JESÚS MATAIX SANJUÁN
CARLOS A. LEÓN ROBLES
GLORIA LEÓN ROBLES

FUNDAMENTOS PROYECTIVOS DE LA INGENIERÍA GRÁFICA

GRANADA
2012

FUNDAMENTOS PROYECTIVOS DE LA INGENIERÍA GRÁFICA.
ISBN: 978-84-338-5474-2. Depósito legal: GR./3.462-2012
Edita: Editorial Universidad de Granada. Campus Universitario de Cartuja. Granada.
Preimpresión: TADIGRA, S.L. Granada.
Diseño de cubierta: José María Medina Alvea.
Imprime: Imprenta Comercial. Motril. Granada.

Printed in Spain *Impreso en España*

ÍNDICE

PRÓLOGO 13

TEMA 1. CONCEPTOS BÁSICOS..15

1.1. Propiedades geométricas 15
1.2. Formas geométricas 17
1.3. Transformaciones geométricas 19
1.3.1. Definición 19
1.3.2. Elementos dobles. Transformación idéntica 19
1.3.3. Producto de transformaciones. Transformación involutiva 19
1.3.4. Clasificación de las transformaciones 20
1.3.5. Congruencia e igualdad 20
1.4. Elementos impropios 20
1.4.1. Punto impropio 20
1.4.2. Recta impropia 21
1.4.3. Plano impropio 22
1.5. Formas impropias 22
1.6. Incidencia. Principio de dualidad 23
1.7. Ordenación y separación de elementos 24
1.8. Operaciones proyectivas 24
1.9. Perspectividad 26
1.10. Formas superpuestas 28

TEMA 2. FORMAS DE PRIMERA CATEGORÍA 29

2.1. Introducción 29
2.2. Series rectilíneas 29
2.2.1. Segmento orientado. Abscisas naturales 29
2.2.2. Razón simple de tres puntos colineales. Abscisa baricéntrica 31
2.2.3. Razón doble de cuatro puntos colineales. Abscisa proyectiva 33
2.3. Haces de rectas y planos 39
2.3.1. Razón simple de tres rectas de un haz 39
2.3.2. Razón doble de cuatro rectas de un haz 41
2.3.3. Razón doble de cuatro planos de un haz 44
2.3.4. Correspondencia anarmónica y armónica 45
2.4. Series y haces en figuras planas 45
2.4.1. Polígonos simples y completos 45
2.4.2. Cuadrilátero completo 45
2.4.3. Cuadrivértice completo 47
2.5. Ejercicios 50
2.5.1. Enunciados 50
2.5.2. Resoluciones 53

TEMA 3. PROYECTIVIDAD ENTRE FORMAS DE PRIMERA CATEGORÍA.. 59
3.1. Definición de proyectividad 59
3.2. Teorema fundamental de la proyectividad.. 60
3.3. Clasificación de la proyectividad 61
3.4. Perspectividad de series y haces proyectivos 61
3.4.1. Perspectividad de series proyectivas 62
3.4.2. Perspectividad de haces proyectivos 62
3.5. Construcción de elementos homólogos en una homografía 63
3.5.1. Homografía entre series rectilíneas perspectivas.. 63
3.5.2. Homografía entre series rectilíneas proyectivas 64
3.5.3. Homografía entre haces de rectas perspectivos 67
3.5.4. Homografía entre haces de rectas proyectivos 68
3.6. Puntos límites.. 71
3.6.1. Series perspectivas.. 72
3.6.2. Series proyectivas 72
3.7. Construcción de elementos homólogos en una homografía de formas superpuestas 73
3.7.1. Series rectilíneas 73
3.7.2. Haces de rectas 78
3.8. Series semejantes 81
3.8.1. Definición 81
3.8.2. Propiedades 82
3.8.3. Construcción de una semejanza 82
3.9. Proyectividad entre formas de primera categoría en el espacio 85
3.10. Ejercicios 89
3.10.1. Enunciados.. 89
3.10.2. Resoluciones 94

TEMA 4. PROYECTIVIDAD ENTRE FORMAS DE SEGUNDA CATEGORÍA. HOMOLOGÍA PLANA Y AFINIDAD.. 101
4.1. Introducción 101
4.2. Correspondencia de formas de segunda categoría 101
4.3. Proyectividad de formas planas 102
4.4. Teorema fundamental de la proyectividad.. 102
4.5. Determinación de la proyectividad 103
4.6. Homografía de formas planas superpuestas 104
4.7. Homología de formas planas superpuestas 105
4.7.1. Teorema de Desargues 105
4.7.2. Generalización del Teorema de Desargues. Homología plana 106
4.7.3. Rectas límite... 107
4.7.4. Homologías particulares 110
4.7.5. Determinación y construcción de una homología 113
4.7.6. Construcción de figuras homológicas 118
4.7.7. Determinación de homologías que cumplan propiedades 122
4.7.8. Producto de homologías 126

4.8. Afinidad de formas planas superpuestas 127
4.8.1. Definición 127
4.8.2. Propiedades 127
4.8.3. Determinación y construcción de una afinidad 128
4.8.4. Construcción de figuras afines 131
4.8.5. Determinación de afinidades que cumplan propiedades 132
4.8.6. Producto de afinidades 135
4.9. Homografía de formas planas en el espacio 136
4.9.1. Homología entre formas planas perspectivas no superpuestas 136
4.9.2. Producto de homologías de eje común 137
4.9.3. Aplicaciones 139
4.10. Ejercicios 152
4.10.1. Enunciados 152
4.10.2. Resoluciones 160

TEMA 5. SERIES Y HACES DE SEGUNDO ORDEN 169
5.1. Series y haces circulares 169
5.1.1. Serie circular 169
5.1.2. Haz circular 170
5.2. Series y haces de segundo orden 170
5.2.1. Definiciones 170
5.2.2. Perspectividad entre formas de primer y segundo orden 172
5.2.3. Propiedades de las series y haces de segundo orden 172
5.3. Proyectividad entre formas elementales de segundo orden 173
5.3.1. Introducción 173
5.3.2. Proyectividad entre series y haces circulares 174
5.3.3. Proyectividad entre series y haces de segundo orden 179
5.4. Generación de las cónicas 179
5.5. Clasificación proyectiva de las cónicas 181
5.6. Teorema de Pascal 181
5.7. Aplicación del teorema de Pascal al trazado de cónicas 183
5.8. Teorema de Brianchon 186
5.9. Aplicación del teorema de Brianchon al trazado de cónicas 187
5.10. Cónicas inscritas y circunscritas a un cuadrilátero 190
5.11. Ejercicios 192
5.11.1. Enunciados 192
5.11.2. Resoluciones 196

TEMA 6. POLARIDAD PLANA 201
6.1. Polaridad plana. Generalidades 201
6.1.1. Concepto de polaridad 201
6.1.2. Definiciones 201
6.2. Polaridad respecto a una cónica 202
6.2.1. Polo y polar respecto a una cónica 202
6.2.2. Elementos conjugados 204

6.2.3. Polaridad en series y haces de segundo orden 204
6.2.4. Construcción de polos y polares 206
6.2.5. Polos y polares de elementos impropios 208
6.3. Polaridad respecto a la circunferencia 209
6.3.1. Propiedades 209
6.3.2. Construcción de polos y polares 210
6.3.3. Polaridad en circunferencias ortogonales 212
6.4. Ejercicios 214
6.4.1. Enunciados 214
6.4.2. Resoluciones 217

TEMA 7. ESTUDIO PROYECTIVO DE LAS CÓNICAS 221
7.1. Conceptos generales 221
7.1.1. Definiciones y clasificación 221
7.1.2. Generación 222
7.1.3. Centro, diámetros conjugados, ejes y vértices 225
7.1.4. Focos y directrices 225
7.2. Propiedades métricas de las cónicas 226
7.2.1. Elipse 226
7.2.2. Parábola 227
7.2.3. Hipérbola 228
7.3. Naturaleza de las cónicas generadas mediante series y haces de primer orden 229
7.3.1. Naturaleza de las cónicas generadas mediante haces de rectas proyectivos 230
7.3.2. Naturaleza de las cónicas generadas mediante series rectilíneas proyectivas 232
7.4. Homología y afinidad en las cónicas. Aspectos generales 234
7.5. Homología de la circunferencia 235
7.5.1. Elipse homológica de una circunferencia 235
7.5.2. Parábola homológica de una circunferencia 237
7.5.3. Hipérbola homológica de una circunferencia 238
7.5.4. Elipse afín de una circunferencia 240
7.6. Construcción por homología de cónicas definidas por cinco elementos 240
7.6.1. Generalidades 240
7.6.2. Número de soluciones 242
7.6.3. Cónica definida por cinco puntos 243
7.6.4. Cónica definida por cuatro puntos y una tangente 244
7.6.5. Cónica definida por cuatro puntos y la tangente en uno de ellos 244
7.6.6. Cónica definida por tres puntos y dos tangentes 246
7.6.7. Cónica definida por tres puntos, la tangente en uno de ellos y otra tangente 246
7.6.8. Cónica definida por tres puntos y las tangentes en dos de ellos 248
7.6.9. Cónica definida por dos puntos y tres tangentes 249
7.6.10. Cónica definida por dos puntos, la tangente en uno de ellos y otras dos tangentes 250
7.6.11. Cónica definida por dos puntos, las tangentes en ambos y otra tangente 251
7.6.12. Cónica definida por un punto y cuatro tangentes 252
7.6.13. Cónica definida por un punto, la tangente en este punto y otras tres tangentes 253
7.6.14. Cónica definida por cinco tangentes 254

