

Enric Trillas

DIVAGACIONES
SOBRE PENSAR Y RAZONAR



GRANADA
2021

© ENRIC TRILLAS

© UNIVERSIDAD DE GRANADA

Campus Universitario de Cartuja

Colegio Máximo, s.n., 18071, Granada

Telf.: 958 243930-246220

Web: editorial.ugr.es

ISBN: 978-84-338-6809-1

Depósito legal: Gr./314-2021

Edita: Editorial Universidad de Granada

Campus Universitario de Cartuja. Granada

Fotocomposición: María José García Sanchis. Granada

Diseño de cubierta: Josemaría Medina Alvea. Granada

Imprime: Printhauss. Bilbao

Printed in Spain

Impreso en España

Prólogo	9
I. Prefacio	17
II. El pensamiento dirigido, ¿Un sistema relacional?	21
III. Inciso: Noticia del ‘Esqueleto’	31
IV. Más sobre razonar y pensar.	43
V. Reflexiones sobre las fronteras del pensamiento	49
VI. El esqueleto, ¿Merece atención filosófica?	69
VII. Sobre el razonamiento sin medibilidad y con metáforas. .	81
VIII. Razonamiento e indagación	101
IX. Inferencia, creatividad y continua lingüísticos	113
X. Por una ciencia empírica del razonamiento	123
XI. El control del razonamiento.	131
XII. Reflexiones ingenuas acerca de la causalidad.	143
XIII. Reflexiones ingenuas sobre la teleología.	153
XIV. Reflexión breve sobre la información	167
XV. Mi viaje a la <i>Galaxia Zadeh</i>	175
XVI. Mi viaje desde la lógica borrosa al razonamiento ordi- nario	195
XVII. Invitación a pensar vs. razonar.	207
XVIII. Un sermón	225
XIX. Conclusión final	235
Referencias comunes a los diversos capítulos	244

PRÓLOGO

Después de la Sociedad de la Información, la Sociedad del Conocimiento y la Sociedad Digital, la Inteligencia Artificial (IA) impregna nuestra vida y la célebre frase de Alan Turing (Mind LIX, 236, 1950): «Sólo podemos ver un poco del futuro, pero lo suficiente para darnos cuenta de que hay mucho que hacer» tiene plena vigencia, porque a pesar de todo lo conseguido en los últimos 70 o 75 años, cada día surgen nuevos problemas que nos plantean desafíos tan importantes como trascendentes para la humanidad, que demanda soluciones. No cabe perder el tiempo porque tanto a título personal como colectivo nos jugamos mucho: entre otras cosas ser dueños de nuestro destino.

Cabría pensar por tanto que en este contexto de urgencias, en el que la toma de decisiones acertadas es aún más trascendente que en otras ocasiones, divagar sobre como pensar y razonar no es pertinente. Nada más lejos de la realidad, porque no alcanzaremos nuestra meta mientras no conozcamos el punto de partida. Por eso, leer, comprender y aprender lo que contiene este libro es una buena metodología para intentar no cometer ni repetir errores y superarlos en aras del bien social.

Este año se han cumplido 100 años del nacimiento de L.A. Zadeh (1921-2017), creador del concepto de conjunto borroso así como de la teoría, metodologías y aplicaciones prácticas que a partir del mismo aparecen en todas las áreas de la Ciencia y la Tecnología. La definición de conjunto borroso se publicó por primera vez en 1965 (Inf. and Control, 8,3, 1965) y supuso toda una revolución en el planeta investigador, con detractores y defensores acérrimos del mismo, cuyas consecuencias y efectos beneficiosos para la humanidad aún no somos capaces de calcular, a pesar de los muchos logros alcanzados hasta la fecha.

A mediados de los 60, las comunicaciones no eran ni mucho menos tan fluidas como hoy día y las revistas que llegaban a nuestro país lo hacían con meses de retraso. Ni que decir de la demora de los artículos científicos. El hecho es que mientras en Berkeley la Teoría de Conjuntos clásica veía el nacimiento de un paradigma, en España, la noción de conjunto, con más de un siglo de antigüedad, se les presentaba a los estudiantes de bachillerato dentro de lo que entonces, quizás con cierto desprecio, aún se llamaba “Matemática Moderna”, explicándoles que: «Los conceptos de unidad y conjunto son conceptos primarios al espíritu humano: no se pueden descomponer en otros más sencillos. No se pueden, por tanto definir» (C. Marcos y J. Martínez: *Matemáticas de 5º*. Ediciones S.M. 1967).

Traigo ésta anécdota a colación para dar una pincelada del panorama que se vivía en aquel “solar patrio” de finales de los 60, en el que la investigación en Matemáticas, y no solo en Matemáticas, más que como una necesidad se entendía como una excentricidad a la que, como tal, no había que prestar demasiada atención. Estudiar Matemáticas, ni que decir investigar, era tan extraño que a quienes se decidían por ello se les consideraba personas raras.

En ese ambiente gris, exento de estímulos, de perspectivas, de medios y de referentes, muchos de ellos en el exilio, había no obstante excelentes matemáticos que con pasión, ilusión y vocación encendían las lámparas de la curiosidad en sus estudiantes que, convertidos en discípulos de aquellos maestros, se agrupaban en torno a ellos empezando a irradiar luz y consiguiendo, en muchos casos, que esa necesidad que sentían de adentrarse por terrenos desconocidos para saber el “porqué” de lo patente pero incomprensible, fuese compartida, respetada y admirada en sectores cada vez más amplios del mundo científico-académico de entonces.

Uno de aquellos “pioneros” es el autor del libro que tenemos entre manos: Enric Trillas, líder, maestro, compañero y amigo a quien tanto debo, de quien tanto he aprendido y sobre quien no voy a hacer aquí un panegírico, no por inmerecido sino por estar claramente fuera de lugar.

