# FÍSICA DE FLUIDOS

*Antonio Molina Cuevas*

*Juan de Vicente Álvarez-Manzaneda*

*Departamento de Física Aplicada*

*Universidad de Granada*

*Granada, 2018*

Créditos Física Fluidos.ai 1 24/07/18 18:43



ISBN: 978-84-338-6313-3 • Depósito legal: Gr./992 -2018
Edita: Editorial Universidad de Granada
Campus Universitario de Cartuja
Colegio Máximo, s.n., 18071, Granada
Telf.: 958 243930-246220
www: editorial.ugr.es

Diseño de cubierta: Josemaría Medina
Imprime: Gráficas La Madraza, Albolote, Granada

*Printed in Spain* *Impreso en España*

PREFACIO

Thomas Erle Faber (1927-2004) escribía en el prólogo de su obra Fluid Dynamics for Physicists (Cambridge University Press, 1995) que todo físico debiera tener conocimientos de dinámica de fluidos, y que todo departamento universitario de física debiera incluir su enseñanza en su núcleo curricular. Estas afirmaciones se entienden si se tiene en cuenta que la Mecánica de Fluidos no ha sido una enseñanza bien tratada en los planes de estudio de Física, tanto fuera como dentro de nuestro país. Sin embargo, el estudio de los fluidos aparece en multitud de campos de investigación y, por supuesto, en numerosas aplicaciones prácticas, y, como decía el Prof. Faber, el alumno de física disfrutaba con el aprendizaje de los fluidos y que sólo se entusiasmara con la enseñanza de los quarks y de los agujeros negros, era, en su opinión, un mito.

Habiendo ya indicado el interés del estudio de la dinámica de los fluidos, habría que preguntarse por la conveniencia de sacar a la luz un nuevo libro sobre esta materia. Existen muy buenos libros dedicados al estudio de los fluidos y, en la bibliografía de este texto, se indican varios de ellos. Pero, el propósito principal de este libro es ayudar al aprendizaje de los fluidos a los alumnos en los planes de estudios actuales en la universidad española. Esto hace que el libro se haya confeccionado para que pueda desarrollarse en un semestre, con un total de 60 horas. Por tanto, se tratan los temas generales de la mecánica de fluidos y no se incluyen capítulos enteros de aplicaciones, que, por otra parte, pueden encontrarse en los numerosos libros existentes para los estudios de carreras técnicas.

Una de las taréas más delicadas a la hora de escribir un texto sobre fluidos es su estructuración. Aquí se ha procurado que ni se repitan contenidos (lo que es frecuente en libros de fluidos; primero, de forma elemental y/o conceptual, y segundo, en forma más detallada) ni que ningún tema necesite conocimientos de temas posteriores.

Dado que los fluidos son tratados como continuos es por lo que se comienza en el capítulo 1 exponiendo el significado de la hipótesis de continuo así como lo que se conoce con el nombre de representación Euleriana y representación Lagrangiana. En el capítulo 2 se exponen las ecuaciones básicas; a saber, las ecuaciones fundamentales: de continuidad, de movimiento y del momento cinético, (introduciendo el concepto de tensor de esfuerzos) así como las ecuaciones constitutivas para el modelo del fluido ideal y del fluido lineal viscoso. Hay que decir que en este tema se ha utilizado parte del libro «Mecánica Teórica: Mecánica Analítica y Mecánica de los Medios Continuos» con permiso del autor (A. Molina) y de la editorial de la Universidad de Granada.

El capítulo 3 está dedicado a la Estática de fluidos, donde, entre otras cosas, se obtiene la Ley de Arquímedes (ley, no principio) cuyo significado, a menudo, puede entenderse equivocadamente.

Una vez considerados los fluidos en reposo, se estudia, en el capítulo 4, el fluido ideal en movimiento estacionario, introduciendo el concepto de función presión, viendo algunas aplicaciones clásicas de la ecuación de Bernouilli y, de forma elemental, la teoría de la tobera de D´Laval.