7.7. Procedimientos proyectivos para la construcción de cónicas 256
7.7.1. Elementos que definen una cónica 256
7.7.2. Trazado de puntos de una elipse 258
7.7.3. Determinación de los ejes y focos de una elipse 262
7.7.4. Trazado de tangentes en punto de una elipse 265
7.7.5. Trazado de las tangentes a una elipse desde un punto exterior 266
7.7.6. Trazado de las tangentes a una elipse paralelas a una dirección 267
7.7.7. Intersección de recta y elipse 269
7.7.8. Trazado de puntos de una parábola 270
7.7.9. Determinación del foco y de la directriz de una parábola 274
7.7.10. Trazado de tangentes en puntos de una parábola 276
7.7.11. Trazado de las tangentes a una parábola desde un punto exterior 276
7.7.12. Trazado de la tangente a una parábola paralela a una dirección 277
7.7.13. Intersección de recta y parábola 279
7.7.14. Trazado de puntos de una hipérbola 280
7.7.15. Determinación de los focos y de los vértices de una hipérbola 288
7.7.16. Trazado de tangentes en puntos de una hipérbola 291
7.7.17. Trazado de las tangentes a una hipérbola desde un punto exterior 292
7.7.18. Trazado de las tangentes a una hipérbola paralelas a una dirección 294
7.7.19. Intersección de recta e hipérbola 295
7.8. Cónicas homológicas 296
7.8.1. Cónicas homológicas de la elipse 296
7.8.2. Cónicas homológicas de la parábola 301
7.8.3. Cónicas homológicas de la hipérbola 304
7.8.4. Elipses afines 307
7.8.5. Parábolas afines 309
7.8.6. Hipérbolas afines 310
7.9. Ejercicios 311
7.9.1. Enunciados 311
7.9.2. Resoluciones 323

TEMA 8. PROYECTIVIDAD ENTRE FORMAS DE TERCERA CATEGORÍA 339
8.1. Formas de tercera categoría 339
8.2. Proyectividad entre formas de tercera categoría 339
8.3. Homología de formas de tercera categoría 339
8.3.1. Definición 339
8.3.2. Planos límite 341
8.4. Polaridad espacial 341
8.4.1. Generalidades 341
8.4.2. Polaridad en la esfera 342

BIBLIOGRAFÍA 345

PRÓLOGO

Si el fin de la Geometría Descriptiva es representar, de forma científica, en un plano objetos de tres dimensiones, el de cada uno de los Sistemas de Representación es que, esa traslación, se haga según el procedimiento más adecuado al objeto concreto. No es lo mismo representar una pieza industrial, una obra de fábrica, o el trazado de una autopista. En el primer caso la representación lógica sería en Axonométrico, en el segundo el Diédrico, mientras que para una superficie topográfica sería el Acotado.

Los distintos Sistemas de Representación se basan en el procedimiento geométrico de proyectar los cuerpos situados en el espacio, desde un punto propio (proyección cónica) o impropio (proyección cilíndrica) y seccionar la radiación formada por uno o dos planos de proyección. Estas operaciones geométricas constituyen el fundamento de la Geometría Proyectiva.

Se desarrollan en el presente libro aquellas nociones de proyectividad que se consideran esenciales para la representación y resolución de problemas relativos a cuádricas y superficies de orden superior. Puede parecer, en un principio, que el contenido presenta un determinado grado de dificultad de comprensión por una aparente dosis de abstracción, pero la realidad es muy diferente ya que aporta unos conocimientos geométricos muy útiles y de gran aplicación en la arquitectura e ingeniería civil.

El diseño de formas estructurales exige un profundo conocimiento geométrico, métrico y de generación de las superficies que intervienen en su formación, con independencia del comportamiento estructural de los materiales que hacen posible su construcción. Los exhaustivos conocimientos geométricos de un grupo de arquitectos e ingenieros españoles del siglo pasado, Antonio Gaudí, Félix Candela y Eduardo Torroja, entre otros, y más recientemente Santiago Calatrava, se ponen de manifiesto de manera patente al estudiar todas y cada una de sus realizaciones. Tienen protagonismo especial las cubiertas laminares de espesor reducido, que envuelven grandes espacios y se sostienen a sí mismas. Cubiertas que pueden simples al estar formadas por una sola superficie, conos, cilindros, hiperboloides, paraboloides, etc., o compuestas al participar varias.

De su estudio más o menos pormenorizado, o simplemente al contemplarlas, se deduce la necesidad que los estudiantes que han optado por las carreras de arquitectura e ingeniería conozcan las características y generación de estas superficies para poder concebirlas, dibujarlas, proyectarlas y construirlas.

Se pretende en la publicación dotar al alumno de una base geométrica acorde con su futura profesión, desarrollando previamente las cuestiones teóricas, teoremas y propiedades, de forma sencilla, rigurosa y desde un punto de vista técnico, con la finalidad de adquirir los conocimientos precisos de esas formas que han de utilizar y teniendo la posibilidad de elegir el método o la aplicación que más interesa en la práctica.

Finalmente, agradecer a los autores D. Jesús Mataix Sanjuán. D. Carlos A. León Robles y Dª. Gloria León Robles, Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos y profesores del Departamento de Expresión Gráfica Arquitectónica y en la Ingeniería, los dos primeros, el esfuerzo realizado en la elaboración de la publicación. La exposición y el tratamiento la han llevado a cabo de manera sencilla y escueta, con objeto de facilitar su compresión a toda persona que acceda a esta obra como libro de texto o de consulta.

Queda patente el enfoque profesional que posee desde el punto de vista del Ingeniero Civil y del Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos. Ha sido posible gracias a la amplia y dilatada experiencia profesional de los autores, como Ingenieros de Caminos, en la redacción de proyectos y direcciones de obras de todo tipo.

Miguel Ángel León Casas

Director Departamento Expresión Gráfica Arquitectónica y en la Ingeniería

TEMA 1. CONCEPTOS BÁSICOS

1.1. Propiedades geométricas

Las **propiedades geométricas** se pueden clasificar en dos grandes grupos: **propiedades métricas**, como la distancia entre dos puntos, el ángulo que forman dos rectas, etc; y **propiedades gráficas**, como la pertenencia de un punto a una recta, que dos puntos estén alineados, que dos rectas se corten en un punto, etc.

La diferencia entre los dos tipos de propiedades geométricas queda clara si tenemos en cuenta que cuando proyectamos una figura, el resultado no tiene porqué ser del mismo tamaño (no se conservan las distancias) ni de la misma forma (no se conservan los ángulos).

Las propiedades métricas son estudiadas por la **Geometría Métrica**, y como se ha visto anteriormente en general no se conservan en proyección.

La **Geometría Proyectiva** estudia las llamadas **propiedades gráficas o proyectivas** de las figuras geométricas. Las propiedades proyectivas que se conservan en proyección se denominan **invariantes proyectivos** (por ejemplo, tangencia, incidencia, etc).

La Geometría Proyectiva nació como consecuencia del interés de los pintores del Renacimiento por plasmar en lienzos planos los objetos y las figuras tridimensionales tal como son, recreando la sensación de profundidad y la posición relativa de los objetos, a diferencia de sus antecesores de la Edad Media, más ligados al pensamiento religioso y poco preocupados por la imitación de la realidad. No en vano, en relación a la pintura medieval se conoce como perspectiva teológica aquella en la que el tamaño de las figuras deriva de su importancia.

Algunos de los conceptos fundamentales de la Geometría Proyectiva fueron ya formulados por los geómetras griegos, en particular los referentes a las secciones cónicas. De hecho conocían perfectamente las deformaciones que se producen al observar un objeto desde determinados puntos de vista.

En el Renacimiento se investiga la visión que un observador tiene de una figura cuando la mira en distintas pantallas colocadas entre ambos. Así nacen la perspectiva y el estudio de las proyecciones y las secciones. Son significativos los interrogantes que plantea Leone Battista Alberti en 1435: ¿Qué relación hay entre dos secciones de la misma figura?, ¿cuáles son las propiedades comunes a dos secciones cualesquiera?