Enric Trillas fue quién introdujo en aquella España vacía de Ciencia los conjuntos borrosos y con su constancia, ilusión, rigor y ejemplo logró que unos pocos años después, y por supuesto en la actualidad, la comunidad española en torno a los conjuntos borrosos se convirtiera en referencia mundial, liderando la

producción científico-bibliográfica nacional e internacional y transitando, con el paso del tiempo y la evolución socio-económica que han supuesto los avances tecnológicos, desde el área de la Matemática a la de la IA, en la que el paradigma borroso y su primera derivada, la Computación con Palabras juegan un papel protagonista para poder reproducir el comportamiento humano.

Pero aunque lograr ese objetivo supone importantes mejoras y beneficios para la humanidad en todos los niveles y ámbitos sociales, de forma paralela al rechazo que en “la academia” tuvo la aparición del concepto de conjunto borroso, la IA también se percibe con muchas reticencias por una buena parte de la Sociedad. Lo que pasa ahora, a diferencia de lo que ocurrió con la aparición de la definición de conjunto borroso de L.A. Zadeh en 1965, es que esas sospechas y prevenciones tienen una mayor repercusión social porque, seguramente por no difundir correctamente la información, se cree que los sistemas basados en IA pueden limitar, cuando no sustituir por medio de programas completamente autónomos, la capacidad de actuar y de tomar decisiones de las personas.

El hecho crucial es que esa alteración de funciones podría producir, y además más pronto que tarde, cambios estructurales en la sociedad en su conjunto; pérdidas masivas de puestos de trabajo, y por tanto la minusvaloración y descalificación de las personas que los desempeñaban; efectos desconocidos en los sistemas que puedan gestionar de forma automática o situaciones de ingobernabilidad no deseadas. Por todo ello es muy importante que las cuestiones éticas, relativas al comportamiento de esos sistemas, deban incluirse en su diseño tecnológico, para facilitar que más que como amenazas, se entiendan como generadores de ayuda, innovación y progreso. Pero también es relevante que en caso de producirse esa sustitución de funciones, que la misma no produzca disfunciones, es decir, que el correspondiente sistema actúe exactamente igual que lo haría el decisor humano de turno, reproduciendo y mejorando su conducta y procurando evitar o minimizar los ineludibles e imprevisibles fallos que las personas podemos tener a la hora de tomar decisiones, sobre todo cuando éstas han de tomarse en ambientes desconocidos.

Sin embargo, incluso más importante que exigir el cumplimiento de estas condiciones, que sin género de dudas hay que imponer a los sistemas, a los algoritmos, que tendrán un funcionamiento automatizado basado en IA, es la obligación de que

también las cumplan, y sin paliativos, sus diseñadores, constructores y promotores, no siendo estos últimos quienes menos responsabilidad puedan tener en una eventual aplicación torticera de esos algoritmos, ya sea intencionada o no.

Y es que la actual omnipresencia de la IA en nuestra sociedad produce un doble efecto, en el terreno formativo y en el informativo, de consecuencias desconocidas y que por tanto no sabemos si serán positivas o no. En efecto, por un lado, hay una demanda que crece sin cesar, que provoca un importante aumento de la producción de sistemas basados en IA, que requieren a su vez que haya especialistas de muy alto nivel, con sólidos conocimientos teóricos y prácticos, dedicados en exclusiva a su producción y comercialización. Por otro lado, el uso continuado de sistemas que funcionan con IA (asistentes personales, móviles, etc.) les confiere una popularidad que inunda nuestro lenguaje y formas de comunicación de “palabros” que, mientras quienes los usan creen estar haciéndolo bien, su repetido mal uso produce distorsiones, confusiones y problemas de perplejidad al animar a abrigar esperanzas en situaciones de naturaleza imposible.

En cuanto a la imperiosa necesidad de especialistas, másteres en IA o títulos similares, es necesario prevenir que para lograr un buen nivel de competencia, serán absolutamente imprescindibles sólidos conocimientos de matemáticas, independientemente de otras disciplinas. El acento no se puede poner en la facilidad de conseguir un importante puesto de trabajo cursando unos estudios que, si bien lo garantizan, puede que no estén académicamente acreditados. Por eso no podemos dejar de lado las matemáticas, ya que son absolutamente fundamentales para los desarrollos basados en IA (coches autónomos, diagnósticos médicos, prevención de crisis y catástrofes, aplicación de la justicia, etc.) y por tanto para liderar el diseño del futuro que queremos como país. En definitiva, para tener especialistas bien formados, es imprescindible conocer en profundidad los fundamentos de las disciplinas a desarrollar.

Por otro lado, en lo que se refiere a las confusiones que produce el mal uso del lenguaje, indudablemente debidas a la falta de conocimientos sobre la materia, por no pensar en que haya cierta intencionalidad, no hay más que remitirse a los discursos que emplean los comunicadores, ya sean del entorno político, del laboral o de la divulgación científica: auténticos *influencers* cuyas opiniones son atendidas por millones de personas que confían en

la veracidad de lo que les cuentan. Sin embargo, la información que recibimos en temas relativos a la IA, en demasiadas ocasiones, está más influenciada por la necesidad de atraer la atención del público objetivo que por la solidez de los argumentos que emplee el comunicador de turno. Es por tanto esencial que quienes se dedican a informar a la sociedad, sea en el ámbito que sea, dominen los fundamentos del tema que aborden y sepan de qué están hablando, porque necesitamos que no confundan la Ciencia con la ciencia-ficción y porque el fin no justifica los medios.

