarca que actualmente hay una tendencia a considerar que saber matemáticas incluye la competencia para aplicarlas a situaciones de la vida real, y que dicha tendencia, en algunos países, se ha concretado en el diseño de currículums basados en competencias. Se hace hincapié en que la idea de competencia en el fondo pone de relieve que las matemáticas que se enseñan han de ser útiles para resolver problemas en diferentes contextos. Por ejemplo, tomando problemas que se resuelven aplicando significados parciales diferentes del teorema de Thales (Font et al., 2017). Después se reflexiona sobre la complejidad de la noción de otros objetos matemáticos, entre ellos los de función (Font et al., 2012), inecuación, derivada, mediatriz y pendiente. Para el caso de la pendiente, por ejemplo, lo primero que se hace es preguntar a los participantes qué entienden ellos por pendiente de una recta; como resultado de sus respuestas suelen aparecer para la educación básica, como mínimo, los cuatro significados de la siguiente tarea que se les propone a continuación:

Tarea: A continuación, tienes diferentes significados de la pendiente de una recta y diferentes actividades. Asocia cada significado con la actividad que pone en juego este significado para su resolución (justifica la asociación).

Significados:

a) Significado geométrico: la pendiente determina la inclinación de la recta

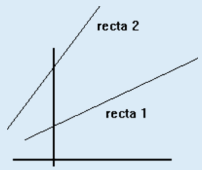
b) Significado trigonométrico: la pendiente es la tangente del ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje de abscisas.

c) Significado algébrico: el número que multiplica a la x en la fórmula $y = mx + n$

d) Significado funcional: el aumento de la variable dependiente por unidad de la variable independiente.

Actividades:

Actividad 1. ¿Cuál de las rectas siguientes tiene más pendiente?



Actividad 2. ¿Cuál es la pendiente de la recta y = 4x + 5?

Actividad 3. Dibuja el gráfico de la función y = 5x + 1 y di si son correctos o no los comentarios de los siguientes estudiantes:

Juan: Si nos situamos en un punto cualquiera de la recta y nos desplazamos una unidad hacia la derecha, después nos tenemos que desplazar 5 unidades hacia arriba en vertical hasta volver a tocar la recta.

Alba: Si nos situamos en un punto cualquiera de la recta y nos desplazamos una unidad hacia la derecha, nos tenemos que desplazar 5 unidades hacia abajo en vertical hasta tocar la recta.

José: Si nos situamos en el origen de coordenadas y nos desplazamos cinco unidades hacia la derecha, nos tenemos que desplazar 1 unidad hacia arriba en vertical hasta tocar la recta.

Ana: Si nos situamos en un punto cualquiera de la recta y nos desplazamos dos unidades hacia la derecha, después nos tenemos que desplazar 10 unidades hacia arriba en vertical hasta tocar la recta.

Alberto: Si nos situamos en el punto de corte de la recta con el eje de ordenadas y nos desplazamos 3 unidades hacia la derecha, después nos tenemos que desplazar 15 unidades hacia arriba en vertical hasta tocar la recta.

Laura: Si nos situamos en un punto cualquiera de la recta y nos desplazamos un número de unidades en horizontal, para volver a tocar la recta nos tenemos que desplazar 5 unidades hacia arriba por cada unidad de desplazamiento horizontal.

Actividad 4. Halla la pendiente de una recta que forma un ángulo de 45° con la parte positiva del eje abscisas.

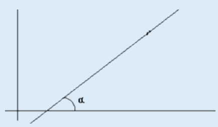


Figura 8. Tarea sobre los diferentes significados del objeto matemático pendiente. Nota: Calle, Breda y Font, en prensa.

En la puesta en común sobre la resolución de esta tarea se hace hincapié en que cada problema exige poner en funcionamiento un tipo de significado parcial de la pendiente diferente. Además, la otra cara de la moneda de la competencia en el uso de la noción de pendiente en la resolución de una variedad de problemas era la enseñanza de sus diferentes significados (Leinhardt et al, 1990). Se trata de que los participantes pasen de un punto de vista ingenuo y optimista, que presupone que el alumno fácilmente realizará la transferencia del conocimiento matemático generado en un solo contexto a otros contextos nuevos y diferentes, a otro punto de vista más prudente. En este último punto de vista, si bien se considera que la posibilidad de transferencia creativa se puede dar, se asume que, sin un trabajo sobre una muestra representativa de la complejidad del objeto matemático que se quiere enseñar y la articulación y conexión de los componentes de dicha complejidad, es difícil que se pueda aplicar el objeto matemático a diferentes contextos.

De esta manera, cada CID se va desglosando en componentes (Tabla 4) e indicadores, (Sánchez et al., 2021; Godino, 2013). En Breda et al. (2017) se presenta una rúbrica con indicadores para cada componente.

Criterio de Idoneidad	Componente
Epistémico	(IE1) Errores, (IE2) Ambigüedades, (IE3) Riqueza de procesos, (IE4) Representatividad
Cognitivo	(IC1) Conocimientos previos, (IC2) Adaptación curricular a las diferencias individuales, (IC3) Aprendizaje, (IC4) Alta demanda cognitiva
Interaccional	(II1) Interacción docente-discente, (II2) Interacción entre discentes, (II3) Autonomía, (II4) Evaluación formativa
Mediacional	(IM1) Recursos materiales, (IM2) Número de estudiantes, horario y condiciones del aula, (IM3) Tiempo
Afectivo	(IA1) Intereses y necesidades, (IA2) Actitudes, (IA3) Emociones
Ecológico	(IEC1) Adaptación al currículo, (IEC2) Conexiones intra e interdisciplinares, (IEC3) Utilidad sociolaboral, (IEC4) Innovación didáctica

Tabla 4. Criterios y componentes de idoneidad.
Nota: Basado en Breda et al., 2017.

Se termina este paso resaltando que:

– el constructo CID pretende ofrecer al profesor una pauta para orientar el diseño y rediseño de su práctica docente,
– los profesores los pueden usar como pauta para organizar su práctica,

– los criterios de idoneidad se consideran como normas que son principios, en lugar de normas que son reglas.