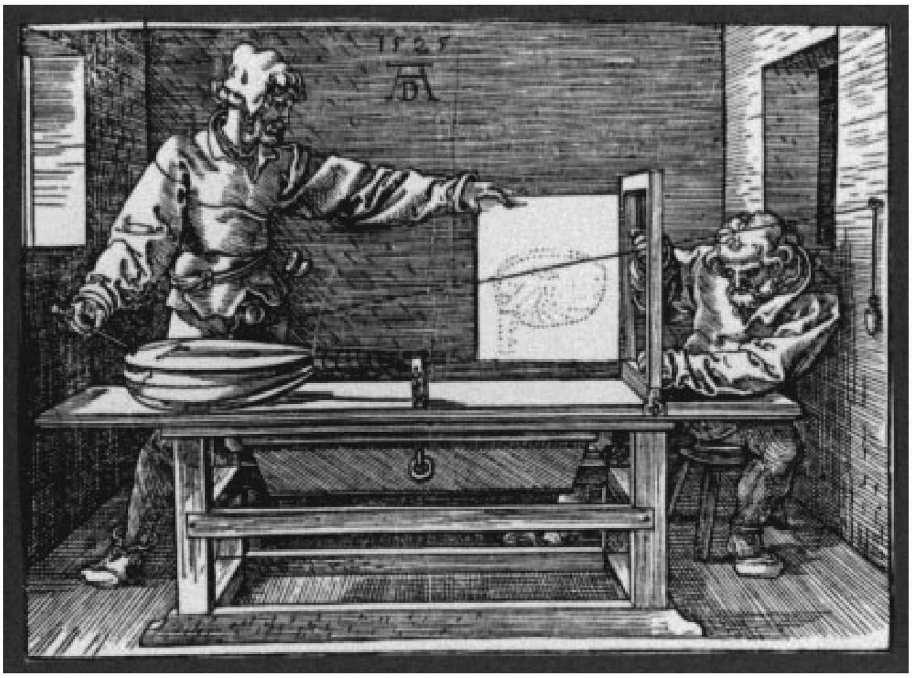


Ilustración 1.1: "Hombre dibujando un laúd". Alberto Durero, 1525
El grabado simboliza una "máquina de dibujar" ideada por Durero, que permite representar la perspectiva cónica de un objeto mediante un hilo tensado que pasa por una polea fijada a la pared, con un plomo en este extremo y un puntero en el otro mediante el que se señalan los puntos del objeto, que se van dibujando en un papel sujetado por un portillo

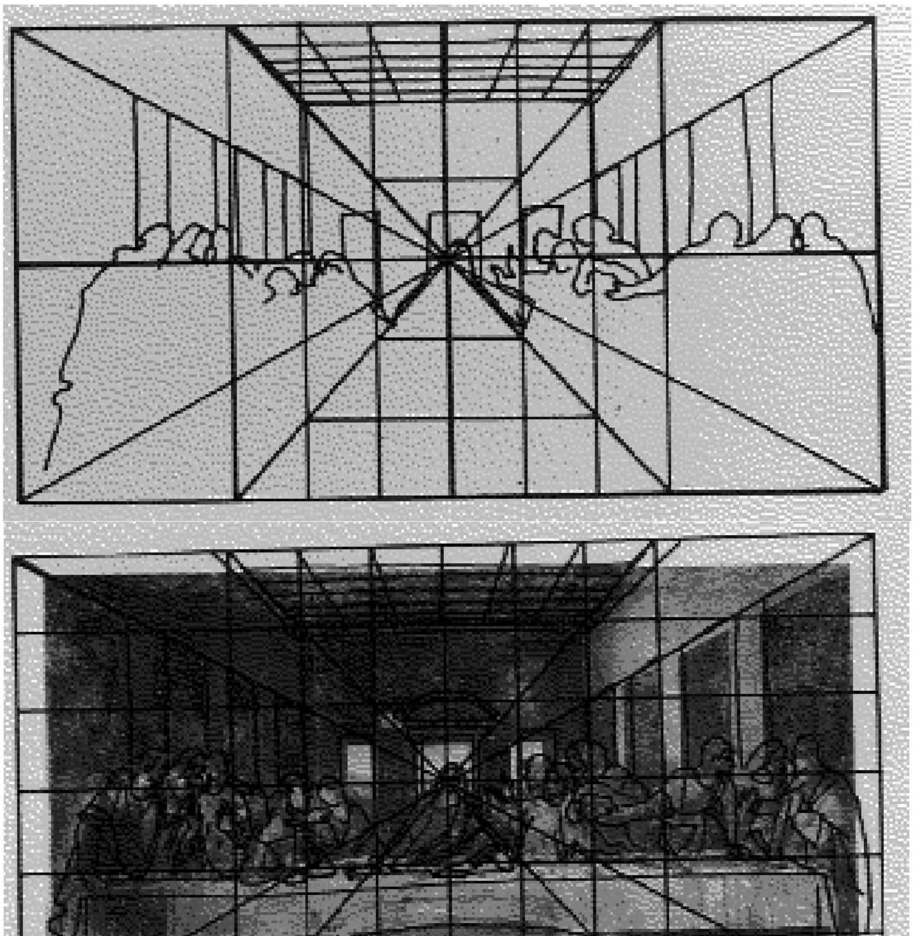


***Ilustración 1.2**: Composición proyectiva de "La Última Cena" (Leonardo Da Vinci, 1495-1497)*

La relación de la Geometría Proyectiva con la Ingeniería Civil es por tanto indudable ya que sienta las bases de todos los Sistemas de Representación, en particular de las proyecciones centrales tan empleadas en la actualidad, destacando sus aplicaciones en la infografía y en la realización de estudios de visibilidad en carreteras.

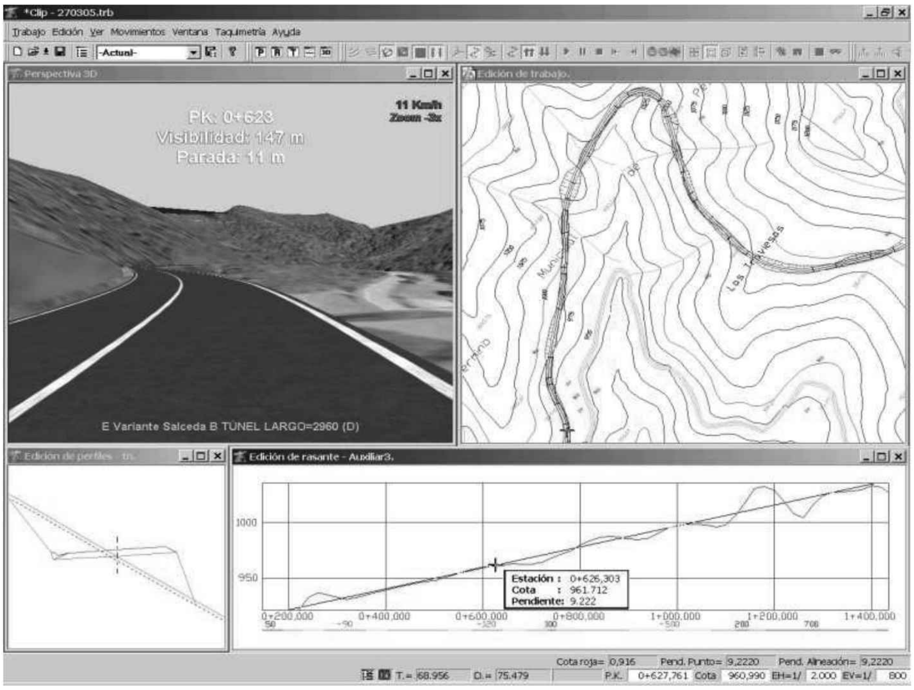


***Ilustración 1.3**: Captura de ventana de la aplicación CLIP para diseño de obras lineales. Este programa hace uso de la proyección cónica para realizar estudios de visibilidad, fundamentales en el proyecto de carreteras y autovías.*
(Cortesía de TOOL, S.A.)

1.2. Formas geométricas

Los **elementos fundamentales** de la Geometría son el **punto**, la **recta** y el **plano**. Se dice que son sus elementos fundamentales puesto que son fácilmente imaginables y materializables, aunque no se pueden definir sin recurrir a su propio concepto, y en ellos se basan todos los conceptos, definiciones, propiedades y teoremas de la Geometría.

Se llama **figura geométrica** a cualquier conjunto particular de puntos, rectas y/o planos. Son figuras geométricas un segmento, un polígono (formado por vértices y lados), un prisma (formado por vértices, aristas y caras), etc.