No se puede enseñar, investigar o comunicar sin tener una buena formación científico-académica, ya sea en Medicina, en Historia, en Arquitectura o en IA. En el caso de esta última, las Matemáticas, como la Informática, son imprescindibles. ¿Cómo entender el funcionamiento de un algoritmo sin conocer siquiera los rudimentos del Cálculo de Predicados? Y si no se conocen ¿cómo nos atrevemos a diseñar coches inteligentes que se conducen solos? ¿Cómo garantizaremos la seguridad de los pasajeros? ¿Qué cobertura legal tendrán los accidentados? Necesitamos científicos bien formados en los fundamentos. Pero el problema es que, con más frecuencia de la deseada, se otorgan títulos que capacitan para el desempeño profesional en estos ámbitos, sin que los titulados hayan estudiado un libro, aunque si decenas de *papers*.

Me contaba un compañero hace poco que, dando clase en segundo de Informática, al ver las caras de extrañeza de los estudiantes al decirles que iba a demostrar algo por Reducción al Absurdo, les preguntó si sabían de que estaba hablando. Nadie lo sabía. Preguntó entonces si sabían lo que era un silogismo. No se levantó una sola mano. Pero tuvo suerte porque en unos segundos hubo una respuesta. Pero su alegría duró poco al comprobar que quién le había contestado estaba leyendo la respuesta en la Wikipedia. La triste anécdota tuvo continuación ese mismo año cuando, dando clase en un máster sobre IA, intrigado por la experiencia anterior y animado por el tono coloquial con el que se desarrollaba la clase, y porque estaban hablando sobre el *Modus Ponens* Generalizado, preguntó a que les sonaba Barbara, Celarent, Darii y Ferio. A diferencia de quién respondió en la otra ocasión después de consultar la Wikipedia, ahora si que hubo una persona que le contestó: Creía que eran los nombres de los componentes de un grupo de rock, del que no recordaba el nombre. No obstante este disparate, que recomienda una reflexión sobre

la fiabilidad de los resultados que logren estos expertos en su desempeño profesional, el 90% de los estudiantes de ese máster obtienen un buen trabajo en alguna empresa que trabaja con IA antes de que termine el curso.

Por todos estos argumentos, y otros muchos sobre los que la brevedad de este prólogo recomienda no extenderse, éste es un libro imprescindible. El lector podrá encontrar a lo largo de sus páginas planteamientos de problemas importantes, explicaciones, justificaciones y demostraciones rigurosas de por qué pasan muchas cosas en el ámbito de la IA. Conceptos que alegremente se manejan en las publicaciones científicas “del más alto nivel”, cuando no en el planteamiento y solución de problemas reales, como conjeturar, deducir, especular, negar, abducir, o los más elementales aún de hipótesis o consecuencia, se van desgranando a lo largo del libro de forma amena, natural y atractiva sirviendo, por ejemplo, para explicar los (aparentemente inexplicables) sesgos que se producen en algunos de los algoritmos heurísticos empleados en IA que, por su propia naturaleza (heurística) no permiten garantizar que las conclusiones sean consecuencias, o hipótesis, con el consiguiente riesgo de que puedan ser especulaciones y, por tanto, poco recomendables como conclusiones definitivas del razonamiento.

Desde un punto de vista un poco más general, el libro debería ser de lectura obligatoria para todas las personas interesadas en conocer la IA y particularmente para quienes, sin brújula ni cantimplora, exploran el desconocido universo de la IA explicable. Pero no solo para ellos, porque una lectura *ad hoc*, a modo de “manual de expresiones ciertas”, para tertulianos, divulgadores o políticos les vendría como anillo al dedo en estos tiempos de post-verdad que vivimos en los medios. Mención aparte, por su profundidad, merecen los capítulos dedicados por el autor a dar su visión sobre el presente y el futuro de la investigación en nuestro país.

Reconozco que a un buen porcentaje de lectores podrá costarles un poco de trabajo leer algunos capítulos. No sabrán de qué se habla desde las primeras páginas. Pero eso, como sugiere el viejo oxímoron *festina lente*, les servirá para constatar, sobre todo si esa tarea se la ha recomendado alguien que sienta pasión por la investigación, que antes de desembarcar en el paraíso de los trascendentales logros y aportaciones a la IA, quizás no soli-

citadas por nadie, tienen que conocer, entender y saber todos y cada uno de los aspectos abordados en este “Divagaciones sobre pensar y razonar”.

De muy pocos libros científicos, salvo de los que sus autores pertenecen al selecto grupo de los GRANDES, se puede decir que sirvan tanto para los recién llegados, como para los más experimentados en el tema en cuestión, así como para investigadores de áreas afines. Este que comienza ahora es uno de ellos.

JOSÉ LUIS VERDEGAY
Granada, 2021

I

PREFACIO

1. A lo largo de los últimos años publiqué artículos y libros presentando una visión formal del razonamiento de sentido común u ordinario, aquel con el cual las personas tomamos las decisiones de ‘cada día’. Unos trabajos en los cuales intenté separar, en lo posible, el razonamiento del pensamiento viendo al primero como una especialización del segundo y cuando éste es voluntariamente dirigido a algún objetivo, partiendo de un ‘conocimiento’ determinado. Ello sin considerar, no obstante, al razonamiento como ‘una parte’ del pensamiento, puesto que *no es sino un tipo* de pensamiento; *es* pensamiento. Sin embargo, me parece metodológicamente útil distinguir entre pensamiento libre, pensamiento dirigido y razonamiento, como actividades cerebrales relativamente diferenciadas y en las cuales la ‘finalidad’ aparece en los dos últimos, en los cuales el rol del lenguaje es manifiestamente importante.