En el capítulo 5 se expone la teoría del flujo potencial para fluido ideal, de forma más extensa para los fluidos incompresibles. Se introduce, también, el uso de la variable compleja para el estudio de estos fluidos irrotacionales, lo que sirve para entender el teorema de Milne-Thomson y de Blausius, relacionados con el estudio de sólidos inmersos en fluidos en movimiento.

El fluido viscoso lineal se estudia en el capítulo 6, en régimen laminar. Como caso de aplicación de un flujo lento, se estudia el caso de una esfera rígida en presencia de una corriente uniforme y se obtiene la famosa formula de Stokes. También, en este tema, se estudia la teoría de la capa límite, en régimen laminar.

Dado a veces el interés que presenta su aplicación, se presenta, en el capítulo 7, la ecuación de la energía mecánica, haciendo ver que no ha de coniderarse como una ecuación fundamental ha añadir a las contempladas en el capítulo 2. En este capítulo se expone, también, la ecuación de la energía térmica, concretando para el caso de un fluido lineal viscoso y, particularmente, la forma más simple que adquiere si se considera el fluido como gas perfecto y se admite la ley de Fourier.

En el capítulo 8 se aborda el estudio de fluidos no Newtonianos (es decir, aquellos cuya viscosidad no es constante y/o presentan carácter viscoelástico). En este contexto, se explican los flujos estándar y algunos de los modelos mejor establecidos en la bibliografía.

Por último, en el capítulo 9, se abordan algunos aspectos de forma muy sucinta sobre inestabilidades y turbulencia. En particular, se detallan las inestabilidades de Kelvin-Helmholtz y la de Taylor. Se indican las características principales del flujo turbulento y se obtienen las formas de las ecuaciones fundamentales para valores medios haciendo uso de la aproximación de Boussinesq, que se expone en el Apéndice A.

# Índice general

**1. Introducción** **1**

1.1. Notas históricas sobre la Física de Fluidos . . . . . . . . . . . . 1

1.2. Concepto de fluido. El fluido como un continuo . . . . . . . . . 3

1.3. Representación Euleriana y Lagrangiana . . . . . . . . . . . . . 4

**2. Ecuaciones básicas** **11**

2.1. Ecuaciones fundamentales . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11

2.1.1. Ecuación de continuidad . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12

2.1.2. Ecuación fundamental del movimiento . . . . . . . . . . 13

2.1.3. El tensor de esfuerzos. Ecuación del momento cinético . 16

2.2. Ecuaciones constitutivas de algunos modelos sencillos:. . . . . . . 20

2.2.1. El fluido ideal. Ecuaciones de Euler y de Lamb-Gromeka 21

2.2.2. Modelo lineal del fluido viscoso. Ecuaciones de Navier-Stokes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 25

**3. Estática de Fluidos** **31**

3.1. Ecuación fundamental . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31

3.2. Equilibrio en el campo gravitatorio . . . . . . . . . . . . . . . . 33

3.3. Ley de Arquímedes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 38

**4. Fluido ideal en movimiento estacionario** **45**

4.1. Formulación general de la ecuación de Bernoulli . . . . . . . . 45

4.2. Caso de fluidos incompresibles: presiones... Aplicaciones . . . . 47

4.3. Caso de un fluido compresible: flujo adiabático de un gas... . . 51

**5. Fluido ideal en movimiento potencial** **59**

5.1. Introducción. Ecuación de Cauchy-Lagrange . . . . . . . . . . 59

5.2. Flujo potencial de fluidos incompresibles . . . . . . . . . . . . 61

5.2.1. Flujo uniforme . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 62

5.2.2. Flujo de fuentes o sumideros (flujo de simetría esférica). 62

5.2.3. Flujo de dipolos puntuales . . . . . . . . . . . . . . . . . 64

5.2.4. Combinación de fuentes, dipolos y planos. Método de las imágenes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 65