Se pone el énfasis en este tercer aspecto, es decir, los criterios de idoneidad si bien son normas, no son reglas que operan de la manera todo o nada (se aplican o no se aplican, se siguen o no se siguen). De esta manera, la idoneidad se puede entender como la calidad relativizada y condicionada por el contexto y el juicio del profesor.

i) El siguiente paso es que los participantes usen los CID como pauta para reflexionar sobre la implementación de una secuencia didáctica y hagan propuestas de mejora en su rediseño. Por ejemplo, en un Máster de Formación de Profesores de Secundaria de Matemáticas de España, los futuros profesores utilizan los CID para valorar su propia práctica, en concreto la unidad que han diseñado e implementado. En su TFM, los futuros profesores escriben comentarios de tipo valorativo que se relacionan con los diferentes componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica. Se trata de una valoración que ha hecho el futuro profesor y que ha sido triangulada con su tutor. Por otra parte, posteriormente en la presentación oral de su valoración ante el tribunal del TFM hay una segunda triangulación. Tres ejemplos dónde se puede ver el tipo de reflexiones que hacen los participantes en este máster se pueden consultar en Font, Breda y Pino-Fan (2017), Ledezma et al. (2021) y Sánchez et al. (2021).

Parte b- acceso a la formación docente: El proceso de iniciación a la docencia

El modelo vinculado al desarrollo del conjunto de prácticas que configuran la práctica de enseñar matemáticas sobre el que es posible articular la formación inicial aporta elementos para proporcionar al profesor/a principiante orientación y tutorización adicionales. En particular, define la necesidad de articular espacios institucionales para apoyar el acceso a la profesión en el que generar *procesos de reflexión en la práctica* a partir de la problematización de aspectos particulares de la enseñanza de las matemáticas (potenciando la reflexión sobre la tarea de enseñar matemáticas y poder mejorarla). Estos espacios institucionales deberían permitir hacer visibles los razonamientos vinculados a la realización de las prácticas profesionales específicas usando conocimiento de Didáctica de la Matemática. De esta manera, la sinergia entre conocer y hacer en contextos de la práctica adquiere todo su sentido. El acceso a la profesión docente a través de la adaptación de modelos usados en otras profesiones puede caracterizar la transición desde la formación inicial al desempeño pleno de la formación. Este modelo implica la necesidad de identificar centros escolares e institutos de referencia y tutores de apoyo, que puedan constituir *unidades docentes* para los profesores principiantes. Los programas de inducción a la docencia deberían articularse estableciéndose contextos colaborativos entre docentes en ejercicio y formadores de profesores. Este modelo permitiría establecer la comunicación directa entre investigación y práctica favoreciendo los contextos de innovación educativa al apoyarse en la visibilidad de los procesos de razonamiento vinculados al desarrollo de las prácticas profesionales específicas de enseñar matemáticas. Ejemplos de estas iniciativas son propuestas de desarrollo profesional en el contexto de investigaciones colaborativas y aproximación al uso de "Lesson Study" que ya han empezado a articularse desde el ámbito de la Didáctica de la Matemática (ejemplos de estas iniciativas son descritos en la siguiente sección). De esta manera, se establece el continuo entre la formación inicial, articulada a través del aprendizaje de prácticas profesionales específicas y procesos de razonamiento vinculados a dichas prácticas, y el establecimiento de contextos de apoyo para los maestros y profesores principiantes construidos desde las mismas referencias que la formación inicial. Los procesos de selección deben por tanto asegurar que la sinergia entre conocer y hacer (el logo y la praxis) sea concebido de manera integral y no como partes aisladas para favorecer el proceso de introducción a la docencia de manera gradual.

Parte c- desarrollo profesional

La formación permanente debe concebirse desde las referencias de las competencias docentes específicas y por tanto como una manera de potenciar los procesos de mejora de la práctica de enseñar matemáticas. En esta sección se describen dos ejemplos, uno basado en la creación de contextos colaborativos entre profesores de diferentes niveles educativos y otro considerando la posible adaptación de iniciativas desarrolladas en otros contextos como *Lesson Study*. Estas ejemplificaciones de formas de desarrollo profesional permiten generar procesos vinculados a la práctica real de la enseñanza de las matemáticas desarrollada en el aula como una manera de aprender a problematizar la propia práctica como una manera de mejorarla. Los ejemplos de desarrollo profesional descritos a continuación, como dos modalidades diferentes de formación de profesorado, son los espacios en los que los profesores pueden empezar a dotar de significado al carácter competencial de los nuevos currículos y son ejemplos que permiten particularizar propuestas de formación dual (mediante la colaboración entre las Facultades de Educación y los centros educativos). Estas aproximaciones al desarrollo profesional subrayan la relevancia de la especificidad de la enseñanza de las matemáticas en la implementación de formación dual (universidad-centro educativo) y como una forma de dar respuestas a las necesidades reales de los profesores y de los Centros educativos. Esta situación implica la necesaria articulación de comunidades de práctica (grupos de docentes de diferentes niveles compartiendo objetivos de mejora y recursos) como contexto de desarrollo profesional.

C.1. Desarrollo profesional en el contexto de investigaciones colaborativas

La necesidad de que haya una formación inicial para que los aspirantes a docentes puedan desarrollar conocimientos y competencias para la profesión es incuestionable. ¿Qué ocurre, sin embargo, con el profesorado en ejercicio? ¿Ha completado con su formación inicial el desarrollo de las competencias necesarias? ¿Éstas mejoran con la propia práctica? ¿O hace falta un enfoque formativo explícito para mejorar su formación?

Parece obvio que la formación inicial es insuficiente para construir las habilidades necesarias para enseñar. La complejidad de la tarea de enseñar matemáticas, requiere de un bagaje de conocimientos amplio y sólido, así como de diferentes competencias. Si bien la propia práctica de enseñar es un terreno de aprendizaje potencial de estas necesidades, la experiencia en sí misma no asegura un buen profesor o un profesor experto (Rojas et al., 2012). Se requiere reflexionar sobre la práctica y actualización, lo que conlleva la necesidad de una formación continua. Cuando nos referimos a la mejora en la competencia profesional del profesor en ejercicio, en nuestro caso que enseña matemáticas, hablamos de desarrollo profesional del profesor.