En aquellos trabajos introduje y estudié, además de añadir el concepto de ‘ley local’, una clase de conjeturas, las especulaciones, que no consideradas anteriormente y en el borde entre pensamiento dirigido y razonamiento, abren nuevas posibilidades para el estudio del razonamiento ordinario. Especialmente a causa de la posibilidad de obtenerlas de forma algorítmica, como probé puede hacerse en las álgebras de Boole finitas e incluso, como ejemplifiqué en algún caso, si tales álgebras no son finitas. Unos trabajos en los que se pone de manifiesto el importante rol de la transitividad local, así como que la especulación es responsable de la ‘productividad’ del razonamiento al ser causa de su creatividad.

2. Jubilado definitivamente en 2018 pero todavía científicamente activo, en los dos años siguientes he continuado publi-

cando al respecto tanto artículos en revistas, como libros. Una parte de ello quedó inédito y fue consecuencia de reflexionar, desordenadamente, sobre aspectos del razonamiento que, si había dejado a un lado por no parecerme inmediatamente esenciales para lo que hacía, luego creí de cierto interés, tanto científico, como computacional, o como filosófico. Sin embargo, preferí guardar tales escritos inéditos para, finalmente y como despedida a mis más de cincuenta y cinco años de investigación, rehacerlos y reunirlos en un volumen que, presentados como lo que realmente son, ‘Divagaciones’, pudiese representar mi adiós al estudio del razonamiento e intentando, aún, sugerir alguna idea nueva si bien dejando más preguntas sin respuesta que conclusiones. Sin intentar asegurar certezas que no tengo, sino sembrando mis propias dudas; tal vez intentando, humildemente, filosofar. Se trata de cuanto seguirá en los capítulos II al XIV y que, en realidad, no constituyen más que una divagación ensayística en el dominio del pensamiento.

Del primero de esos escritos he separado el modelo matemático del razonamiento ordinario que he venido llamando su ‘esqueleto’ formal; aquel escrito, inicialmente demasiado largo, se ha transformado en los capítulos II, III y IV. Con ello, en las muchas veces que luego aparece ese modelo me remito al capítulo III, que el lector hará bien intentando comprenderlo adecuadamente. Sin embargo, en algunos de los capítulos he conservado algunos comentarios sobre el esqueleto y tanto para no restarles unidad, como para ayudar a los potenciales lectores a no tener que regresar continuamente a aquel tercer capítulo; algunos de tales comentarios contienen matices que anteriormente no atiné a escribir. En todos los capítulos suprimí algunas redundancias, pasé al final del libro las referencias comunes a todos ellos y dejé, en cada uno las referencias que le son específicas; las primeras se marcan con una C delante y aquellas que sólo corresponden a los capítulos II, III y IV aparecen al final de éste último. Con todo, es muy probable que, por su mismo origen, el libro muestre una cierta falta de unidad, que contenga demasiadas repeticiones aunque, como he dicho, puedan contener matizaciones que merece la pena leer.

Los cuatro capítulos XV, XVI, XVII y XVIII, tienen un origen y una intención diferentes a los otros catorce; corresponden a intervenciones en eventos distintos, de las que conservé los borradores que luego seguí (de lejos) en las presentaciones orales y en las

que no suelo leer. Son textos que he modificado en parte y entre cuyas presentaciones mediaron varios años. El XV pretende ser un homenaje a Lotfi A. Zadeh y corresponde a una charla dada a los estudiantes del Máster en Soft-Computing de la Universidad de Granada, a la que fui invitado por los profesores Miguel Delgado y José Luis Verdegay, que tuvo lugar el 7 de febrero de 2018. El XVI corresponde a la conferencia que, en los actos del llamado ‘Día Mundial de la Lógica’, el 15 de Enero de 2020, impartí en la Universidad de Salamanca, invitado por la profesora Mara Manzano, organizadora de aquel evento. El XVII corresponde a lo dicho en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, con motivo de la reunión anual llamada ‘FuzzMad’, el 14 de Diciembre de 2018 e invitado por su organizador, el profesor Javier Montero. El XVIII es la charla que dí en la Universidad de Castilla-La Mancha, en Ciudad Real, el 5 de Noviembre de 2015, como Conferencia Invitada al Acto de Graduación Anual de su Escuela Superior de Informática y requerido por mi antiguo doctorando, el profesor José Ángel Olivas. Esos cuatro capítulos, inéditos como los otros catorce, los he añadido por cuanto los creo ilustrativos tanto de mi afecto y respeto por el profesor Zadeh, de mi interés por la lógica borrosa, el razonamiento de sentido común y la creatividad, así como por reflejar la visión de la universidad y la investigación que siempre me guiaron.

En el último capítulo XIX, ‘Conclusión final’, presento una serie de reflexiones muy generales y, algunas, adicionales, respecto de lo explicado en los capítulos II a XIV.

3. El ‘esqueleto’ es un modelo formal con pocas leyes que, de añadirle otras, permite llegar a algunos modelos matemáticos particulares de la Lógica y, a la vez, contemplar al razonamiento ordinario como su ‘gen’ básico. El esqueleto puede considerarse una estructura formal y minimal del razonamiento ordinario; con ello, las leyes que lo caracterizan pueden verse como los ‘principios formales’ del razonamiento ordinario. Son leyes que originan la posibilidad que refleja la secuencia <narrar, conjeturar, computar>, como el camino que ha permitido llegar, a lo largo del tiempo, a las actuales ciencias de la computación.

De cara al posible interés de todo ello para la maquinización del razonamiento de sentido común, no deben pasarse por alto los tres aspectos siguientes:

1.º El modelo ‘esqueleto’ permite algunos avances como son, por ejemplo, considerar propiedades o leyes ‘locales’, así como

la búsqueda algorítmica de especulaciones, que pueden permitir el inicio de una nueva vía para que las máquinas induzcan y muestren creatividad.