5.2.5. Solución general de la ecuación de Laplace para flujo plano-paralelo. Potencial de vórtice rectilíneo. Aplicación al estudio de los tornados . . . . . . . . . . . . . . 68

5.2.6. Combinación de corriente uniforme y dipolo lineal. Estudio del movimiento relativo de un cilindro en un fluido 73

5.2.7. Flujo con simetría axial en coordenadas esféricas. Estudio del movimiento de una esfera en el seno de un fluido . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 77

5.2.8. Teoría de la variable compleja en fluidos incompresibles 79

5.3. Flujo potencial de fluidos compresibles . . . . . . . . . . . . . 94

5.3.1. Movimiento de un gas con perturbaciones pequeñas. Ondas planas y ondas esféricas . . . . . . . . . . . . . . 95

5.3.2. Perturbaciones por fuentes en movimiento. Régimen subsónico y supersónico. Cono de Mach. . . . . . . . . 99

5.3.3. Ondas de Riemann . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 102

**6. Fluido viscoso lineal en régimen laminar 109**

6.1. Aproximación de Stokes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 109

6.2. Experiencia de Reynolds: régimen laminar y turbulento . . . . 112

6.3. Flujos no inerciales . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 114

6.3.1. Flujo de Couette y flujo de Poiseuille . . . . . . . . . . 114

6.3.2. Flujos lentos (flujos de Stokes) . . . . . . . . . . . . . . 117

6.4. Teoría de la capa límite en flujo laminar . . . . . . . . . . . . 124

6.4.1. Ecuaciones de la capa límite . . . . . . . . . . . . . . . 124

6.4.2. El espesor de la capa límite . . . . . . . . . . . . . . . . 128

6.4.3. Flujo uniforme sobre una placa plana. Ecuación de Blausius. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 130

**7. Energía** **135**

7.1. Energía mecánica. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 135

7.2. Energía térmica. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 137

**8. Fluidos no-Newtonianos** **139**

8.1. Introducción. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 139

8.2. Flujos estándares. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 141

8.3. Funciones materiales. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 143

8.4. Experimentos. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 144

8.5. Modelización: ecuaciones constitutivas. . . . . . . . . . . . . . 147

8.5.1. Materiales no elásticos independientes del tiempo. . . . 148

8.5.2. Materiales viscoelásticos. . . . . . . . . . . . . . . . . . 149

8.5.3. Materiales no elásticos dependientes del tiempo (tixotrópicos). . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 153

**9. Inestabilidad y turbulencia** **157**

9.1. Introducción . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 157

9.2. La inestabilidad de Kelvin-Helmholtz . . . . . . . . . . . . . . 158

9.3. La inestabilidad de Taylor . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 161

9.4. Turbulencias. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 164

**10. Apéndice A: Aproximación de Boussinesq 169**

10.1. Aproximación de Boussinesq . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 169

# CAPÍTULO 1

# Introducción

## 1.1. Notas históricas sobre la Física de Fluidos

La íntima relación entre el agua y la agricultura hace que los fluidos tuviesen importancia desde las antiguas civilizaciones de Mesopotamia y de Egipto. En la antigua Grecia se ha de destacar a Arquímedes, con diversas aplicaciones como el tornillo de Arquímedes para elevar agua. El transporte de agua mediante acueductos fue uno de los logros importantes de la ingeniería de la antigua Roma; un ejemplo, de los mejores conservados, es el acueducto de Segovia, con sus 20.400 bloques sin argamasa alguna.

Es usual admitir que los fluidos, como en general la ciencia, pasaron una etapa oscura en la Edad Media, pero no se debe silenciar la aportación de la cultura árabe; así, la escuela agronómica del Califato de Córdoba, a principios del siglo XI, publicaba libros con un capítulo dedicado a un dispositivo técnico sobre el regadío, y es debido a estos conocimientos que los árabes consiguieran gran esplendor, en el siglo XII, en las vegas de Granada, Murcia y Valencia.