La investigación colaborativa en la formación del profesorado en ejercicio consiste en un grupo de profesores investigando conjuntamente sobre la práctica. Esto supone embarcarse en un proceso cíclico de formulación de cuestiones, diseño, experimentación y análisis. El grupo consensua los objetivos y une sus esfuerzos para alcanzarlos. Un grupo colaborativo de estas características puede ser entendido como una "comunidad de indagación" (Jaworski, 2003), donde sus miembros aprenden sobre la enseñanza a través de la indagación sobre la misma.

En los grupos de investigación colaborativa de profesores en ocasiones se integran otros profesionales relacionados con la enseñanza, como formadores de profesores e investigadores. Esto permite relacionar la teoría con la práctica, de modo que las reflexiones del grupo se pueden nutrir de forma más natural de resultados teóricos de la investigación, pudiendo ganar en profundidad, y, por otro lado, los formadores e investigadores se acercan a situaciones reales de aula. A continuación, vamos a mostrar un ejemplo de un grupo de investigación colaborativa constituido por profesores e investigadores, para reflexionar después sobre las posibilidades de la investigación colaborativa para el desarrollo profesional del profesor en relación con la enseñanza de las matemáticas.

Un grupo de investigación colaborativa para aprender sobre la gestión de las tareas matemáticas

En este apartado vamos a mostrar la actividad de un grupo de profesores y formadores de profesores que venimos desarrollando investigación colaborativa desde hace algo más de dos décadas, compuesto por maestras de Educación Infantil y Educación Primaria, profesores de Secundaria, estudiantes para maestro y formadores de profesores que son a su vez investigadores en Educación Matemática. Este trabajo muestra resultados del Proyecto *Resolución de problemas de matemáticas a partir de la formulación de problemas y el planteamiento de cuestiones* (PIV 037-19), financiado por la Junta de Andalucía en su convocatoria de Proyectos Educativos.

La finalidad compartida del grupo es promover el desarrollo profesional de todos sus miembros a través de la reflexión sobre la resolución de problemas en el aula de matemáticas. Además, nos interesa relacionar la enseñanza de las matemáticas en distintos niveles educativos, de modo que nuestra mirada, tanto como profesores como formadores, pueda tener una cierta panorámica. Por eso, para hacer operativa la finalidad del grupo, en cada proyecto, de dos años de duración, nos centramos en un contenido matemático y nos valemos de herramientas teóricas que apoyen nuestra reflexión.

Por ejemplo, nos planteamos seguir indagando sobre la gestión por parte del profesor de la resolución de problemas en el aula. Para concretar el análisis de dicha gestión, nos valimos de la idea de "demanda cognitiva" de una tarea. Atendiendo a dicha demanda se pueden diferenciar tareas de distintos niveles (Smith y Stein, 1998; Arce et al., 2019) (Tabla 5).

Tabla 5. Tareas de diferente nivel de demanda cognitiva

Memorización	• Reproducción de definiciones, hechos o fórmulas aprendidas • Con propósito claro, sin ambigüedades • No existe conexión con los conceptos o significados subyacentes
Procedimientos sin conexión	• Algorítmicas, reclaman claramente la utilización de un procedimiento • Énfasis en la respuesta correcta, más que en la comprensión • No solicitan explicaciones, si acaso la descripción del procedimiento
Procedimientos con conexión	• Centradas en la comprensión de conceptos e ideas matemáticas • Sugieren pautas explícita o implícitamente, procedimientos generales conectados con el significado de un concepto o sus representaciones • Requieren establecer relaciones con ideas conceptuales subyacentes
Producir matemáticas	• Requieren de un pensamiento complejo y de autorregulación • No sugieren camino a seguir • Comprensión y exploración de conceptos, procesos y relaciones matemáticas

En el contexto de investigación colaborativa para apoyar el desarrollo profesional que describimos estamos interesados en el diseño, implementación y gestión de tareas de alta demanda cognitiva, que permiten *producir matemáticas* (último nivel de la Tabla 1) y que identificamos con la resolución de problemas, al enfrentarse el alumno a una situación no familiar que requiere la aplicación significativa (no mecánica) de conocimiento matemático. Además, basándonos en lecturas sobre la gestión de tareas de alta demanda cognitiva (Stein y Smith, 1998), diseñamos en el grupo una guía que nos permitiera orientar y analizar dicha gestión. En esta se diferencian dos momentos de reflexión:

- En la fase de planificación de la tarea, identificamos su finalidad y conocimientos previos requeridos, su demanda cognitiva, así como las dificultades que prevemos y ayudas que mantengan la alta demanda cognitiva.
- Tras la implementación de la tarea, reflexionamos sobre la gestión del profesor, la tarea y sus resultados. En relación con la implementación nos preguntamos, entre otras cuestiones:
  ¿Se han proporcionado ayudas que mantengan la demanda cognitiva de la tarea?
  ¿Se presentan resoluciones de distinto nivel?
  ¿Se pone el énfasis en las resoluciones y no sólo en los resultados?
  ¿Se pide a los alumnos que expliquen y justifiquen sus ideas?
  ¿Se establecen conexiones entre los contenidos que surgen y previos?
- Finalmente, estudiamos si los estudiantes han hecho matemáticas y si se ha mantenido o no la demanda cognitiva de la tarea y por qué.

Con el objetivo de seguir profundizando en nuestra comprensión del uso de tareas de alta demanda cognitiva y su gestión, en el proyecto PIV 037-19 diseñamos conjuntamente una sesión para introducir la idea de par e impar como una propiedad numérica, a través de la observación de regularidades, en primero de Educación Primaria (la mostramos parcialmente en la Figura 9), que fue implementada durante el primer trimestre.

En el análisis previo de la tarea, esperábamos que los alumnos establecieran conjeturas, argumentaran si eran ciertas o no, o las refutaran. En ese sentido, discutimos la demanda cognitiva de la tarea, concluyendo que se situaba entre los dos niveles de mayor demanda cognitiva. Por un lado, propicia la comprensión y exploración de conceptos, procesos y relaciones matemáticas, y que los estudiantes conjeturen y argumenten (propio de "producir matemáticas"). Por otro lado, en algunas partes (sobre todo las dos primeras) sugiere procedimientos generales conectados con el significado de la idea de paridad y sus representaciones. La discusión en el grupo de la demanda cognitiva de la tarea puso en juego las concepciones e imágenes de la enseñanza de la matemática de sus miembros. Así, hay diferencias iniciales entre situarla claramente en el último nivel o ver elementos del penúltimo. Esta diversidad permite la reconsideración de las concepciones y un posible avance de las mismas.