2.º Sin embargo, lograr máquinas que piensen, razonen y actúen ‘como las personas’ requiere, además, que estén dotadas de ‘conocimiento de sentido común’ y que razonen usándolo. No debe confundirse el ‘conocimiento de sentido común’ con el citado razonamiento de sentido común u ordinario; no son lo mismo ‘pensar’ y ‘razonar’ que ‘conocer’, si bien los dos primeros son necesarios para el tercero.

3.º Como sea que todo ello exige representar el lenguaje con el que se exprese la gente, no deben, ni pueden, obviarse técnicas de ‘diseño’ de las expresiones lingüísticas que intervengan en el razonamiento y como son, esencialmente, las ofrecidas por la llamada Lógica Borrosa.

4. Poco, si algo, de lo que se presenta es de tipo concluyente; como corresponde a unas divagaciones llenas de dudas. A lo más puede ser sugerente para iniciar unas líneas de investigación, con una nueva y global forma de considerar el fenómeno natural de pensar y razonar. Unas líneas que, de no estar retirado y tener colaboradores, yo mismo intentaría organizar y comenzar como un programa de investigación, personal y a plazo indefinido. La edad y la jubilación me representan, sin embargo y aunque todavía confío en poder indagar algo más, una limitación para hacerlo. Por más que uno escriba en soledad, como es mi caso, siempre escribe después de otros; es deudor de cuanto ha estudiado y de quienes lo pensaron y escribieron antes. A todos ellos mi más profundo agradecimiento.

También agradezco la paciencia, atención y afecto de cuantos colegas y estudiantes han soportado mis pláticas, lecciones y charlas acerca del razonamiento y el pensamiento; singularmente, aquellos que me plantearon críticas, interrogantes y preguntas concretas. A tal respecto, deseo citar, en especial, a los profesores José Luis Verdegay (Granada) y Alejandro Sobrino (Santiago de Compostela); al primero, además, le agradezco su amabilidad escribiendo el Prólogo a estas ‘Divagaciones’.

ENRIC TRILLAS

Les Maces, Oviedo. 12, diciembre, 2020

II

EL PENSAMIENTO DIRIGIDO, ¿UN SISTEMA RELACIONAL?

I. INTRODUCCIÓN

1.1. El funcionamiento del cerebro, causante del fenómeno natural del pensamiento, hace que éste adquiera, en las personas, una complejidad tal que les otorga un rol único en el mundo. Una complejidad que proviene de aquel no menos complejo funcionamiento, el cual, aun siendo el cerebro bien conocido anatómicamente, es aún y en buena medida un gran desconocido.

Externamente, cabe distinguir entre pensamiento involuntario y voluntario; el primero es automático y consecuencia del funcionamiento autónomo del cerebro; el segundo, dirigido a un objetivo, requiere la voluntad del sujeto pensante, es el pensamiento que pretende ‘conocer’, satisfacer esa necesidad de las personas. Es el que se considerará en lo que sigue y que tanto aparece en la vida diaria, como en la filosofía o en la ciencia; si la filosofía es básicamente pensamiento dirigido, la ciencia muestra además una fuerte componente de razonamiento y, en especial, de razonamiento probatorio tendente, en cada momento, a la mejor comprobación posible tanto de sus hipótesis, como de sus conclusiones.

El pensamiento libre no ha podido, todavía, estudiarse mediante alguna representación matemática; sólo lo ha sido y recientemente ^[C2], la modalidad del pensamiento dirigido conocida como razonamiento ordinario o de sentido común, con el que las personas toman sus decisiones del día a día ^[C1], por lo cual también se llama razonamiento ‘de cada día’. Se trata de un modelo formal que permite clasificar las conclusiones de los razonamientos en refutaciones y conjeturas las cuales, con

una condición adicional, se clasifican a su vez en consecuencias, hipótesis y especulaciones. Unas clases de conclusiones que, sin aquella condición adicional también existen aunque puedan no ser conjeturas; de ello se da noticia en el próximo capítulo III.

Ese modelo formal del razonamiento ordinario es, además, un ‘esqueleto’ constituido por pocas leyes que, de añadirle más leyes, permite obtener los modelos matemáticos de algunos, específicos y especializados razonamientos; tales ampliaciones del modelo restringen el ámbito de su aplicación. El esqueleto no es sino un ‘adelgazamiento’ de estructuras formales ya conocidas y empleadas que podría ser visto, en el sentido *integracionista* de José Ferrater Mora ^[3], como el máximo común divisor de aquellas estructuras.

Es un modelo formal muy simple que permite, además, ver cómo las ‘lógicas’ que rechazan lo auto-contradictorio como algo imposible por inferencia, derivan del razonamiento ordinario de las personas. Representa el ‘gen’ de la Lógica ^[C2]; tanto de la llamada de Enunciados o de conceptos precisos y sin incerteza, como de la Física Cuántica de conceptos precisos pero inciertos, como la Borrosa o de conceptos imprecisos e inciertos ^[C3, C4, C5]. Es un modelo que, además, permite analizar tanto la ‘síntesis de opuestos’, como la ‘conjunción’ de los mismos ^[C1].

Por su parte, como un fenómeno natural y emergente del funcionamiento del cerebro, el estudio científico del pensamiento es, realmente, propio de la Neurociencia, la cual y en su día tendrá la que podría ser la última palabra al respecto ^[C1].

Así como el razonamiento ordinario es regulado hasta cierto punto, lo que permite construir aquel esqueleto formal, del pensamiento libre no se conocen reglas de funcionamiento universal; aparece desregulado. Por ello, intentar plantear un modelo matemático global de todo el pensamiento es muy difícil, supuesto que hoy fuese posible. Tal vez, lo más que quepa decir, y en la dirección hacia un osado intento formal, es que el pensamiento tiene una característica ‘asociativa’ evidente, reforzada por cuanto se almacene en la memoria y se recuerde; que pone en relación cosas observadas, tanto físicas como virtuales, con cosas recordadas. Que es ‘relacional’.

