

RAFAEL ORTEGA RÍOS

MODELOS MATEMÁTICOS

GRANADA  
2013

© RAFAEL ORTEGA RÍOS.  
© UNIVERSIDAD DE GRANADA.  
MODELOS MATEMÁTICOS.  
ISBN: 978-84-338-5561-9. Depósito legal: GR/1.414-2013  
Edita: Editorial Universidad de Granada,  
Campus Universitario de Cartuja. Granada.  
Preimpresión: TADIGRA, S.L. Granada  
Diseño de cubierta: José María Medina Alvea.  
Imprime: Gráficas La Madraza, Albolote, Granada.

*Printed in Spain*

*Impreso en España*

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra sólo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos –[www.cedro.org](http://www.cedro.org)–), si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.

# Prólogo

Este libro está dirigido a los estudiantes de los primeros cursos de la carrera de Matemáticas. Probablemente la mayoría de las herramientas matemáticas ya les serán conocidas y el objetivo será entender cómo se pueden emplear en otras disciplinas científicas. Cuando se piensan las matemáticas como una parte de la cultura, surgen nuevas metáforas que ayudan a entender mejor el significado de los teoremas y a formular nuevas preguntas. Acostumbramos a imaginar que el vector  $v = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  es un punto del espacio euclídeo; en este libro también será un perfil genético, la pirámide de edad de una población estructurada por grupos o la distribución de masas de una marcha aleatoria sobre los vértices de un triángulo. Por eso esta asignatura pretende ser un viaje hacia afuera de las matemáticas, y también hacia adentro.

Los estudiantes van a encontrar muchos temas que les son conocidos: espacios vectoriales y aplicaciones lineales, números complejos, matrices, límites, probabilidades, polinomios, funciones reales de variable real, máximos y mínimos, cónicas, funciones trigonométricas, grupos y alguna cosa más. Con todo eso estudiaremos modelos en Economía (Lección 1), en Biología (Lección 2) y en Óptica (Lección 3). Por último discutiremos la construcción de escalas musicales para comprender mejor aquello del Do, Re, Mi, Fa, Sol... (Lección 4).

Las aplicaciones de las matemáticas son increíblemente variadas y hay por tanto muchas posibilidades a la hora de construir una asignatura como esta. He procurado elegir modelos que procedan de distintas disciplinas y que ilustren las matemáticas en su conjunto, pero al fin y al cabo se ha tratado de una selección bastante subjetiva. El proceso de elaboración del texto ha sido largo. Durante bastantes años enseñé a alumnos de otras carreras y con ellos aprendí mucho de lo que hay en las páginas que siguen. En el año 2003 volví a la carrera de Matemáticas, con una asignatura nueva que se llamó "Modelos matemáticos de la Ciencia". Los apuntes de entonces son el origen de las tres primeras lecciones. Algunos alumnos de esa época me preguntaban por las conexiones con la Música, una cuestión que me resultaba muy atractiva y de la que lo ignoraba todo. Por eso empecé a estudiar esa añeja parte del Quadrivium y, con la llegada del nuevo plan de estudios, incorporé la lección sobre música.

Queda claro que mis antiguos alumnos son en gran parte culpables de que haya escrito este libro, pero también hay profesores a los que debo mencionar. He compartido la asignatura con Pedro Torres y Antonio Ureña y los dos me han hecho sugerencias para mejorar el texto; James Ward me habló hace bastante tiempo del libro

”Perfect Form”, que fue clave para preparar la lección 3; Pablo Amster me envió su libro ”Matemática, maestro” y me animó a preparar la lección 4; Alessandro Fonda leyó y corrigió las primeras notas que escribí sobre Música. También la edición y la presentación cuentan y en ese capítulo debo mencionar a Antonio López Carmona, a Antonio Ureña de nuevo, y a mi mujer, Consuelo, que ha preparado las figuras; seguramente ella ha sido la otra culpable de que escriba este libro.