NUMEROS PARES E IMPARES "Recoger, guardar y ordenar"

Primera parte (por parejas)
Cada pareja tendrá que guardar en dos cajas primero 10 objetos, luego, 9; 8; 7; 6; 5, 4; 3; 2 y 1. Dispondrán de una plantilla para registrar el resultado de cada reparto.
Puesta en común y registro en un mural (dos columnas: Números/Sí-No). A continuación, la maestra preguntará a los niños ¿qué pasa con el 11?, ¿y con el 12?

Segunda parte: ¿qué ocurre con otros números?
A cada niño se le da una tarjeta con un número (del 1 al 24) que debe decidir si se puede repartir en dos grupos iguales poniendo una etiqueta de SÍ (en rojo) o de No (en azul). Una vez colocadas las etiquetas se dispondrán ordenados del 1 al 24 en círculo y se les pedirá qué observan.
La maestra colocará en el centro del círculo la tabla del 0 al 99 y rodeará los pares hasta el 24. Preguntará si hay que rodear o no otros números: ¿y el 35, y el 64? Pedirá números que se puedan repartir en dos partes iguales y que no.

Figura 9. Tarea para 1º de Educación Primaria

Tras observar la implementación, discutimos sobre la gestión por parte de la maestra, observando el vídeo de la implementación y seleccionando fragmentos que ilustren nuestras reflexiones. Así, en la implementación de la primera parte de la tarea, observamos que desde la primera actividad algunos niños establecían conjeturas. Es el caso del final de la puesta en común de la primera parte de la tarea, cuando la maestra cuestionaba sobre el 11 y el 12.

> E1: En el 10 le ponemos 1 y nos da 6 para él y 5 para mí. Y cuando pone dos más (o sea, 1 más) sería... 1 para él y otro para mí.
> M: Voy a intentar escribir lo que dice para aclararme. ¿En el diez qué pasaría?
> E1: Si al diez le sumamos uno da (10+1) da once (10+1=11). Y así no podría ser, porque quedan 6 para él y 5 para mí.
> M: ¿Ahora qué?
> E1: Si al once le ponemos uno (11+1=12), entonces sería uno para él y otro para mí.
> M: ¿Entonces sería qué?
> E1: Sería 6 para cada uno.
> M: Pues si es verdad...Muy bien. ¿Os parece? (pregunta al resto).

En la segunda parte de la tarea, cuando la maestra iba rodeando sobre la tabla del 0 al 9 (con 0 a 9 en la primera fila, 10 a 19 en la segunda…) los números pares del 1 al 24, un alumno observaba:

> E2: Ahí pasa como allí, debajo del 2, 12, toda la fila del 2 es Sí.
> M: ¿Y por qué crees tú eso?
> E2: Porque si pone debajo del 2 un 12 y es Sí, entonces tiene que ser
> M: ¿Alguien está de acuerdo?

El análisis conjunto de la sesión nos permitió identificar preguntas que suponen ayudas heurísticas (“y entonces qué” y “por qué”), que cuestionan sin aportar respuestas y ponen el énfasis en los procesos y argumentaciones, más que en los resultados. La maestra (a raíz del último diálogo reproducido) propicia que se relacione la situación actual (de pares e impares) con los números amigos (misma unidad) y familiares (misma decena), contenido que se ha trabajado previamente. La sesión observada nos permitió cuestionarnos si se presentaban resoluciones de diferentes niveles y cómo lo potenciaba la maestra, concluyendo que se presentaban sobre todo gracias al clima de participación que se propiciaba. En general, se mantiene la demanda cognitiva de la tarea cuando los alumnos en su mayor parte argumentan por qué un número es par o impar y, algunos generan conjeturas sobre regularidades. Identificamos como cuestiones de indagación futuras: cómo favorecer la presentación de resoluciones de alto nivel y el progreso hacia estas.

La investigación colaborativa como instrumento para desarrollo profesional

La formulación de cuestiones sobre la práctica, el diseño, la implementación y el análisis se nutren de las diferencias formativas y personales. En el diseño, la experiencia de los profesores y en particular del que implementará la actividad es primordial. En la implementación, las características de la práctica de cada profesor, que personaliza el diseño compartido, nos permiten reflexiones diferentes y crearnos distintas imágenes de la práctica. En el diseño de instrumentos de análisis de la práctica, los investigadores aportan elementos teóricos. Además, es fundamental el trabajo colaborativo. Así, por ejemplo, para la implementación, la maestra observada contaba con sugerencias de preguntas concretas (e.g. ¿qué pasa con el 11?), de recursos (la tabla del 0 al 99), de dificultades previstas que son fruto de la interacción entre los miembros.

El ejemplo anterior muestra una vía de formación continua del profesorado en relación con la enseñanza de las matemáticas. Apreciamos que se está produciendo desarrollo profesional porque comprendemos mejor en qué consiste una tarea matemática demandante y cómo podemos gestionarla, porque somos más conscientes de cuál es para nosotros la finalidad de la enseñanza de la matemática y de nuestra propia práctica y su mejora.

La formulación de cuestiones problemáticas relacionadas con la práctica de la enseñanza de la matemática, la inclusión de la planificación de tareas, la anticipación de sus resultados, su gestión y la reflexión sobre su implementación nos parecen elementos privilegiados en cualquier proceso de formación continua para la enseñanza de las matemáticas. Además, permite profundizar en el conocimiento matemático y sobre su enseñanza y aprendizaje.