Formas geométricas son los conjuntos continuos de infinitos elementos (puntos, rectas, planos) en los que puede suponerse contenida cualquier figura. El concepto de forma es por tanto mucho más amplio que el de figura.

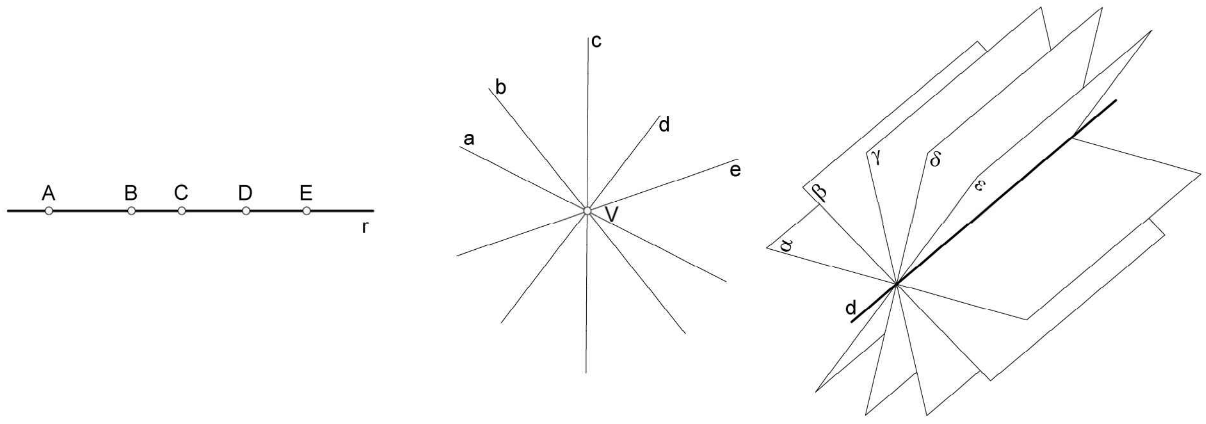
Las formas geométricas se clasifican en tres grupos:

1. **<u>Formas de primera categoría</u>** (*Figura 1.1*): constituidas por elementos de una sola especie (puntos, rectas o planos). Son formas de primera categoría:

   a) **La serie rectilínea** o conjunto de los infinitos puntos *A*, *B*, *C*… de una recta *r* (base de la serie). Son figuras de esta forma el segmento o cualquier conjunto de puntos de *r*.

   b) **El haz de rectas, haz de rayos o radiación plana**, que es el conjunto de las infinitas rectas *a*, *b*, *c*… de un plano (base del haz) que pasan por un punto *V* (vértice o centro). Son figuras de esta forma el ángulo y el haz de rayos o semirrayos en número finito.

c) El haz de planos o conjunto de los infinitos planos α, β, γ... que pasan por una recta *d* (arista del haz). Son figuras de esta forma el ángulo diedro y el haz de planos aislados o en número finito.



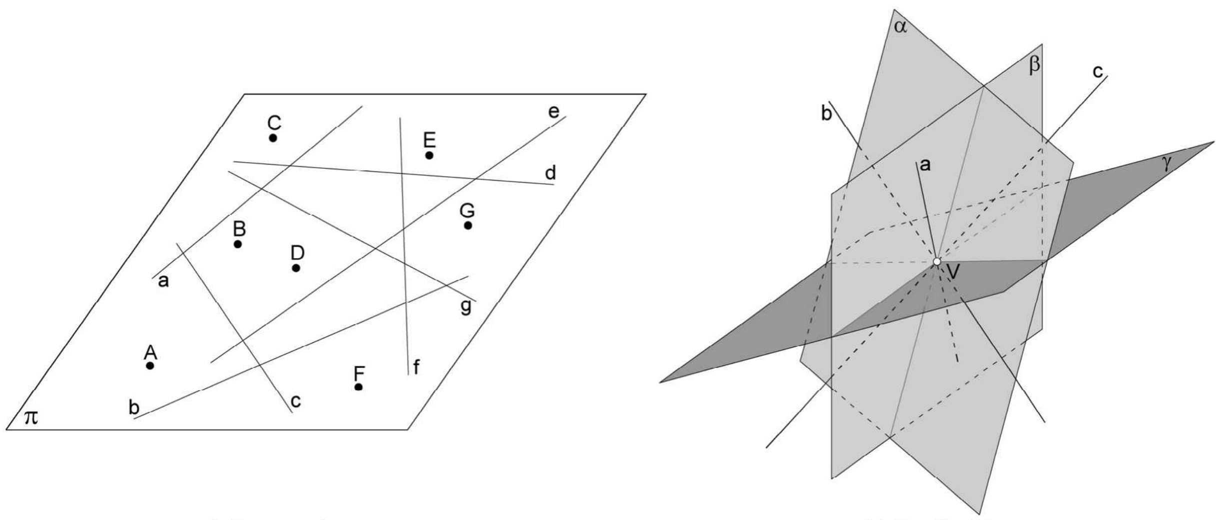
a) Serie rectilínea b) Haz de rectas c) Haz de planos

Figura 1.1: *Formas de primera categoría*

2. **Formas de segunda categoría** (*Figura 1.2*): constituidas por elementos de dos especies (puntos y rectas o rectas y planos). Son formas de segunda categoría:

   a) La forma plana o conjunto de todos los puntos y rectas de un plano π. Son figuras de esta forma la serie rectilínea, el haz de rectas y todas las figuras planas (líneas planas, polígonos, etc).

   b) La radiación o conjunto de las infinitas rectas y planos que pasan por un punto *V* (vértice de la radiación).



a) Forma plana b) Radiación

Figura 1.2: *Formas de segunda categoría*

3. **Forma de tercera categoría**: es el conjunto de los infinitos puntos, rectas y planos del espacio. A esta forma pertenecen los poliedros, las superficies curvas y regladas y, en general, todas las figuras geométricas, incluyendo las de primera y segunda categoría.

1.3. Transformaciones geométricas

1.3.1. Definición

Transformación geométrica es una operación biunívoca que a cada elemento de una forma *F* le hace corresponder un elemento de otra forma *F*', de manera que una figura *f* de *F* se transforma en una nueva figura *f*' de *F*'. Los elementos que se corresponden en la transformación se denominan **homólogos**.

Los elementos que se corresponden pueden no ser de la misma naturaleza. Existen transformaciones geométricas en que un punto se transforma en una recta o en un plano, una recta en un punto, etc.

1.3.2. Elementos dobles. Transformación idéntica

El elemento que coincide con su homólogo se denomina **elemento doble**. Por ejemplo, en la simetría central es doble el centro de simetría y cualquier recta que pase por él; en la simetría axial, el eje de simetría y cualquier recta perpendicular a éste; en la homotecia, el centro de homotecia; etc.

Si una transformación geométrica es tal que todos los elementos son dobles, esta transformación es una **identidad**. Por ejemplo, el giro de 360º, la traslación de longitud nula, etc.

1.3.3. Producto de transformaciones. Transformación involutiva

Sea la transformación geométrica T_1 que convierte la figura *f* en *f*', y la transformación T_2 que convierte *f*' en *f*''. Se denomina **producto** de las transformaciones T_1 y T_2 a la transformación $T = T_1 \times T_2$ que convierte la figura *f* en *f*'' (*Figura 1.3*).

Se denomina **transformación involutiva** o involutoria a la transformación *T** que convierte la figura *f* en *f*', y aplicada de nuevo a *f*' la convierte en una figura *f*'' idéntica a *f*. Un ejemplo de transformación involutiva es la simetría axial (*Figura 1.4*).

El simétrico de un punto *M* es *M*', y el de otro punto *N* coincidente con *M*' es *N*' que a su vez será coincidente con *M*, luego en la involución los elementos homólogos se corresponden doblemente.