# Lección 1

## La ecuación lineal en diferencias

### 1.1. Introducción

Empezamos con tres ejemplos:

#### Progresiones geométricas

Son sucesiones del tipo

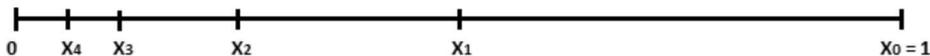
$$\{x_0, x_0r, x_0r^2, x_0r^3, \dots, x_0r^n, \dots\}$$

con término general  $x_n = x_0r^n$ . Si  $x_0 \neq 0$  y  $r \neq 0$  se cumple  $\frac{x_{n+1}}{x_n} = r$  y el número  $r$  se denomina la razón.<sup>1</sup> Preferimos la fórmula

$$x_{n+1} = rx_n$$

que define una progresión geométrica general.

Pensemos en el ejemplo  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$



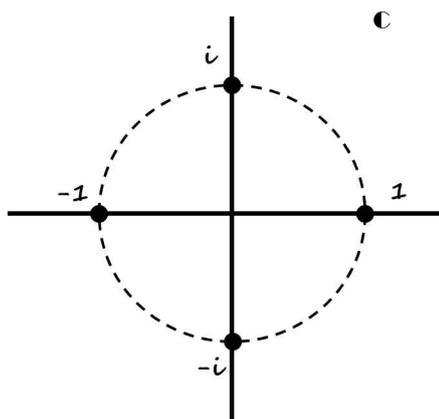
Las progresiones con razón  $r \in ]0, 1[$  pueden servir para modelar fenómenos en los que una cantidad tiende a desaparecer: rebotes de una pelota contra el suelo o desintegración radiactiva. Pensemos ahora en la progresión  $1, 3, 9, 27, \dots, 3^n, \dots$ . Las progresiones con razón  $r \in ]1, \infty[$  sirven para modelar crecimientos rápidos: interés bancario, crecimiento de una población o un organismo en el periodo inicial, entre otros.

<sup>1</sup>cociente de dos números, una de las acepciones de la palabra *razón*

Una observación importante: tiene sentido considerar progresiones geométricas con números complejos. Todas las fórmulas para las progresiones reales (término general, producto, suma) siguen siendo válidas en el caso complejo. En realidad la teoría de progresiones se puede presentar en cualquier cuerpo conmutativo. Como ejemplo podemos suponer  $x_0 = 1$  y  $r = i$

$$1, i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, \dots$$

Esta progresión tiene periodo 4.



Calculamos la parte real e imaginaria,

$$\operatorname{Re}(i^n) : \overbrace{1, 0, -1, 0, 1, \dots} \quad \operatorname{Im}(i^n) : \overbrace{0, 1, 0, -1, 0, \dots}$$

y observamos que estas sucesiones tienen periodo 4 pero **no** son progresiones geométricas.

**Ejercicio.** Construye una progresión geométrica compleja que tenga periodo 27.

### La sucesión de Fibonacci

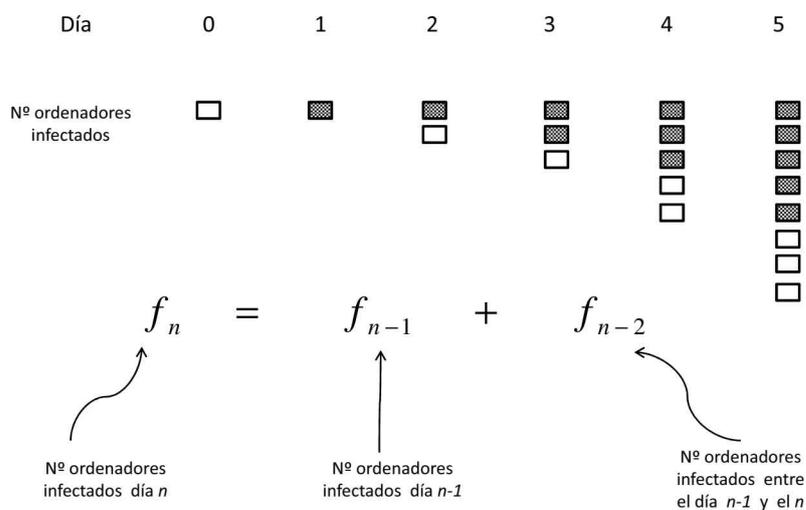
$$f_n : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