La propuesta anterior podría trasladarse a entornos colaborativos de desarrollo profesional a mayor escala; por ejemplo, a un centro escolar. Estos grupos colaborativos podrían estar constituidos solo por profesores o por profesores con el asesoramiento de especialistas. La clave en este sentido puede estar en que el grupo colaborativo busque y construya (o adapte) herramientas para la reflexión. Si estas herramientas se fundamentan en la investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pueden posibilitar reflexiones más precisas y profundas. Es el caso de las caracterizaciones de tareas de diferentes niveles de demanda cognitiva y de las cuestiones para el análisis de la gestión de las tareas ejemplificados en el apartado anterior.

Es posible, además, que la investigación colaborativa aúne el desarrollo profesional de profesores en ejercicio con el de profesores en formación inicial. Es el caso del grupo colaborativo con el que hemos ejemplificado, en el que se integran estudiantes para maestro. Esto permite que los futuros profesores aprendan a problematizar la práctica, se establezcan puentes entre la formación académica y la práctica de aula, y tomen conciencia de la necesidad de formarse durante toda su trayectoria profesional.

C.2. Uso combinado de Lesson Study y los Criterios de Idoneidad Didáctica

El diseño de los ciclos formativos que pretenden enseñar el uso de los Criterios de Idoneidad Didáctica (CID) se basa en la suposición, observada en diversas investigaciones (Breda, 2020), de que los CID funcionan como regularidades en el discurso de los profesores, cuando estos tienen que diseñar y/o valorar secuencias didácticas orientadas a la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, incluso sin haberse enseñado a los futuros profesores el uso de esta herramienta para guiar su reflexión. Por tanto, se supone que, en las fases iniciales de estos ciclos formativos, los participantes formulan y usan de manera implícita algunos indicadores y componentes de los CID. Esta suposición ha funcionado como una regularidad en las diversas experiencias realizadas para enseñar los CID, pero en ellas se ha hecho evidente que esta fase inicial de reflexión no pautada es relativamente corta y que sería conveniente que fuese más amplia. Por otra parte, la metodología de los Lesson Study (LS), que es una aproximación al desarrollo profesional del profesor en el que un grupo de profesores colaboran para estudiar el contenido, la enseñanza y cómo los estudiantes piensan durante la clase, en cierta manera, se puede considerar como una fase de reflexión aunque poco pautada y muy amplia orientada a la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Por tanto, es de esperar que, en la fase de planificación, en la de observación, en la de reflexión y en la de rediseño orientada a la mejora, los participantes usen de manera implícita muchos de los indicadores y componentes de los CID para hacer valoraciones positivas de algunos aspectos de la experiencia realizada. Por tanto, en una experiencia de LS van a surgir consensos implícitos entre los participantes sobre aspectos que se valoran positivamente, los cuales se pueden reinterpretar en términos de indicadores y componentes de los CID (Hummes et al., 2019; Hummes et al., 2020). Dicho de otra manera, la metodología LS se puede convertir en un tipo de dispositivo de formación que favorece que algunos de los indicadores y componentes de los CID surjan como consensos de la reflexión del grupo de profesores, lo cual da pie a la ampliación del LS con un ciclo formativo que introduzca los indicadores, componentes y Criterios de Idoneidad Didáctica (de la misma manera en la que se ha descrito en el apartado anterior A.3)

Los dispositivos formativos que pretenden enseñar los CID también parten de la suposición de que éstos pueden ser enseñados como herramienta para organizar la reflexión del profesor y, por tanto, la mayor parte del ciclo formativo se dedica a implementar un proceso de enseñanza y aprendizaje de estas nociones con los participantes. En cambio, en los LS no se realiza este proceso de generación de una pauta organizada en criterios, componentes e indicadores como herramienta para organizar la reflexión. Por tanto, si la metodología LS puede ser muy útil para mejorar la fase inicial de la metodología de enseñanza de los CID, esta última puede ser una ampliación de la metodología LS para generar una pauta para organizar la reflexión del profesor.

En Hummes et al. (2019) se analiza en qué medida un ciclo formativo basado en el LS y los CID promueve la reflexión de profesores brasileños de matemáticas en ejercicio sobre el diseño, implementación, evaluación y rediseño de secuencias de tareas. En particular, se buscaba desarrollar la competencia de valoración de la idoneidad didáctica. Para ello, se diseñó e implementó un ciclo formativo que combinaba ambas metodologías. La estructura del ciclo formativo que permite combinar el LS con los CID es la siguiente: 1) Primera etapa: Lesson Study (LS); 2) Segunda etapa: Hacer observar a los participantes que en la fase del LS han usado de manera explícita o implícita algunos de los componentes e indicadores de los CID; 3) Tercera etapa: Enseñanza de los CID y 4) Cuarta etapa: Uso de los CID como herramienta metodológica que permite organizar y mejorar la reflexión realizada en la fase del LS, lo cual repercute en mejores propuestas de rediseño de la secuencia de tareas confeccionada en el LS.

Parte D- cuestiones transversales: dominio afectivo

Un aspecto que condiciona tanto la formación inicial como la calidad de la práctica de los docentes de matemáticas es el relacionado con los afectos que éstos experimentan hacia la materia. Desde hace varias décadas se viene investigando el alcance e impacto de los afectos negativos que algunos estudiantes para maestro experimentan al estudiar matemáticas. Cuando los niños empiezan su escolarización en los centros de Educación Infantil, su actitud hacia la matemática es positiva (Hidalgo et al., 2005), sin embargo, a lo largo de su trayectoria en Educación Primaria y Secundaria muchos de ellos desarrollan una actitud negativa hacia la materia (Mato, 2010). Esta actitud negativa condiciona en gran manera su desempeño y le lleva, incluso, a evitar su estudio (Ashcraft, 2002), llegando a condicionar sus oportunidades de futuro (Pérez-Tyteca, 2012). Una de las causas que se han reportado como principales en el desarrollo de este tipo de respuestas afectivas negativas es el modo en el que sus docentes les han enseñado matemáticas (Uusimaki y Nason, 2004). Peker (2016) concluye que una actitud negativa por parte de los maestros hacia las matemáticas interfiere en el desarrollo de competencias docentes fundamentales y puede transmitirse a sus alumnos, dificultando su aprendizaje y provocando en ellos apatía, desasosiego, miedo o angustia. Por este motivo es fundamental que los docentes de matemáticas posean una actitud positiva tanto hacia las matemáticas como hacia su enseñanza.