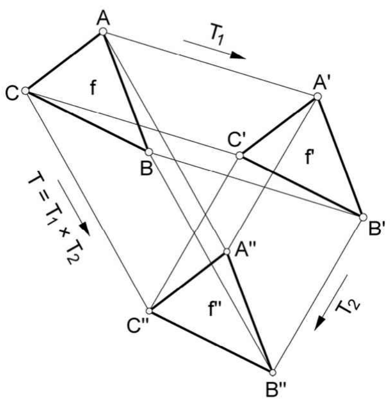


Figura 1.3: *Producto de transformaciones*

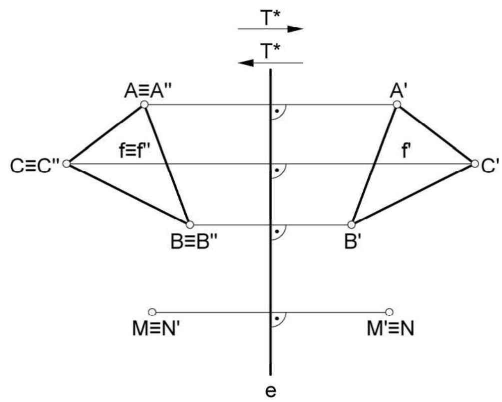


Figura 1.4: *Transformación involutiva*

1.3.4. Clasificación de las transformaciones

En función de la relación en cuanto a forma y tamaño de una figura y su transformada, las transformaciones geométricas se clasifican en:

a) **Transformaciones isométricas**: son aquellas en las que los elementos homólogos conservan las dimensiones y los ángulos. Estas transformaciones, también denominadas movimientos, son la simetría, la rotación y la traslación.

b) **Transformaciones isomórficas**: son aquellas en las que los elementos homólogos conserva la forma y los ángulos, pero no las dimensiones. Existe proporcionalidad entre las dimensiones de las figuras primitiva y transformada. Un ejemplo de estas transformaciones es la homotecia.

c) **Transformaciones anamórficas**: son aquellas en las que los elementos homólogos no tienen la misma forma. Ejemplos de estas transformaciones son la inversión, la homología, etc.

1.3.5. Congruencia e igualdad

Dos formas planas, supuestas indeformables, son congruentes si al superponerse mediante un movimiento en su mismo plano coinciden. Así, dos figuras congruentes son iguales, pero dos figuras iguales pueden no ser congruentes: por ejemplo, los triángulos *f* y *f'* de la figura 1.4 son iguales puesto que sus ángulos coinciden y sus lados son de igual longitud, pero no son congruentes puesto que no existe ningún movimiento en su plano que permita superponer *f* sobre *f'*.

Una transformación en la que las figuras homólogas sean congruentes, o iguales, es isométrica.

1.4. Elementos impropios

1.4.1. Punto impropio

Sean dos rectas *r* y *s* coplanarias y secantes, *I* su punto de intersección, y dos puntos *A* y *B* pertenecientes a *r* y *s* respectivamente. Si giramos las rectas *r* y *s* alrededor de los puntos *A* y *B* de forma que el ángulo α que forman se va haciendo más pequeño, el punto *I* de intersección se aleja progresivamente. En la posición límite en que el ángulo de las rectas *r* y *s* es cero, es decir, cuando dichas rectas son paralelas, el punto *I* de intersección se ubica en el infinito. Se dice entonces que dicho punto es un **punto impropio o punto del infinito**, y se simboliza como I_∞ (*Figura 1.5*).

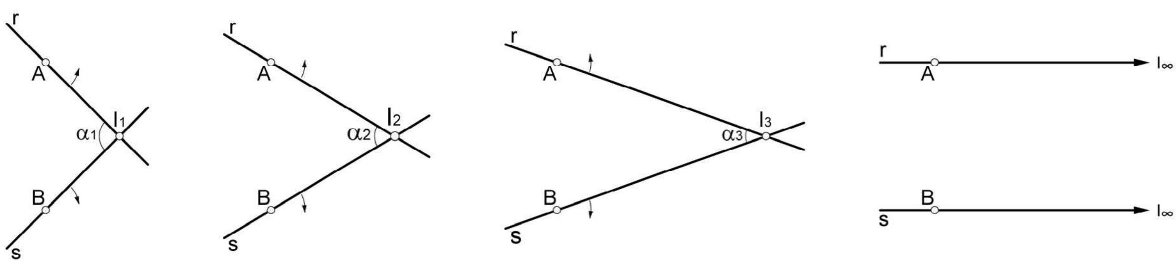


Figura 1.5: *Concepto de punto impropio o del infinito*

Por tanto dos rectas coplanarias siempre se cortan, ya sea en un punto propio (rectas secantes) o impropio (rectas paralelas).

Consideremos ahora una recta *r*, un punto *I* de la misma y dos puntos *A* y *B* exteriores a *r*. Definimos las rectas $s \equiv AI$ y $t \equiv BI$. Si vamos alejando el punto *I* hacia, por ejemplo, la derecha respecto a su posición inicial, los ángulos que forman las rectas *r*, *s* y *t* van haciéndose progresivamente más pequeños. En el límite, cuando el punto *I* se sitúa en el infinito (I_∞), resulta que las rectas *r*, *s* y *t* son de nuevo paralelas. Por tanto, **todas las rectas paralelas entre sí comparten su punto impropio** (*Figura 1.6*).

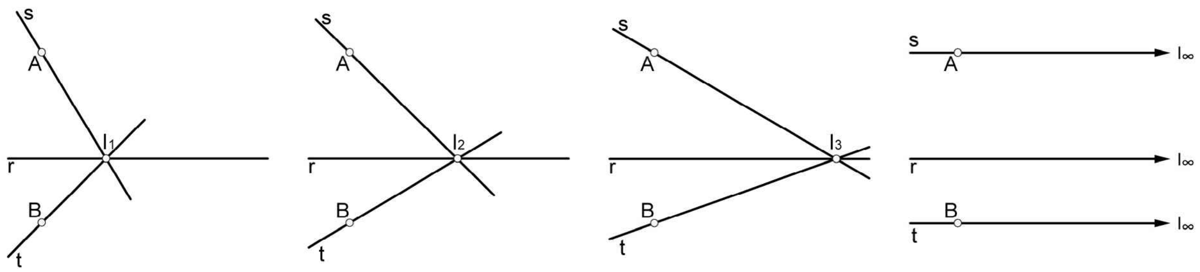


Figura 1.6: *Concepto de punto impropio o del infinito*

Puesto que todas las rectas paralelas entre sí tienen la misma dirección, se puede entonces definir el **punto impropio como la dirección de una recta**. Por tanto, la recta determinada por un punto *A* y un punto impropio I_∞ es la paralela *r* a la dirección I_∞ trazada por A (*Figura 1.7*).

1.4.2. Recta impropia

El hecho de que el punto del infinito de una recta (propia) represente su dirección implica que aquélla sólo tiene un punto impropio. En consecuencia **dos puntos impropios definen una recta impropia**.

Sean dos rectas *r* y *s* pertenecientes a un plano π, *A* su punto de intersección y I_∞ y J_∞ sus respectivos puntos del infinito. La recta $r_\infty \equiv I_\infty J_\infty$ determinada por dichos puntos del infinito será por tanto impropia. A la recta r_∞ se le denomina **recta impropia del plano π**, y cualquier otra recta de este plano tiene su punto impropio en r_∞ (*Figura 1.8*).

Se considera ahora un punto *B* no perteneciente al plano π y las rectas *t* y *u*, paralelas respectivamente a *r* y *s*, que pasan por *B* determinando así el plano $\Delta \equiv [t,u]$ paralelo a π. Puesto que son paralelas, *r* y *t* tienen el mismo punto impropio I_∞, al igual que *s* y *u* comparten a J_∞, por lo que los planos paralelos π y Δ comparten su recta impropia r_∞ (*Figura 1.9*).

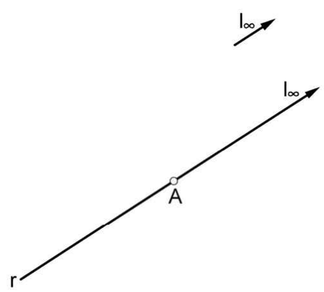


Figura 1.7: *Recta definida por un punto propio A y otro impropio I_∞*

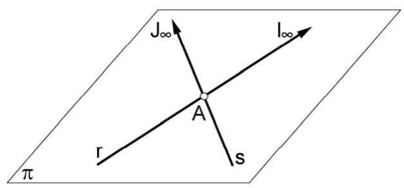


Figura 1.8: *Concepto de recta impropia de un plano*

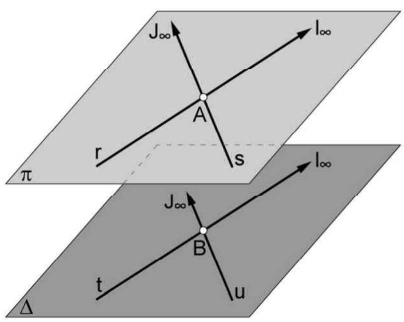


Figura 1.9: *Planos paralelos comparten recta impropia*

Como lo anterior se seguirá cumpliendo para cualquier plano paralelo a π, se deduce que **todos los planos paralelos entre sí comparten su recta impropia**, y por tanto se puede definir la **recta impropia como la orientación de un plano**.

Puesto que dos planos paralelos tienen en común su recta impropia, ésta será su recta intersección, por lo que dos planos no coincidentes siempre se cortan, ya sea en una recta propia (planos secantes) o impropia (planos paralelos).

Se sabe que un plano puede ser determinado por una terna de puntos. Dicha terna puede estar formada por tres puntos propios, por dos puntos propios y uno impropio o por un punto propio y dos impropios (*Figura 1.10*).