Los dos primeros términos son uno y los restantes se obtienen al sumar los dos anteriores. En fórmulas,

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 2, f_0 = f_1 = 1.$$

Imaginemos un virus informático que, una vez alojado en el ordenador, permanece inerte el primer día y después infecta una computadora cada jornada.<sup>2</sup>

<sup>2</sup>En el siglo XIII Fibonacci utilizó otra metáfora para introducir su sucesión: “un hombre tiene una pareja de conejos juntos en un lugar cerrado y se pretende saber cuántos se crían a partir de este par en un año si su naturaleza es parir otro par cada mes, y los nacidos también paren desde el segundo mes”



### Repetición de una operación con la calculadora

Usamos una calculadora científica en el modo radianes y escribimos un número cualquiera. Cuando se presiona la tecla coseno de manera reiterada

$$\boxed{\text{COS}} + \boxed{\text{COS}} + \boxed{\text{COS}} + \boxed{\text{COS}} + \dots$$

aparecen en la pantalla los términos de una sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$ . Obedecen la ley

$$\boxed{x_{n+1} = \text{COS } x_n}$$

y el término inicial  $x_0$  es el número que se escribió al empezar.

**Ejercicio.** Experimenta el proceso anterior para distintas elecciones de  $x_0$ . ¿Qué comportamiento asintótico se observa? Se puede demostrar que la sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  siempre tiene límite. Dando esto por supuesto prueba que dicho límite tiene que ser el número 0'7390851332152...

¿Qué tienen en común estos tres ejemplos?

Son procesos iterativos que vienen regulados por ecuaciones en diferencias,

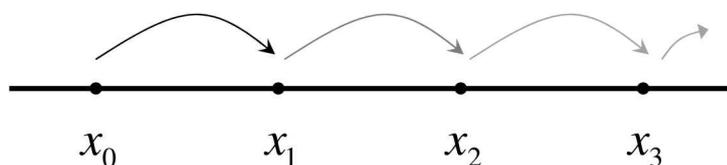
$$x_{n+1} = rx_n \tag{1.1}$$

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \tag{1.2}$$

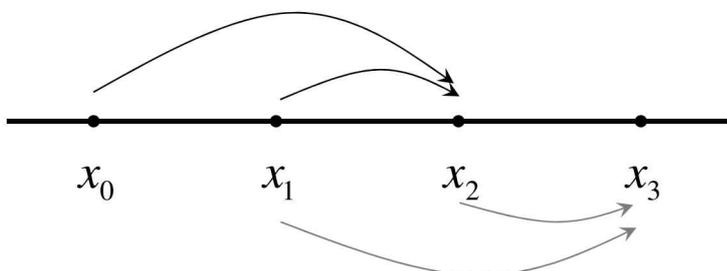
$$x_{n+1} = \text{COS } x_n, \tag{1.3}$$

válidas para  $n \geq 0$ . Las ecuaciones primera y tercera son de un paso (primer orden) mientras que la segunda es de dos pasos (segundo orden).

El número de condiciones iniciales está ligado al orden: en (1.1) o (1.3) podemos arrancar con un solo número  $x_0$ ,



en cambio para la ecuación (1.2) debemos prescribir dos números  $x_0$  y  $x_1$ .



En esta lección estudiaremos clases de ecuaciones lineales que incluyen a (1.1) y (1.2). La tercera ecuación es **no** lineal y no la vamos a estudiar en este curso.

**Ejercicio.** Define de manera precisa la clase de ecuaciones en diferencias de orden  $p \geq 1$ . Define también la sub-clase de ecuaciones lineales.

## 1.2. La ecuación lineal de primer orden

Vamos a estudiar

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \beta, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

donde  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  son números dados. Diremos que es una ecuación *completa* si  $\beta \neq 0$  y *homogénea* si  $\beta = 0$ .