Son numerosos los trabajos que han analizado las actitudes hacia las matemáticas de los maestros en formación. A nivel nacional, algunos de ellos han comprobado que estos estudiantes conforman uno de los colectivos con mayor ansiedad hacia las matemáticas (Pérez-Tyteca, 2012). Por ello resulta fundamental incluir los aspectos afectivos en los planes de formación inicial. En este sentido, se han llevado a cabo algunas experiencias concretas con futuros maestros que se han mostrado efectivas para mejorar las actitudes hacia las matemáticas cuando los sujetos actúan como aprendices (Caballero et. al., 2016).

Respecto de las investigaciones sobre la actitud de los docentes cuando enseñan matemáticas, no existen tantos trabajos. Algunos de ellos han comprobado que, ante una situación improvisada de enseñanza en primaria, los futuros maestros se sienten inseguros, nerviosos, incómodos e incapaces de darle solución, pero pese a ello, consideran que serán buenos docentes de matemáticas (Pérez-Tyteca et al., 2012). Otras investigaciones indican que muchos futuros maestros dudan de su capacidad de enseñar y afirman que se sentirán inseguros cuando den clase de matemáticas, lo que refuerza la idea de que es primordial detectar e intervenir este tipo de ansiedad (Caballero et al., 2016; Peker, 2016). En esta línea, algunas investigaciones están proponiendo escalas para identificar fuentes de estrés y emociones en el profesorado de matemáticas de secundaria como una manera de proporcionar conocimiento de la dimensión afectiva y actitudinal (Gómez del Amo, 2017).

Una consecuencia de la información que aporta las investigaciones en este ámbito es la necesidad de abordar los aspectos afectivos en los planes de formación inicial de los docentes de matemáticas, así como acompañar sus emociones y actitudes cuando pasan a la práctica real. Esta labor es fundamental para mejorar la calidad de la enseñanza y conseguir formar maestros y profesores de Educación Secundaria seguros, capaces y que disfruten enseñando matemáticas.

Algunas ideas finales

La investigación en Didáctica de la Matemática proporciona evidencias basadas en la investigación y desarrollo que permiten materializar propuestas de formación docente basadas en un marco de competencias profesionales docentes. Dos ideas son claves en este proceso. Por una parte, la identificación de diferentes prácticas profesionales específicas que configuran la práctica de enseñar matemáticas (como ejemplos de competencias profesionales docentes específicas): interpretar respuestas de estudiantes para tomar decisiones de acción, analizar tareas como favorecedoras de oportunidades de aprendizaje, planificar la enseñanza, reflexionar para rediseñar las propuestas didácticas, etc. Por otra, la identificación del conocimiento que se activa en la realización de estas prácticas profesionales específicas que se considera conocimiento profesional que debe poseer un docente de matemáticas y que procede de las investigaciones en Didáctica de la Matemática. Este conocimiento es el que puede orientar la práctica profesional del profesor: conocimiento sobre trayectorias de aprendizaje de los conceptos matemáticos, conocimiento sobre las oportunidades de aprendizaje que proporcionan las tareas matemáticas, y el papel de las oportunidades que se pueden generar a partir de la identificación de los errores y dificultades y considerando las expectativas de aprendizaje; y conocimiento sobre criterios de idoneidad para analizar la enseñanza de las matemáticas para proponer rediseños. La sinergia entre la noción de prácticas profesionales específicas y conocimiento que las articula es el núcleo sobre el que se apoya la noción de competencia profesional docente sobre el que se puede articular la formación inicial y la iniciación a la docencia basada en el aprendizaje en la práctica.

De esta manera se da respuesta a dos demandas en las propuestas realizadas para la formación docente articulada a través de un modelo de competencias profesionales docentes. Por una parte, centradas en describir, interpretar y explicar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (procesos orientados por la teoría), y en segundo lugar, en proporcionar criterios y referencias a ser usadas para orientar los procesos de razonamiento que deben apoyar la práctica de enseñar matemáticas. Esta sinergia entre prácticas profesionales específicas y los conocimientos que apoyan dichas prácticas, no puede olvidar la dimensión afectiva que puede condicionar el desarrollo de las competencias docentes profesionales. Los descriptores de la sinergia entre competencia específica y conocimiento especializado generado por las investigaciones en Didáctica de la Matemática sobre el aprendizaje y práctica de los maestros y profesores de matemáticas nos están proporcionando en estos momentos información necesaria sobre los niveles de desarrollo competencial.

Las propuestas de entornos de aprendizaje, ciclos formativos y propuestas de tipologías de tareas en los programas de formación, nos permiten asumir que se están proporcionando los mimbres para poder urdir propuestas de programas de formación docente (inicial y continua) tanto para maestros como para profesores de Educación Secundaria que pueden permitir formar a los docentes que nuestra sociedad necesita en estos momentos. Finalmente, las propuestas de desarrollo profesional inciden en la idea de la reflexión sobre la propia práctica (Lesson Study y contextos de investigaciones colaborativas) y en el necesario uso de referencias teóricas procedentes de la Didáctica de la Matemática para organizar la reflexión.

Reconocimientos

Las aportaciones de Ceneida Fernández, Mar Moreno y Patricia Perez-Tyteca se han realizado con el apoyo del proyecto PID2020-116514GB-I00. La aportación de José Luis Lupiáñez y Juan Francisco Ruiz-Hidalgo se ha realizado con el apoyo del proyecto PID2021-128261NB-I00. La aportación de Nuria Climent se ha realizado con el apoyo del proyecto RTI2018-096547-B-100. La aportación de Adrian Breda, Alicia Sánchez y Vicenç Font se ha realizado don el apoyo del proyecto PGC2018-098603-B-I00.

Referencias

Arce, M., Conejo, L. y Muñoz-Escolano, J. M. (2019). *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*. Síntesis.

Ashcraft, M. H. (2002). Math anxiety: Personal, educational, and cognitive consequences. *Current Directions in Psychological Science, 11*(5), 181-185.

Badillo. E., Climent, N., Fernández, C. y Gónzalez, M.T. (Eds.), (2019). *Investigación sobre el profesor de Matemáticas: Prácticas de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional*. Ediciones Universidad de Salamanca.