Fue precisamente, el fundador de la Universidad de Granada, Carlos I, quien creó la figura del alcalde de aguas en las ordenanzas de las aguas de la ciudad de Granada en 1538[1]

En el Renacimiento, Galileo encuentra que, en el equilibrio, la diferencia de presión en un líquido sólo depende de la diferencia de altura. En el siglo XVII, Torricelli estudia la velocidad de salida de un líquido por un orificio y Pascal precisa el concepto de presión. Tras las aportaciones de Newton, en el siglo XVIII, destacan, entre otros, Bernoulli (ecuación para fluidos incompresibles), Euler (ecuación de continuidad y de movimiento), Lagrange (descripción Lagrangiana y Euleriana del movimiento) y D'Alembert (tratado sobre el equilibrio y movimiento de los fluidos). En el siglo XIX, los trabajos sobre sobre fluidos viscosos que llevaron a cabo Navier y Stokes dieron lugar a la famosa ecuación que lleva el nombre de ambos.

Entre los siglos XIX y XX destacan Reynolds (turbulencia en fluidos) , Rayleigh (fluidos compresibles, sonido) Kutta y Joukoski (inicio de la aerodinámica) y Prandtl (teoría de la capa límite), entre otros.

Para un extenso contenido de este apartado se remite al lector a la bellísima obra "El agua según la Ciencia" del Prof. Enzo Levy [2]

[1]Véase la obra 'Los orígenes del regadío en España' de Eugenio Nadal Reimat (Revista de Estudios Agrosociales, nº13, pp. 7-37, 1980, editada por el Ministerio de Agricultura, Alimentación y Medio Ambiente, Madrid).

[2]"El agua según la Ciencia", Enzo Levy, Mexico: IMTA, 2001

## 1.2. Concepto de fluido. El fluido como un continuo

Sabido es que la materia se presenta, usualmente, en uno de los tres estados de agregación: sólido, líquido y gaseoso. Sin embargo, los líquidos y los gases presentan ciertas características comunes, recibiendo el nombre de fluidos. Una característica de los fluidos es la de no poseer, a diferencia de los sólidos,forma propia,sino que poseen la forma del recipiente que los contiene. En los fluidos, la fuerzas de atracción entre moléculas son pequeñas, no existiendo fuerzas restitutivas como existen en los sólidos deformables. Una diferencia entres los líquidos y los gases es que los primeros mantienen el volumen, mientras que los segundos, no. La hipótesis más utilizada en el estudio de los fluidos es la de considerarlos como cuerpos continuos. Esto significa el poder utilizar el cálculo diferencial e integral clásico, dotándose así el estudio de los fluidos de tan ventajosas herramientas. Es cierto que dicha hipótesis conlleva algunas limitaciones pues, a veces, ha de tenerse en cuenta necesariamente la estructura molecular de los fluidos, aunque ello no merma en las múltiples aplicaciones de la Física de Fluidos. El considerar un cuerpo como un continuo significa que las diversas magnitudes físicas pueden considerarse como funciones continuas y, con derivadas continuas, en general. Las dimensiones del fenómeno considerado han de ser mucho mayores que, obviamente, la escala molecular. A veces, incluso en escala macroscópica, la consideración de continuo tiene sus limitaciones; así, las estructuras de hormigón, que poseen dimensiones mucho mayores que el grano del material, pueden estudiarse como cuerpos continuos, pero no así las grietas en las mismas, cuya anchura puede ser el orden de tamaño del grano del hormigón.

Para cuantificar estas limitaciones a su aplicación, se puede utilizar el llamado número de Knudsen, $K_n$, dado por $K_n = \frac{s}{L}$, donde $s$ es el recorrido libre medio y $L$ es la longitud característica de interés del fenómeno físico. Si $K_n < 1$, es aplicable el tratamiento del continuo, y si $K_n \geq 1$, no lo será, siendo necesario entonces un tratamiento microscópico. Como ejemplo, el recorrido libre medio del aire en condiciones normales de presión y temperatura es del orden de $6 \times 10^{-6}$ cm. Una onda sonora de frecuencia igual a 10 kHz, en dichas condiciones, tiene una longitud de onda de 3,3 cm; así, $K_n = 1{,}8 \times 10^{-6}$. Por tanto, las ondas acústicas de frecuencias bajas (por ejemplo, las ondas audibles) pueden ser tratadas con el modelo del continuo. Sin embargo, para ondas de frecuencia muy alta, $\lambda \approx s$, y, por tanto, estas ondas han de estudiarse mediante modelos moleculares. Para líquidos y sólidos, $s \approx 10^{-7}$ cm, y para gases, $s \approx 10^{-6}$ cm.