Sin embargo, cabe considerar algunas características generales del pensamiento dirigido y, con ellas, intentar aproximarse a un primer y parcial modelo matemático del mismo que, además, se particularice al del esqueleto cuando el pensamiento dirigi-

do devenga razonamiento ordinario. Por ejemplo y cuándo se pretende ‘conocer’, el pensamiento dirigido intenta ‘clasificar’ aquello de lo que se ocupa; una clasificación que, proveniente de las relaciones citadas, no siempre puede ser nítida. De ello tratará cuanto sigue.

1.2. Conviene dejar claro que el pensamiento no cesa en tanto el sujeto pensante vive; sólo cuando el electroencefalograma deviene plano, cuando cesa la actividad eléctrica del cerebro, cabe afirmar que el pensamiento ha dejado de producirse y aunque el dirigido y el razonamiento hayan podido cesar antes. Pensamiento dirigido y razonamiento requieren la consciencia del sujeto pensante.

El pensamiento se mezcla con cualquier actividad; cabe cavar una zanja y pensar simultáneamente en cualquier otra cosa, regar unas plantas y pensar a la vez que se olvidó algo en otro lugar, que luego debe hacerse alguna otra cosa o, escribiendo una carta, también recordar algo que no viene a cuento y relativo a su destinataria. En particular, en tanto se razona, el pensamiento sobre lo que se intenta razonar no cesa y, con frecuencia, al abandonar un razonamiento por el momento infructuoso, el pensamiento sigue con aquello a lo cual se dirigía el razonamiento, le ‘dá vueltas’ sin que el pensador sea consciente de ello; el pensamiento es continuo como parece serlo el funcionamiento del cerebro y de ahí la frase, ‘dejar dormir el problema’ ^[C1]. El pensamiento sigue influyendo incluso durante un ‘delicado’ proceso de razonamiento.

2. UNA VISIÓN DEL PENSAMIENTO DIRIGIDO

2.1. Las manifestaciones del pensamiento libre que nos cabe reconocer y explicar a otros, tanto si el pensamiento es consciente como si se produce en sueños o ensoñaciones son, en gran mayoría, de tipo relacional; asocian, relacionan, a veces de manera que en la lucidez parece extraña, situaciones, personas, recuerdos, enunciados, etc., que mantienen, con alguna frecuencia, relaciones de proximidad, semejanza o analogía con algo almacenado en la memoria; algo que puede no ser evidente a primera vista ^[C1], así como aparecerle al sujeto pensante de una forma distorsionada que hace difícil su reconocimiento y que, eventualmente, puede responder más a ‘sentimientos’, ocultos en la memoria, que a situaciones reales.

Para describir, contar, tales pensamientos se requiere del lenguaje y, frecuentemente, muchos de sus recursos expresivos;

si el lenguaje no es estrictamente necesario para pensar lo es, no obstante, para relatarlo. Ello exige verbalizar, incluso nombrar, las relaciones citadas.

Son relaciones que, sin embargo, no son siempre nítidas como lo es, por ejemplo, la divisibilidad de números; muchas veces se trata de relaciones inexactas o imprecisas que, por ello, pueden asimilarse a relaciones borrosas y representarse por medio de las mismas. Con ello y en el caso de que alguna relación implicada fuese nítida, la teoría de relaciones borrosas seguiría siendo aplicable, ya que ésta se particulariza a la de relaciones nítidas en cuanto los valores de sus funciones de pertenencia son, únicamente, los números 1 y 0 ^[C4, C5].

Por ello, al menos una parte del pensamiento puede identificarse con la teoría de las relaciones imprecisas o borrosas. Es decir, el cálculo con familias de funciones $R: X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow [0, 1]$, las funciones de pertenencia a un conjunto borroso del universo $X_1 \times \dots \times X_n$, producto cartesiano de los universos parciales X_1, \dots, X_n a los que pertenezcan los elementos, nítidos o no, que integren lo que se evoque en el pensamiento; la imagen del mismo que nos haya quedado. Una imagen que puede ser o no ser gráfica, interpretarse lingüísticamente de manera inmediata, o no, etc. Posiblemente, tal teoría de relaciones borrosas podría ayudar a representar sino el pensamiento libre, alguna de sus componentes como, por ejemplo, el pensamiento dirigido.

Sin embargo, el recurso a un lenguaje será necesario para explicar a otros o a uno mismo lo que se evoca en un pensamiento; el significado atribuido a lo pensado será esencial ^[C1]; tal es, en el fondo, lo que se pretende hacer con el pensamiento libre mediante las técnicas de análisis psicoanalítico. Sin el lenguaje no podríamos pensar sobre el pensamiento, dirigirlo a el mismo.

Lo que anteriormente se ha escrito como ‘puede identificarse’, sería mejor reescribirlo como ‘puede representarse simbólicamente’ para indicar más claramente que se trata de intentar un análisis formal de, sino todo el pensamiento, por lo menos y en parte, del dirigido en cuya generación y por su propia finalidad, el lenguaje será más necesario, explícito y concreto que en el pensamiento libre. Un análisis formal que, tal vez, pueda ser ilustrativo de la posibilidad de mecanizarlo; no hay que olvidar que, hasta ahora, lo mecanizado es, esencialmente, el razonamiento deductivo, algorítmico, que, además, no es todo el razonamiento como se verá en el próximo capítulo III.

2.2. Un ejemplo es pertinente para mostrar la posibilidad de trasladar a relaciones borrosas un proceso de pensamiento dirigido y tendente a ‘mejor conocer’ una colección de objetos gráficos.