Breda, A. (2020). Características del análisis didáctico realizado por profesores para justificar la mejora en la enseñanza de las matemáticas. *Bolema*, *34*(66), 69-88. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a04

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. R., (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica, *Bolema*, *32*(60), 255-278. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

Breda, A., Pino-Fan, L. R. y Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for The Reflection and Assessment on Teaching Practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *13*(6), 1893-1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Brown, L., Fernández, C., Helliwell, T. y Llinares, S. (2020). Prospective mathematics teachers as learners in university and school contexts. From university-based activities to classroom practice. En G. M. Lloyd y O. Chapman (Eds), *International Handbook of Mathematics Teachers Education: Volume 3. Participants in Mathematics Teacher Education* (pp. 343-366). Brill/Sense.

Buchbinder, O. y Kuntze, S. (2018). Mathematics Teachers Engaging with representations of practice. *ICME-13 Monographs. A Dynamically Evolving Field.* Springer.

Caballero, A., Cárdenas, J. y Gordillo, F. (2016). La intervención en variables afectivas hacia las matemáticas y la resolución de problemas matemáticos. El MIRPM. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 75-91). SEIEM.

Cai, J., Morris, A., Hohensee, C., Hwang, S., Robison, V. y Hiebert, J. (2017). Clarifying the impact of educational research on learning opportunities. *Journal for Research in Mathematics Education, 48*(3), 230-236.

Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Montes, M. A., Escudero-Ávila, D. I. y Flores-Medrano, E. (coord.) (2016). *Didáctica de las Matemáticas para maestros de Educación Primari*a. Paraninfo.

Carroll, J. B. (1963). A model of school learning. *Teachers College Record, 64*(8), 723–733.

Castro, E. (coord.)(2001). *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria.* Síntesis

Chamorro, M.C. (coord.). (2003). *Didáctica de la Matemática para Primaria.* Pearson-Prentice Hall

Clarke, M. y Gregory, K. (2003). Projects: tracking practices, opportunities to learn, and achievement in mathematics: An international perspective from TIMSS. *Journal of Mathematics Teacher, 96*(7), 526.

DBRC (The Design Based Research Collective) (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher, 32(*1), 5-8.

Edgington, C., Wilson, P. H., Sztajn, P. y Webb, J. (2016). Translating learning trajectories into useable tools for teachers. *Mathematics Teacher Educator, 5*(1), 65-80..

Fernández, C. y Choy, B. H. (2019). Theoretical lenses to develop mathematics teacher noticing. Learning, Teaching, Psychological, and social perspectives. En S. Llinares, y O. Chapman (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education: volume 2. Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (Second Edition) (pp. 337-360). Brill/Sense.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M.L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. AIEM. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 13,* 39-61.

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., Flores, P., Castro-Rodríguez, E., Segovia. I., Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2019). Identificación de errores escolares en matemáticas por maestros en formación. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 293-302). SEIEM.

Floden, R. (2002). The measurement of opportunity to learn. En A. C. Porter y A. Gamoran (Eds.), *Methodological Advances in Cross-National Surveys of Educational Achievement* (pp. 231–266). National Academy Press.

Flores, P. y Lupiáñez, J. L. (2016). Expectativas de aprendizaje. En L. Rico y A. Moreno (Coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 177-193). Pirámide.

Font, V., Breda, A. y Pino-Fan, L. (2017). Análisis didáctico en un trabajo de fin de máster de un futuro profesor. En J. M. Múñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 247-256). SEIEM.

Font, V., Breda, A. y Seckel, M. J. (2017). Algunas implicaciones didácticas derivadas de la complejidad de los objetos matemáticos cuándo estos se aplican a distintos contextos. *Revista brasileira de ensino de ciência e tecnologia*, *10*(2), 1-23. https://doi.org/10.3895/rbect.v10n2.5981

Font, V., J., Vanegas, Y., Ferreres, S., Carvajal, S. y Adán, M. (2012). Funciones**.** En V. Font, J. Giménez, V. Larios y J. F. Zorrilla (Eds.), *Competencias del profesor de matemáticas de secundaria y bachillerato* (133-210). Publicaciones de la Universitat de Barcelona.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, 11*, 111-132.

GIDIMAT-UA (2021). Aprendiendo a ser maestro: Algunas perspectivas desde la Educación matemática. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *10*(1), 45-62.

Goméz del Amo, R. (2017). *Fuentes de estrés y emociones en el profesorado de matemáticas de secundaria.*

Validación de una escala de elaboración propia. Tesis doctoral inédita, Universdidad de Extremadura, https://redined.educacion.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/208663/TDUEX_2017_Gomez_del_Amo.pdf?sequence=1

Gorgorio, N., Albarracin, Ll., Laine, A. y Llinares, S. (2021). Primary education degree programs in Alicante, Barcelona and Helsinki: Could the differences in the mathematical knowledge of incoming students be explained by the Access criteria? *LUMAT General Issues, 9*(1), 174-207, https://doi.org/10.31129/LUMAT.9.1.1468

Hidalgo, S. Maroto, A. y Palacios, A. (2005). El perfil emocional matemático como predictor de rechazo escolar: Relación con las destrezas y los conocimientos desde una perspectiva evolutiva. *Educación Matemática, 17*(2), 89-116.

Hummes, V., Breda, A. y Font, V. (2019). Critérios de adequação didática implícitos na reflexão de professores quando planejam, implementam e redesenham uma aula em uma experiência de *Lesson Study*. En. A. Richit, J, P. da Ponte y E. S. Gómez (Eds.), *Lesson Study na formação inicial e continuada de professores*. Livraria da Física.

Hummes, V. B., Breda, A. y Seckel, M. J. (2019). Idoneidad didáctica en la reflexión de profesores: análisis de una experiencia de estudio de clases. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 381-390). SEIEM.

Hummes, V. B., Breda, A., Seckel, M. J. y Font, V. (2020). Criterios de Idoneidad Didáctica en una clase basada en el Lesson Study. *Praxis y Saber: Maestría en Educación,11*(26), e10667. https://dx.doi.org/10.19053/22160159.v11.n26.2020.10667

Jacobs, V., Lamb, L. y Philipp, R. (2010). Professional Noticing of Children's Mathematical Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Jaworski, B. (2003). Research practice into/influencing mathematics teaching and learning development: Towards a theoretical framework based on co-Learning Partnerships. *Educational Studies in Mathematics*, *54*, 249–282.