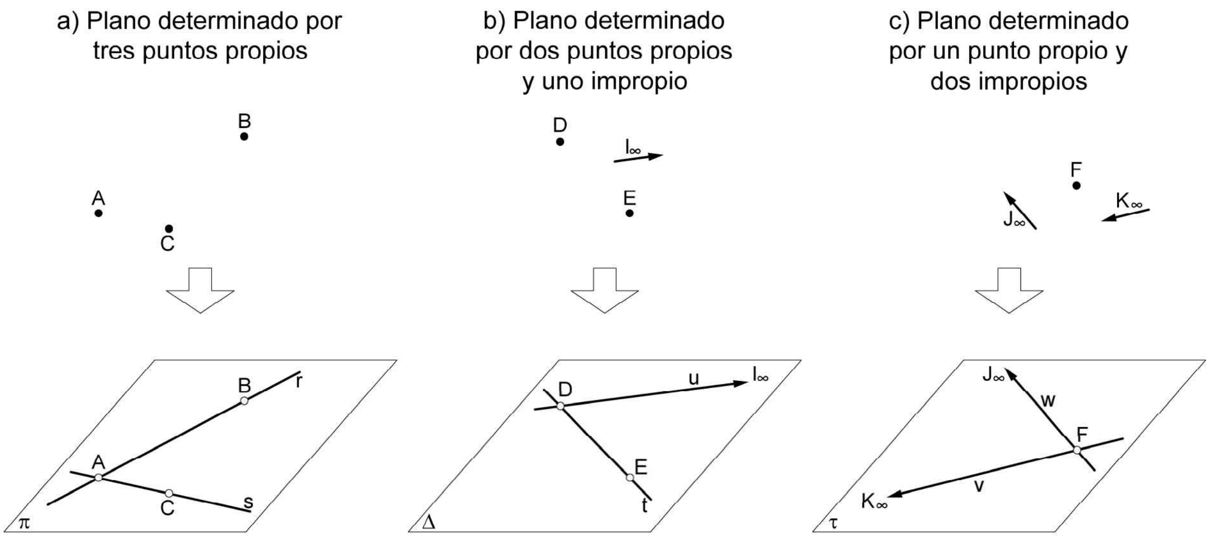


Figura 1.10: *Plano determinado por tres puntos*

1.4.3. Plano impropio

Sean dos planos no paralelos α y β y su recta intersección *i*. Las rectas impropias de α y β, r_∞ y s_∞ respectivamente, se cortarán en un punto impropio I_∞ que es el punto del infinito de la recta *i*. Las rectas r_∞ y s_∞ determinan el **plano impropio**, que es el **conjunto de todos los puntos impropios y rectas impropias del espacio**.

Obsérvese que los elementos impropios de recta, plano y espacio (de una, dos y tres dimensiones, respectivamente), son punto, recta y plano (cero, una y dos dimensiones).

1.5. Formas impropias

Las formas geométricas estudiadas en el apartado 1.2 se basan en puntos, rectas y planos propios. Haciendo intervenir los elementos impropios descritos en el apartado anterior se obtienen las **formas impropias**, que se clasifican en dos grupos:

1. **<u>Formas impropias de primera categoría</u>** (*Figura 1.11*):

   a) **La serie rectilínea impropia o recta impropia de un plano**, formada por los puntos impropios de las rectas de un plano. Se trata de una serie rectilínea cuya base es impropia.

b) **El haz impropio de rectas o haz de rectas de vértice impropio**, que es el conjunto de las infinitas rectas coplanarias y paralelas entre sí.

c) **El haz impropio de planos o haz de planos de arista impropia** o conjunto de los infinitos planos paralelos entre sí.

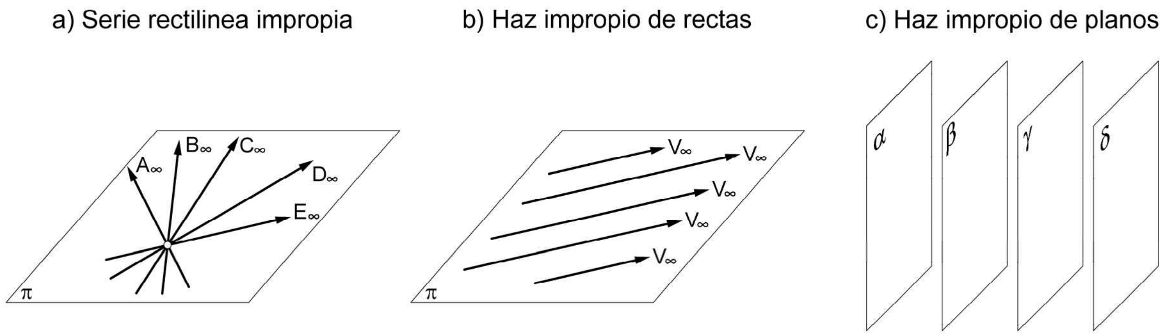


Figura 1.11: *Formas impropias de primera categoría*

2. <u>**Formas impropias de segunda categoría**</u>

a) **La forma plana impropia o plano impropio**, formado por los infinitos puntos y rectas impropios del espacio.

b) **La radiación impropia o de vértice impropio,** o conjunto de las infinitas rectas y planos que pasan por un punto *V* impropio, por lo que son paralelos entre sí.

1.6. Incidencia. Principio de dualidad

El **principio de dualidad** afirma que las proposiciones que se establecen en Geometría Proyectiva, por ejemplo en el plano, siguen teniendo significado y los teoremas siguen siendo válidos intercambiando *el punto* por *la recta*.

De esta manera, las proposiciones: "dos puntos determinan una recta que contiene a los dos puntos''; y "dos rectas determinan un punto que pertenece a las dos rectas'', son **duales** o **recíprocas**.

Por otro lado, el verbo **incidir** es equivalente a **pertenecer** y a **contener**. Así, la expresión "punto perteneciente a una recta'' es equivalente a "punto incidente con una recta'', y "recta que contiene a un punto'' a "recta incidente con un punto''.

Así las proposiciones anteriores pueden resumirse en la siguiente: "*dos puntos (rectas) determinan una recta (punto) incidente con ellos*''.

Dos formas de primera categoría admiten una definición dual común:

a) Una serie rectilínea (haz de rectas) es el conjunto de los infinitos puntos (rectas) incidentes con una recta (punto) denominada base de la serie (vértice del haz).

b) Una serie rectilínea (haz de planos) es el conjunto de los infinitos puntos (planos) incidentes con una recta denominada base de la serie (arista del haz).

c) Un haz de rectas (planos) es el conjunto de las infinitas rectas (planos) incidentes con un punto (recta) denominado vértice (arista) del haz.

Las formas de segunda categoría también son duales: una forma plana (radiación) es el conjunto de los infinitos puntos (rectas) y rectas (planos) incidentes con un plano (punto) denominado plano base (vértice de la radiación).

1.7. Ordenación y separación de elementos

Como una recta *r* tiene un único punto impropio I_∞ puede ser imaginada como una circunferencia de radio infinito y de extremos unidos en I_∞. Por tanto la recta puede ser recorrida en toda su longitud, partiendo de un punto propio *A* cualquiera, pasando por I_∞ y volviendo nuevamente a *A*. Ello se conoce como **disposición natural o circular de los puntos en la recta proyectiva**.

Dos puntos propios *A* y *B* fijos pertenecientes a una recta *r* determinan en ella dos segmentos complementarios, uno finito $\overline{\mathrm{AB}}$ y otro infinito por contener a I_∞.

Sean los puntos de *r C*, situado en el segmento finito $\overline{\mathrm{AB}}$, y *D*, situado fuera de él. Se dice que los puntos *C* y *D* separan a *A* y *B* si aquéllos están en segmentos complementarios determinados por éstos, y a la inversa. Si *C* y *D* quedan ambos en el segmento finito, o en el segmento infinito, entonces no se separan.

Igual consideración puede hacerse con las rectas de un haz de rectas y con los planos de un haz de planos.

1.8. Operaciones proyectivas

La representación gráfica de los objetos, y por tanto la Geometría Descriptiva, se basa en dos operaciones básicas, que son **proyectar** y **cortar**. Proyectar consiste en trazar las visuales (rayos proyectantes) de los puntos que definen los objetos desde el punto de vista, y cortar es seccionar dichas visuales con el plano de proyección o plano del cuadro (*Figura 1.12*).