## 1.3. Representación Euleriana y Lagrangiana

En el estudio de un fenómeno físico, el observador utiliza un sistema de referencia al cual referir las leyes físicas, aunque debe quedar claro que el sistema de referencia es algo impuesto por el observador y que las leyes de los fenómenos físicos son invariantes frente a los cambios de esta subjetividad que constituye el sistema de referencia elegido (recuérdense los principios de la Relatividad y los conceptos del Análisis Dimensional).

En el estudio cinemático se utilizan dos tipos de coordenadas, lo que da lugar a las llamadas representación Lagrangiana y representación Euleriana, según las diferentes magnitudes físicas vengan dadas en función de unas u otras coordenadas.

Si consideramos un determinado sistema de coordenadas, $(x^1, x^2, x^3)$, cuyo origen es independiente del movimiento del cuerpo continuo, que puede ser, o no, ortogonal, y ser, o no ser, cartesiano, a cada punto material del continuo se le hacen corresponder unos determinados valores de $x^i$.[3] Cuando las distintas expresiones vienen dadas en función de estas coordenadas $(x^1, x^2, x^3)$ y del tiempo, se dice que se está utilizando la representación Euleriana; así, la velocidad: $v^i = v^i(x^j, t)$, la temperatura: $T = T(x^j, t)$, etc.

En la representación Lagrangiana, las coordenadas de cada punto del continuo en movimiento, $(x^1, x^2, x^3)$, vienen dadas en función de las coordenadas que dicho punto tenía en un determinado instante, $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ (coordenadas Lagrangianas) y del tiempo. Así, se escribe:

$$\begin{aligned} x^1 &= x^1(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t) \\ x^2 &= x^2(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t) \\ x^3 &= x^3(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t), \end{aligned}$$

donde $\xi^1, \xi^2, \xi^3$ indican las coordenadas del punto material del continuo en el instante $t = 0$, que se suele asignar en la teoría de la deformación al instante en que el cuerpo no está deformado, o con mayor precisión, al instante en el cual se conocen los parámetros geométricos del cuerpo. Las anteriores

[3]Estas coordenadas reciben el nombre de Eulerianas, nombre debido al hecho de que Euler las utilizó sistemáticamente en sus estudios de Hidrodinámica.

expresiones pueden escribirse, en forma compacta, así:

$$\boxed{x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)}\,.$$

Como puede observarse, en la representación Lagrangiana la atención se centra en el estudio de una partícula en un determinado instante, $t$, cuya posición es función de la historia de la misma.

En el paso de una representación a otra, un volumen $V_0$ pasará a ser un volumen $V$; una superficie $S_0$, a una superficie $S$; una curva $L_0$, a una curva $L$; una superficie cerrada, a una superficie cerrada, y una curva cerrada, a una línea cerrada. Esto ha de ser así, y no se puede suponer, por ejemplo, que un volumen se transforme en un punto, pues físicamente se admite que la materia es indestructible e impenetrable. Matemáticamente, lo anterior se traduce en el hecho de que las funciones $x^i = x^i(\xi^j, t)$ son univaluadas y el Jacobiano de la transformación es distinto de cero; es decir:

$$J = \det(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^1}{\partial \xi^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^3} \end{vmatrix} \neq 0,$$

lo que permite escribir:

$$\boxed{\xi^i = \xi^i(x^1, x^2, x^3, t)}\,.$$

Se puede afirmar, por tanto, que el paso de la formulación Lagrangiana a la representación Euleriana es, simplemente, un problema de funciones implícitas, problema cuya solución se tiene asegurada dadas las hipótesis de continuidad que se han expuesto.