Ledezma, C., Sala, G., Breda, A. y Sánchez, A. (2021). Analysis of a preservice teacher's reflection on the role of mathematical modelling in his master's thesis. En M. Inprasitha, N. Changsri y N. Boonsena (Eds.), *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 195-204). PME.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research, 60*(1), 1-64.

Llinares, S. y Fernández, C. (2021). Mirar profesionalmente la enseñanza de las matemáticas: características de una agenda de investigación en Didáctica de la Matemática. *La Gaceta de la RSME, vol. 24,* nº 1, 185-205.

Lo, J. y Wheatley, G. H. (1994). Learning opportunities and negotiating social norms in mathematics class discussion. *Educational Studies in Mathematics, 27*(2), 145-164.

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada.

Mason, J. (2002). *Reseraching your own practice: the discipline of noticing*. Routledge.

Mato, M. D. (2010). Mejorar las actitudes hacia las matemáticas. *Revista Galego-Portuguesa de Psicología e Educación, 18* (1), 19-32.

McDonnell, L. M. (1995). Opportunity to learn as a research concept and a policy instrument. *Educational Evaluation and Policy Analysis, 17*(3), 305-322.

McLaughlin, M. W. y Shepard, L. A. (1995). *Improving education through standards-based reform*. The Nacional Academy of Education.

Peker, M. (2016). Mathematics teaching anxiety and self-efficacy beliefs toward mathematics teaching: A path analysis. *Educational Research and Reviews, 11*(3), 97-104.

Pérez-Tyteca, P. (2012). *La ansiedad matemática como centro de un modelo causal predictivo de elección de carreras* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, España.

Pérez-Tyteca, P., Gómez, B. y Monje, J. (2012). Reacciones afectivas de futuros maestros al enfrentarse como docentes a la resolución improvisada de un problema aritmético de porcentajes. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2012* (pp. 159-167). Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.

Planas, N. (2014). One speaker, two languages: Learning opportunities in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *87*(1), 51-66.

Praetorius, A. K. y Charalambous, C.Y. (2018). Classroom observation frameworks for studying instructional quality: looking back and looking forward. *ZDM Mathematics Education,* 50, 535–553. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0946-0

Raizen, S. A y Jones, L. V. (1985). *Indicators of precollege education in science and mathematics: A preliminary review*. National Academy Press.

Remillard, J. T. (2018). Examining teachers' interactions with curriculum resource to uncover pedagogical design capacity. En L. Fan, L. Trouche, C. Qi, S. Rezat, y J. Visnovska (Eds.), *Research on mathematics textbooks and teachers' resources* (pp. 69-88). Cham, Suiza: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73253-4_4

Rico, L. (1998). Errores en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación Historia* (pp. 69-108). Una empresa docente.

Rojas, N., Carrillo, J. y Flores, P. (2012). Características para identificar a profesores de matemáticas expertos. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 479 - 485). SEIEM.

Ruiz-Hidalgo, J. F. y Rico, L. (2016). Oportunidades para el aprendizaje. En L. Rico y A. Moreno (Coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 209-224). Pirámide.

Sánchez, A., Font, V. y Breda, A. (2021). Significance of creativity and its development in mathematics classes for preservice teachers creativity. *Mathematics Education Research Journal*. https://doi.org/10.1007/s13394-021-00367-w

Scherff, L. y Piazza, C. L. (2008). Why Now, More Than Ever, We Need to Talk About Opportunity to Learn. *Journal of Adolescent and Adult Literacy*, *52*(4), 343–352.

Schmidt, W., Cogan, L. y Solorio, M. L. (2017). The Missing Link—Incorporating Opportunity to Learn in Educational Research Analyses. In JW. Son, T. Watanabe y JJ. Lo (Eds.), *What Matters? Research Trends in International Comparative Studies in Mathematics Education* (pp. 411-418). Springer, Cham.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145.

Stevens, F. I. y Grymes, J. (1993). *Opportunity to learn: Issues of equity for poor and minority students*. National Center for Education Statistics.

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Peck, R. y Rowley, G. (2008). *Teacher education and development study in mathematics (TEDS-M): policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics. Conceptual framework*. Michigan State University.

Törnroos, J. (2005). Mathematics textbooks, opportunity to learn and student achievement. *Studies in Educational Evaluation*, *31*, 315-327.

Smith, M. S. y Stein, M. K. (1998). Reflections on practice: Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics teaching in the middle school*, *3*(5), 344-350.

Stein, M. K. y Smith, M. S. (1998). Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*(4), 268-75.

Uusimaki, L. y Nason, R. (2004). Causes underlying pre-service teachers' negative beliefs and anxieties about mathematics. En In M. Høines y A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 369-376). Bergen University College.

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H. y Houang, R. T. (2002). *According to the Book. Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Kluwer Academic Publishers.

Williams, D., Cudd, M., Hollebrands, K. y Lee, H. (2020). Beginning high school teachers' organization of students for learning and methods for teaching Mathematics. *PNA, 15*(1), 51-68.

Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática

El documento presentado es una aportación, desde la investigación en educación matemática realizada en el seno de la SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA (www.seiem.es), al desarrollo de la nueva propuesta curricular y sobre la formación del profesorado de matemáticas. Su contenido refleja tanto cuestiones generales sobre la educación matemática como concretas de los diferentes organizadores del currículo (como sobre los objetivos, contenidos, metodología y evaluación, asumiendo la perspectiva adoptada en relación a las competencias generales y específicas, y otros elementos derivados de la interacción entre aspectos cognitivos, afectivos, socio-culturales y valores propios de la sociedad actual). Deseamos que los temas tratados puedan ser útiles al profesorado en su actividad profesional, tanto para generar actividades de aula como para poder avanzar en su formación personal como profesores de matemáticas.

SEIEM
SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

eug EDITORIAL UNIVERSIDAD DE GRANADA

ISBN 978-84-338-7038-4
9 788433 870384