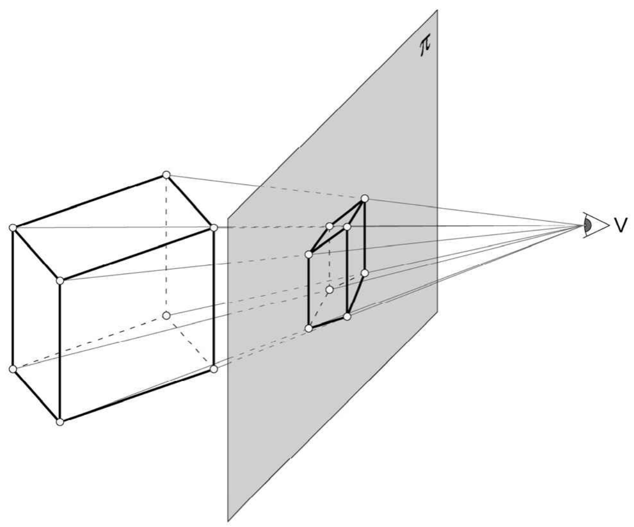


Figura 1.12: *Representación de un cubo desde el punto de vista V sobre el plano de proyección* π

El punto de vista *V* puede ser propio o impropio. En el primer caso la proyección se denomina **central** y en el segundo **cilíndrica**.

Son centrales las proyecciones gnomónica, central propiamente dicha y cónica.

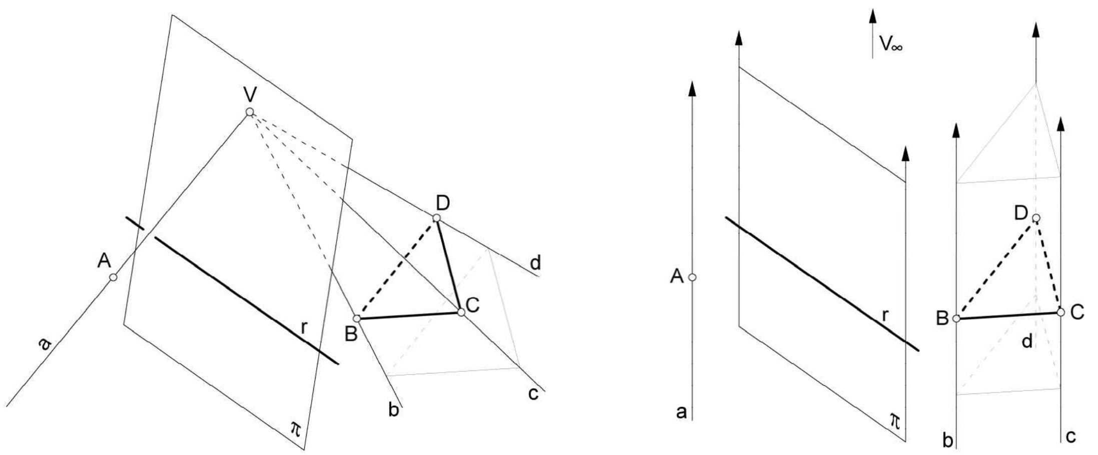
Se llama **proyección cilíndrica ortogonal** a aquella cuyo punto de vista es impropio y en la que los rayos visuales son perpendiculares al plano de proyección. En caso contrario se trata de una **proyección cilíndrica oblicua**. Son proyecciones cilíndricas ortogonales el sistema diédrico, el de planos acotados, la perspectiva isométrica, etc, y proyecciones cilíndricas oblicuas las perspectivas caballera y militar.

Proyectar y cortar son también las operaciones fundamentales de la Geometría Proyectiva. Si bien en Descriptiva siempre se proyecta desde un punto sobre un plano, en Proyectiva se considera también la proyección desde una recta y la sección por (proyección sobre) una recta.

A continuación se detalla en qué consiste proyectar desde puntos y rectas y cortar por rectas y planos.

<u>Proyección desde un punto</u> (*Figura 1.13*)

- **Proyectar un punto *A* desde un punto *V*** es trazar la recta $a \equiv VA$, denominada recta proyectante.
- **Proyectar una recta *r* desde un punto *V*** es trazar el plano $\alpha \equiv [V,r]$, denominado plano proyectante.
- Por tanto, proyectar una figura formada por puntos y rectas desde *V* es trazar las rectas y planos proyectantes de aquéllos. La radiación así formada es la *proyección* o *perspectiva* de la figura y *V* el *centro de proyección*.



a) Proyección desde un punto propio b) Proyección desde un punto impropio

Figura 1.13: *Proyección desde un punto*

<u>Proyección desde una recta</u> (*Figura 1.14*)

- **Proyectar un punto *A* desde una recta *r*** es trazar el plano $\alpha \equiv [r,A]$ que determinan.
- **Proyectar una recta *b* desde otra *r***, coplanaria con ella, es trazar el plano $\beta \equiv [r,a]$ que determinan.

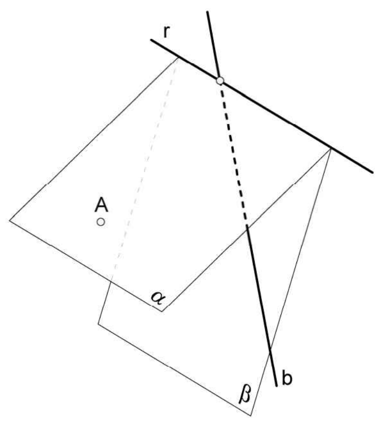


Figura 1.14: *Proyección desde una recta*

<u>Sección por un plano</u> (***¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.***)

- **Cortar una recta *a* por un plano π** es determinar la intersección o traza *A* de *a* con π.
- **Cortar un plano β por otro π** es determinar la intersección o traza *b* de β con π.

- Por tanto, cortar una figura formada por planos y rectas por un plano π es determinar las trazas de dichos planos y rectas con π. La figura plana formada por dichas trazas se llama *sección* y π *plano secante* o *sección*.

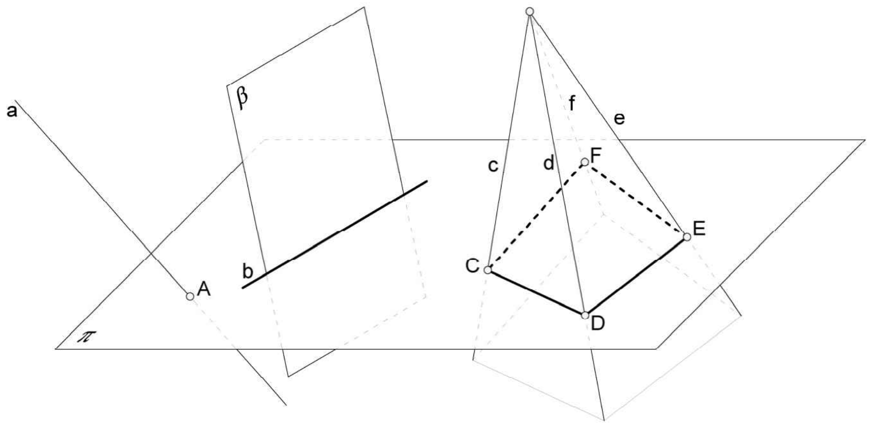


Figura 1.15: *Sección por un plano*

<u>**Sección por una recta**</u> (*Figura 1.16*)

- **Cortar un plano α por una recta *r*** es determinar la intersección o traza *A* de α con *r*.

- **Cortar una recta *b* por otra *r***, coplanaria con ella, es determinar el punto *B* intersección de ambas.

Como conclusión de todo lo anterior, **proyectar una figura desde un punto o una recta sobre una recta o un plano** supone cortar por éstos la proyección de dicha figura desde aquéllos.

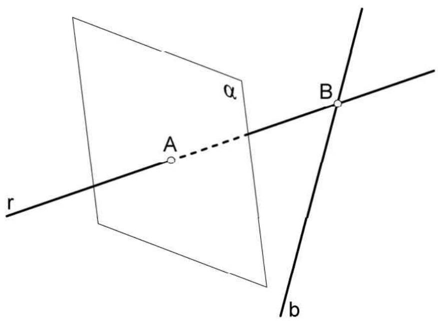


Figura 1.16: *Sección por una recta*

1.9. Perspectividad

Se denomina **perspectividad** a la correspondencia que existe entre dos secciones o dos proyecciones de una forma de primera categoría, o entre una forma y su sección o su proyección. Las formas que así se corresponden se denominan **formas perspectivas**.