Alternativamente ¿cómo se pasa de la representación Euleriana a la representación Lagrangiana? Supóngase conocida la velocidad del continuo en la representación Euleriana:

$$\begin{aligned}
v^1 &= \frac{dx^1}{dt} = v^1(x^1, x^2, x^3, t) \\
v^2 &= \frac{dx^2}{dt} = v^2(x^1, x^2, x^3, t) \\
v^3 &= \frac{dx^3}{dt} = v^3(x^1, x^2, x^3, t).
\end{aligned}$$

Estas ecuaciones constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, de modo que su solución vendrá dada en función de $t$ y de tres constantes de integración, $C_i$, que serán determinadas por las condiciones iniciales. Así, dichos parámetros $C_i$ no son más que los valores de $x^i$ en el instante inicial, por ejemplo, $t = 0$; es decir, son precisamente las coordenadas Lagrangianas. Se han obtenido, pues, las expresiones $x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$, y teniendo en cuenta esto, toda magnitud que venga expresada en función de $x^i$ y $t$ (representación Euleriana) podrá expresarse en función de $\xi^1, \xi^2, \xi^3$ y $t$ (representación Lagrangiana).

A continuación se procede a tratar con lo que se conoce con el nombre de derivada local o Euleriana y con la derivada total o Lagrangiana.

Sea una magnitud $F$ expresada en la representación Lagrangiana, $F(\xi^i, t)$. Su derivada respecto al tiempo será: $(\frac{\partial F}{\partial t})_{\xi^i}$, que representa el cambio por unidad de tiempo de la función asociada a una partícula concreta definida por las variables $\xi^i$. Si $F$ viene dada en función de las variables Eulerianas,

$F(x^i, t)$ se puede escribir así:

$$F(x^1, x^2, x^3, t) = F[x^1(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t), x^2(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t), x^3(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t), t]$$

y por tanto:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{\xi^j} = \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{x^j} + \frac{\partial F}{\partial x^1}\left(\frac{\partial x^1}{\partial t}\right)_{\xi^j} + \frac{\partial F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x^2}{\partial t}\right)_{\xi^j} + \frac{\partial F}{\partial x^3}\left(\frac{\partial x^3}{\partial t}\right)_{\xi^j}.$$

Al ser $\frac{\partial x^i}{\partial t}$ calculadas para $\xi^j$ fijos, se puede afirmar que son, precisamente, las componentes de la velocidad de la partícula i-ésima, $v^i$; luego la expresión anterior puede reescribirse así:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{\xi^j} = \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{x^j} + v^i \frac{\partial F}{\partial x^i},$$

donde se considera el criterio de Einstein de suma de índices repetidos. Al primer miembro, $(\frac{\partial F}{\partial t})_{\xi^j}$, se le suele denotar por $\frac{dF}{dt}$ y recibe el nombre de derivada total o Lagrangiana. Al término $(\frac{\partial F}{\partial t})_{x^i}$ se le denomina derivada local o Euleriana, denotándose usualmente por $\frac{\partial F}{\partial t}$. Así, se tiene:

$$\boxed{\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + v^i \frac{\partial F}{\partial x^i}}.$$

La derivada total, $\frac{dF}{dt}$, indica la variación con el tiempo de la magnitud $F$ para una partícula concreta del medio continuo. La derivada local, $\frac{\partial F}{\partial t}$, indica la variación con el tiempo de $F$ para un punto fijo del espacio. Como se observa, en general, ambas derivadas no coinciden debido al término $v^i \frac{\partial F}{\partial x^i}$, que recibe el nombre de derivada convectiva, y depende de la velocidad de los puntos materiales del continuo respecto al sistema fijo de las coordenadas Eulerianas o espaciales, $x^i$.