Ante una colección de figuras geométricas F_1, \dots, F_m , no necesariamente regulares, cabe preguntarse, pensar, acerca de cómo podrían clasificarse para, agrupando las más similares entre sí, reducir su número a algunos ‘tipos de figuras’: Ver cuáles de ellas pueden considerarse indistinguibles, cómo y hasta qué punto. Es una manera de pasar de lo particular a lo general; en suma, de abstraer.

Para ello, cabe explorar las figuras buscando una colección de atributos comunes A_1, \dots, A_n y aunque las figuras los muestren en grados distintos. Sean g_{ij} = grado en que F_i muestra A_j , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, los grados numéricos que puedan apreciarse entre 0 y 1 según sea la proporción, percibida, en la cual las figuras los muestren. A tales grados puede llegarse tras una inspección cualitativa de las figuras atendiendo a los atributos; el mejor conocimiento de las figuras es esencial para saber de los posibles atributos y avanzar en su clasificación. Con tales grados numéricos y por ejemplo, la fórmula ^[C3, C5]

$$I (F_r, F_s) = \sum_i \min (g_{ri}, g_{si}) / \max (\sum_i g_{ri}, \sum_i g_{si}), [*],$$

facilita una relación borrosa que es,

- Reflexiva ($I (F_i, F_i) = 1$, para todo subíndice i),
- Simétrica ($I (F_i, F_j) = I (F_j, F_i)$, para cualesquiera subíndices i, j),
- y
- T-transitiva ($T (I (F_i, F_j), I (F_j, F_k)) \leq I (F_i, F_k)$, para cualesquiera subíndices i, j, k , y con la operación $T (x, y) = \sqrt{\max (0, x^2 + y^2 - 1)}$ ^[C3]).

La función I es, por tanto, un ‘operador de indistinguibilidad’ ^[C3] que, de ser los números g_{ij} ceros o unos, será una equivalencia clásica y llevará a una clasificación perfecta o partición de las figuras en cuestión; cada número $I (F_r, F_s)$ es el grado en que las figuras F_r y F_s son indistinguibles respecto del conjunto de atributos elegidos. Entonces, basta considerar el umbral $\sqrt{0.5} = 0.7071$ para que, si dos figuras F_r y F_s verifican

$$\sqrt{0.5} < I (F_r, F_s),$$

se puedan considerar indistinguibles. Nótese que de ser los valores de la función I ceros o unos la anterior desigualdad implicaría $I(F_r, F_s) = 1$.

Así, de haber sólo dos figuras F_1, F_2 y dos atributos, A_1 y A_2 , si $(1, 2/3)$ son los valores que se aprecian del grado g para la figura F_1 y $(1, 2/5)$ los correspondientes a F_2 , sería: $I(F_1, F_2) = [\min(1, 1) + \min(2/3, 2/5)] / \max(1 + 2/3, 1 + 2/5) = 21/25 = 0.84$, con lo cual ambas figuras se considerarían indistinguibles al ser $\sqrt{0.5} = 0.7071$ estrictamente menor que 0.84 .

Básicamente, ese ejemplo muestra que para plantear y llegar al objetivo del pensamiento dirigido, clasificar las figuras, la relación borrosa I permitiendo expresar su parecido respecto de una colección de atributos que se consideren significativos y obtenidos observando las figuras, es relevante.

Está claro con ello que la reflexión previa sobre qué atributos deben elegirse es necesaria, así como lo es una adecuada elección de la función I . Todo ello, no es otra cosa que un intento de ‘clasificar para conocer’; un conocimiento más abstracto que, de considerar otro operador de indistinguibilidad, podría variar substancialmente.

En cuanto al umbral $\sqrt{0.5}$, proviene ^[C3] de encontrar el número $\varepsilon > 0$ tal que sea $\varepsilon \leq T(\varepsilon, \varepsilon) \Leftrightarrow \varepsilon \leq \sqrt{\max(0, 2\varepsilon^2 - 1)} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \varepsilon^2 \Leftrightarrow \sqrt{0.5} \leq \varepsilon$; el menor valor posible de ε que mantenga la T-transitividad. Por otra parte, el valor 0.7071 ha sido comprobado experimentalmente, aproximado a 0.7 , en alguna aplicación computacional de la fórmula que, como una desigualdad, facilita la anterior función I ^[C1, C3]. Se trata de una fórmula que fue útil para mecanizar un proceso de agrupación de figuras por indistinguibilidad; por una analogía controlada numéricamente.

2.3. Nada podría hacerse sin un pensamiento previo; cada ‘pensamiento’ es un bucle de pensamientos y re-pensamientos relacionados entre sí. Con frecuencia es difícil saber del primero y el último, aquel en el cual se para.

El anterior ejemplo muestra, en particular, que el pensamiento dirigido a un objetivo consta de los que podrían llamarse ‘dos movimientos o tiempos’: uno de retroceso o reflexión sobre el objetivo y, a continuación, uno de avance o razonamiento hacia una solución. Ello recuerda lo que Nicolás de Cusa, en el siglo xv, llamó el proceso de *complicatio/explicatio*, de re-plegar y desplegar, como su visión de ‘la mente’ ^[1], del pensamiento, y que, en el

modelo formal ‘esqueleto’ y para el razonamiento no son sino la especulación seguida de sea la abducción, o sea la deducción ^[C2], según se trate de explicar o prever.

Se trata, en suma y como se mostrará en el siguiente capítulo, del movimiento global en zigzag, vía repliegue y despliegue (o viceversa), que permite razonar encadenando inferencias deductivas hacia adelante e inferencias deductivas hacia atrás (o viceversa) y llevando, finalmente, a una conclusión que refute, explique o prevea lo que corresponda en cada caso.