Según esta definición son perspectivas (*Figura 1.17*):

a) Las series rectilíneas *r* (*A*, *B*, *C*…) y *r'* (*A'*, *B'*, *C'*…) por ser dos secciones del haz de rectas *V* (*a*, *b*, *c*…). El vértice *V* del haz de rectas es el **centro perspectivo de las series**.

b) Los haces de rectas *V* (*a*, *b*, *c*…) y *V'* (*a'*, *b'*, *c'*…) por ser dos secciones del haz de planos *r* (α, β, γ…). La arista *r* del haz de planos es el **eje perspectivo de los haces**.

c) Los haces de rectas *V* (*a*, *b*, *c*…) y *V'* (*a'*, *b'*, *c* …) por ser dos secciones de la serie rectilínea *r* (*A*, *B*, *C*…). La base *r* de la serie rectilínea es el **eje perspectivo de los haces**.

d) Los haces de planos *r* (α, β, γ...) y *r'* (α', β', γ'...) por ser dos proyecciones del haz de rectas *V* (*a*, *b*, *c*...) de plano π desde las rectas *r* y *r'*, concurrentes en *V*. El plano π del haz de rectas es el **plano central perspectivo de los haces de planos**.

e) El haz de rectas *V* (*a*, *b*, *c*...) y la serie rectilínea *r* (*A*, *B*, *C*...) por ser forma (haz de rectas) y sección (serie rectilínea obtenida al cortar el haz con la recta *r*), o forma (serie rectilínea) y proyección (haz de rectas obtenido al proyectar la serie desde *V*).

f) El haz de planos *r* (α, β, γ...) y la serie rectilínea *s* (*A*, *B*, *C*...) por ser forma (haz de planos) y sección (serie rectilínea obtenida al cortar el haz con la recta *s*), o forma (serie rectilínea) y proyección (haz de planos obtenido al proyectar la serie desde *r*).

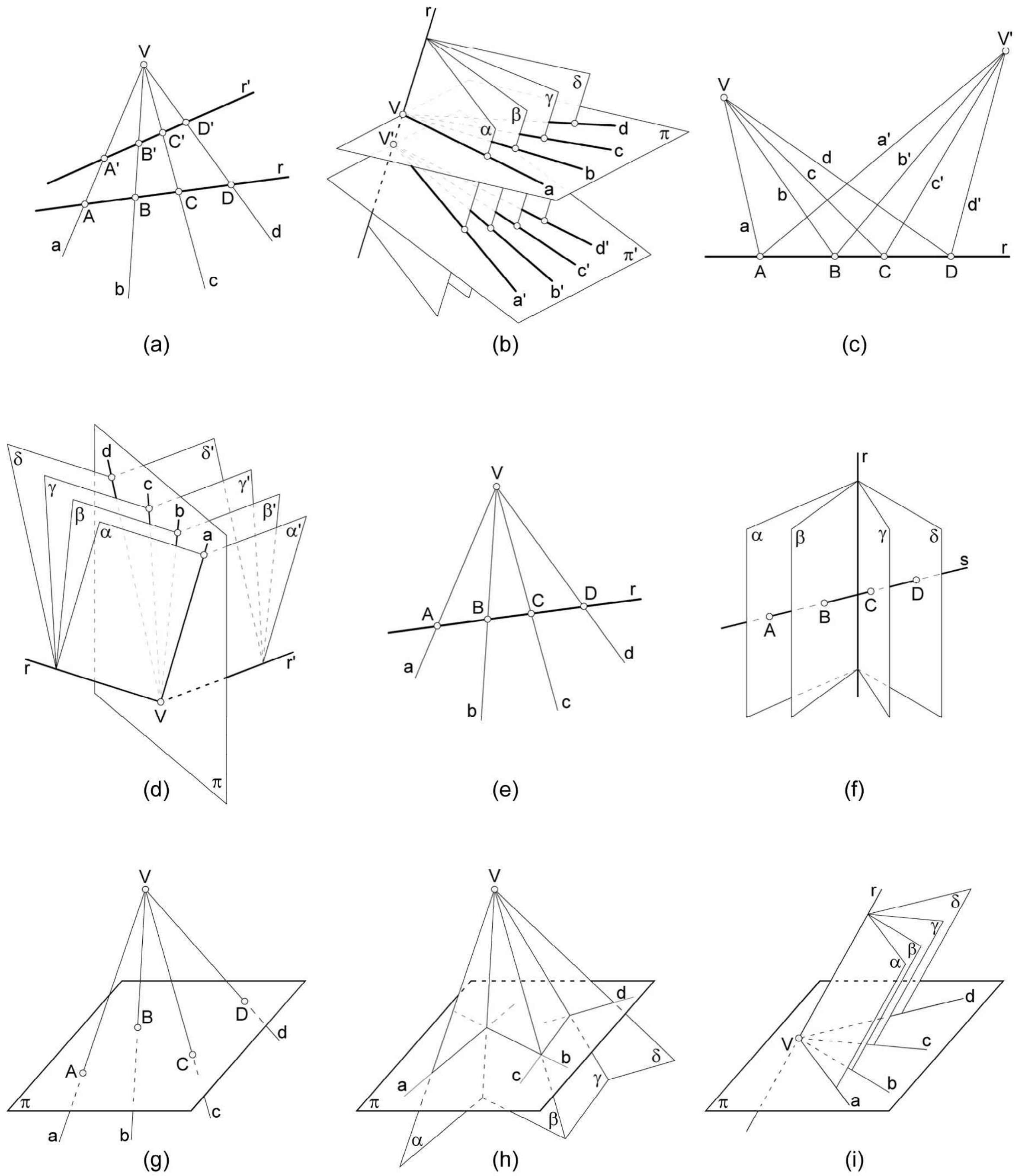


Figura 1.17: *Formas perspectivas*

g) El plano punteado (formado por puntos) π (*A*, *B*, *C*…) y el haz de rectas *V* (*a*, *b*, *c*…) por ser forma (haz de rectas) y sección (puntos del plano π obtenidos al cortar el haz por dicho plano), o forma (puntos del plano π) y proyección (haz de rectas obtenido al proyectar los puntos de π desde *V*).

h) El plano reglado (formado por rectas) π (*a*, *b*, *c*…) y la radiación de planos *V* (α, β, γ…) por ser forma (radiación) y sección (rectas del plano π obtenidas al cortar la radiación por dicho plano), o forma (rectas del plano π) y proyección (radiación obtenida al proyectar las rectas de π desde *V*).

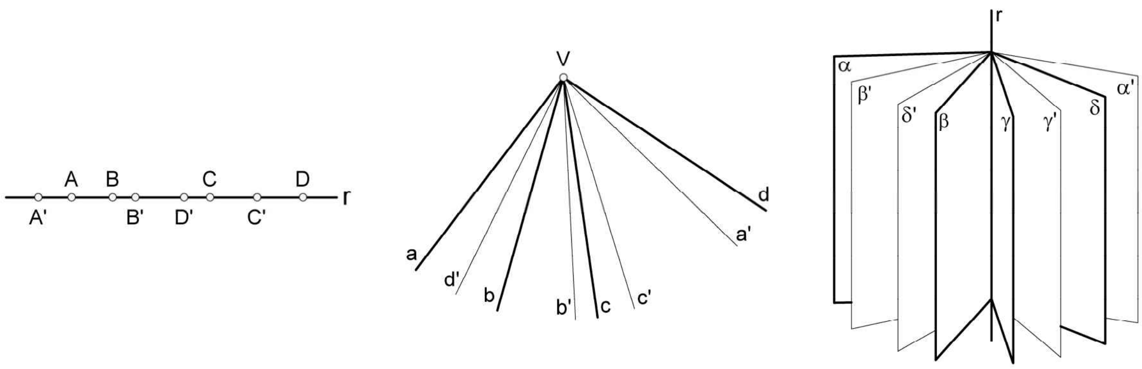
i) El haz de rectas *V* (*a*, *b*, *c*…) de plano π y el haz de planos *r* (α, β, γ…) por ser forma (haz de planos) y sección (haz de rectas obtenido al cortar el haz de planos por el plano π), o forma (haz de rectas) y proyección (haz de planos obtenido al proyectar el haz de rectas desde *r*).

1.10. Formas superpuestas

Son **formas superpuestas** aquellas que, teniendo igual categoría y clase, tienen la misma base.

Formas superpuestas de primera categoría (*Figura 1.18*)**:**

- Dos **series rectilíneas** son superpuestas si tienen la misma base: *r* (*A*, *B*, *C*…) y *r* (*A'*, *B'*, *C'*…).
- Dos **haces de rectas** coplanarias son superpuestos si tienen el mismo vértice (haces concéntricos): *V* (*a*, *b*, *c*…) y *V* (*a'*, *b'*, *c'*…).
- Dos **haces de planos** son superpuestos si tienen la misma arista: *r* (α, β, γ…) y *r* (α', β', γ'…).



a) Series rectilineas superpuestas

b) Haces de rectas superpuestos

c) Haces de planos superpuestos

Figura 1.18: *Formas superpuestas de primera categoría*

Formas superpuestas de segunda categoría:

- Dos **formas planas** son superpuestas si su plano es común.
- Dos **radiaciones** son superpuestas si su vértice es común (radiaciones concéntricas).