Para comprender mejor el significado de ambas derivadas, total y local, así como para aclarar las diferencias entre la descripción Lagrangiana y la Euleriana, se expone lo que sigue:

En la Mecánica se suele trabajar con sistemas de referencia que acompañan al cuerpo en su movimiento; así, en el estudio del sólido rígido es usual referir magnitudes físicas a un sistema de coordenadas con origen en el centro de masas del sólido y cuyos ejes se mueven solidarios con el cuerpo. Un sistema tal también se usa en la Mecánica de los Medios Continuos, sistema que se llama sistema ligado o sistema Lagrangiano, por poder considerar al triedro $\xi^1, \xi^2, \xi^3$ para dicho sistema. Así, cualquier punto del continuo mantendrá fijas sus coordenadas respecto a tal sistema $\xi^1, \xi^2, \xi^3$. Naturalmente, a lo largo del tiempo, las líneas coordenadas del sistema ligado variarán de forma si el sistema es deformable. Se comprende fácilmente que la derivada total corresponde a la derivada de la magnitud respecto al sistema ligado, mientras que la derivada local lo es respecto al sistema $x^1, x^2, x^3$; así, si $v^i$ es cero; es decir, si no se mueve el continuo respecto al sistema $x^i$, ambas derivadas serán iguales.

Para aclarar aún más estos conceptos se introduce el siguiente ejemplo. Supóngase que una persona se mueve con velocidad $\vec{v} = (2x^2, -x^1, 0)$, donde $x^i$ son coordenadas cartesianas y Eulerianas, en el seno de un campo de temperaturas, $T = x^1 t - x^2 t^2$, donde $t$ es el tiempo. Se desea saber el cambio de temperatura que experimenta esa persona en la unidad de tiempo, así como las coordenadas Eulerianas en función del tiempo y de las coordenadas Lagrangianas, $\xi^i$. Considerando la ecuación de la derivada total de una función (en este caso la temperatura, $T$) como suma de la derivada local y de la derivada convectiva, $\frac{dT(x^j,t)}{dt} = \frac{\partial T(x^j,t)}{\partial t} + v^i \frac{\partial T(x^j,t)}{\partial x^i}$, se tiene que $\frac{dT(x^j,t)}{dt} = \frac{\partial T(x^j,t)}{\partial t} = x^1(1+t^2)$, pues la derivada local o Euleriana es $(\frac{\partial T(x^j,t)}{\partial t})_{x^j}$; es decir, derivar la temperatura para una posición fija ($x^i$ constantes), que sería igual a $x^1 - 2x^2 t$ y, en el término convectivo, $v^i(x^j,t) = \frac{dx^i}{dt}$, es $v^1 = 2x^2$ y $v^2 = -x^1$, con $\frac{\partial T(x^j,t)}{\partial x^1} = t$ y $\frac{\partial T(x^j,t)}{\partial x^2} = -t^2$.

Para obtener las expresiones $x^i = x^i(\xi^j, t)$, derivando respecto del tiempo $v^1$ se tiene $\ddot{x}^1 = 2\dot{x}^2$, y como $\dot{x}^2 = -x^1$, se obtiene $\ddot{x}^1 + 2x^1 = 0$, que es una ecuación de movimiento armónico simple con frecuencia angular igual a $\sqrt{2}$, por lo que $x^1 = Asen(\sqrt{2}t + \varphi_0)$. Análogamente, $x^2 = \frac{1}{2}A\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t + \varphi_0)$. Como $\xi^1 = x^1(t=0) = Asen\varphi_0$ y $\xi^2 = x^2(t=0) = \frac{1}{2}A\sqrt{2}\cos\varphi_0$, desarrollando el seno (coseno) de la suma, se obtiene $x^1 = \cos\sqrt{2}t\xi^1 + \sqrt{2}sen(\sqrt{2}t)\xi^2$ y $x^2 = -\frac{1}{2}sen\sqrt{2}t\xi^1 + \cos(\sqrt{2}t)\xi^2$.