2.4. Para razonar se requiere disponer, previamente, de una pregunta acerca de algo conocido; haber pensado antes una pregunta que tanto puede ser sobre explicar cómo prever qué cabe esperar de aquello conocido y que, una vez obtenida una primera hipótesis o una primera consecuencia que quepa considerar adecuadas, deberá someterse a ‘control’ ^[C2], es decir, a intentar confirmarla o refutarla y con ello retenerla o cambiarla. Hasta cierto punto, es un proceso inacabable.

Todo ello ‘es pensamiento’, bucles de pensamientos y re-pensamientos relacionados o encadenados; conocido algo hasta cierto punto, se piensa una pregunta, se analiza el entorno de conocimiento que envuelve el ítem conocido, se piensa cómo llegar a una conclusión acerca de la pregunta y se razona para lograrlo. No hay razonamiento sin pensamiento dirigido previo, sin especulación.

Así, en el anterior ejemplo lo conocido o dado son las figuras sobre las cuales surge la pregunta de su posible clasificación. Analizadas las figuras, se observan los atributos esenciales que presentan las mismas y, con ellos, se piensa, se pregunta, cómo agruparlas en clases para poder llegar a una clasificación no necesariamente precisa; hacer clases, ‘tipos’ de ellas, ‘clusters’, a los cuales y finalmente asignar nombres acordes con lo que pongan de manifiesto. Tal vez, eso no sea sino el intento de ‘llegar a conocer’ algo y partiendo de observarlo y, para ello, especular una posible fórmula como es la [*], es importante.

3. PENSAMIENTO Y RAZONAMIENTO

3.1. El pensamiento humano libre no requiere necesariamente del lenguaje para producirse, pero el dirigido lo necesita y, por lo menos, para ‘describir’ lo que se conoce, el punto de partida y, especialmente, el objetivo que se persigue, el que quepa pensar

como llegada. No parece posible pensar de manera dirigida a un objetivo sin contar con un lenguaje que permita enunciar cuanto quepa asociar o relacionar de aquello que intervenga.

El pensamiento dirigido aparece, de esta forma, como un sistema lingüístico *relacional* en el cual y por consiguiente, el significado de los enunciados es esencial. Somos las personas quienes ‘cargamos’ la realidad con significados y análogamente a cómo la vemos en colores; con un símil un tanto grosero, el pensamiento es la luz que permite atribuir significados, ‘colorear’ lo pensado.

Si el pensamiento dirigido y tal vez parte del libre, puede manejarse formalmente mediante relaciones borrosas, en cuanto el dirigido se concentra en pensar sobre la búsqueda de ‘pruebas’, éstas requieren una relación especial. Se trata de la relación lingüística condicional ^[C2] ligando los dos enunciados p (lo conocido o premisa) en un universo X y q (lo buscado o conclusión) en un universo Y , en la forma

‘Si p , entonces q ’, que se abrevia simbólicamente por $p < q$.

Tal relación lingüística $<$ es, pues, un subconjunto del producto cartesiano de los conjuntos de enunciados en X y en Y que se consideren. Teniendo en cuenta los enunciados elementales ‘ x es p ’ e ‘ y es q ’, aquella relación lingüística condicional induce una relación binaria $< \subseteq X \times Y$ y su función de pertenencia correspondiente al par p, q de enunciados, es: $R_{<}(p, q)(x, y) = \min(f_p(x), f_q(y))$, para todo $(x, y) \in X \times Y$, siendo f_p y f_q las funciones de pertenencia generadas, respectivamente, por los significados de los enunciados p en X y q en Y ^[C1, C2, C4]. En general, tales funciones especifican conjuntos borrosos en los respectivos universos del discurso, pero si sólo toman los valores 1 y 0, como corresponde al caso nítido, entonces también $R_{<}$ tomará esos valores y será una relación nítida; en otro caso la función $R_{<}$ podrá tomar valores intermedios distintos de los 0 y 1.

Cada una de esas tres funciones representan los significados respectivos de p en X , de q en Y y de $<$ en $X \times Y$. Se trata siempre de significados medibles ^[C1, C2, C4], cuyas medidas o funciones de pertenencia precisan (o ‘precisifican’), su significado cualitativo.

En el caso particular en el cual p y q coinciden, es $R_{<}(p, p)(x, y) = \min(f_p(x), f_p(y))$, cuyo ‘núcleo’ es el conjunto $\{(x, y) \in X \times X; R_{<}(p, p) = 1\} = \{(x, y) \in X \times X; f_p(x) = f_p(y) = 1\} \subseteq f_p^{-1}(1) \times f_p^{-1}(1)$, el cual, de ser p nítido en X coincide con el producto

cartesiano por si mismo del conjunto clásico que tal enunciado especifica en X , el conjunto $f_p^{-1}(1) \times f_p^{-1}(1)$. De ahí que, en el caso totalmente nítido, se considere que la relación $<$ es, por definición y como se definirá en el próximo capítulo, reflexiva, que verifica $p < p$ para todo p .

3.2. Para reflejar los encadenamientos de los bucles del pensamiento puede convenir emplear un álgebra de relaciones borrosas; es decir, considerar cada bucle isomorfo a una tal álgebra y tras considerar el cálculo elemental con los enunciados que facilita el ‘esqueleto’ [C2].

Cuando el razonamiento se concentra en una ‘prueba’, entonces la relación $<$ debe ser rígida o precisa; una prueba total no puede ser aproximada sino exacta; de ser aproximada no pasará de ser una conjetura especulativa, a lo más una deducción inexacta, como es el caso de las pruebas de las ciencias experimentales en las cuales hay que contentarse con las mismas. En esas ciencias, sin embargo, cuando se consigue enmarcar algún aspecto en un modelo matemático, la prueba en el modelo debe ser exacta, rígida, precisa; es por todo ello que conviene conocer el modelo rígido del ‘esqueleto’.