En primer lugar observamos que esta ecuación engloba la teoría de progresiones. Para  $\alpha = 1$  obtenemos las progresiones aritméticas con diferencia  $\beta$ ,

$$x_{n+1} = x_n + \beta.$$

Las soluciones son  $x_n = x_0 + n\beta$ .

Para  $\beta = 0$  encontramos las progresiones geométricas de razón  $\alpha$ ,

$$x_{n+1} = \alpha x_n.$$

Ya sabemos que las soluciones en este caso son de la forma  $x_n = c\alpha^n$  donde  $c \in \mathbb{C}$  es una constante arbitraria.

Si  $\alpha \neq 1$  y  $\beta \neq 0$  las soluciones no serán progresiones. Para calcularlas hacemos algunas observaciones:

- La ecuación admite una única solución constante.

Buscamos un número  $x_*$  de manera que  $x_n = x_*$  sea solución. Al sustituir en la ecuación

$$x_* = \alpha x_* + \beta \Rightarrow x_* = \frac{\beta}{1 - \alpha}.$$

- Suponemos  $x_n = z_n + x_*$ , entonces la sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  es solución de la ecuación completa  $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$  si y sólo si  $\{z_n\}_{n \geq 0}$  es solución de la ecuación homogénea  $z_{n+1} = \alpha z_n$ .

Supongamos que  $x_n$  es solución de la ecuación completa, teniendo en cuenta la relación entre  $x_n$  y  $z_n$  y la definición de  $x_*$

$$z_{n+1} = x_{n+1} - x_* = \alpha x_n + \beta - x_* = \alpha x_n + \beta - (\alpha x_* + \beta) = \alpha(x_n - x_*) = \alpha z_n,$$

para  $n \geq 0$ , y  $z_n$  es solución de la homogénea. El recíproco queda como ejercicio.

A partir de estas observaciones encontramos todas las soluciones de la ecuación completa cuando  $\alpha \neq 1$ , estas son

$$x_n = c\alpha^n + x_*, \quad c \in \mathbb{C}.$$

Ajustaremos la constante  $c$  a la condición inicial  $x_0$ ; para ello hacemos  $n = 0$  en la fórmula anterior,

$$x_n = c\alpha^n + x_*, \quad n = 0 \Rightarrow x_0 = c + x_*, \quad c = x_0 - x_*$$

$$\boxed{x_n = (x_0 - x_*)\alpha^n + x_*, \quad n \geq 0}$$

**Nota.** En el caso especial  $\alpha = 0$  estas fórmulas pierden su sentido para  $n = 0$ ; todas las soluciones son de la forma  $\{x_0, x_*, x_*, x_*, \dots, x_*, \dots\}$ .

**Ejemplo.**  $x_{n+1} = ix_n + 1$ ,  $x_0 = i$ .

En este caso  $\alpha = i \neq 1$ ,  $\beta = 1$ . Buscamos en primer lugar todas las soluciones de la ecuación.

Solución constante:

$$x_* = ix_* + 1 \Rightarrow x_* = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{|1+i|^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Soluciones de la homogénea:

$$z_{n+1} = iz_n \Rightarrow z_n = ci^n.$$

Todas las soluciones de la completa:

$$x_n = z_n + x_* = ci^n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \quad c \in \mathbb{C}.$$

Una vez hecho esto ajustamos la constante  $c$ ,

$$n = 0 \rightarrow i = x_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + c, \quad c = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Solución: 
$$x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)i^n$$

Veamos que esta ecuación compleja es equivalente a un sistema real. Escribimos

$$x_n = u_n + iv_n$$

donde  $u_n = \operatorname{Re}(x_n)$ ,  $v_n = \operatorname{Im}(x_n)$  son las nuevas incógnitas (reales). Se cumple

$$u_{n+1} + iv_{n+1} = i(u_n + iv_n) + 1 = iu_n - v_n + 1.$$

Igualando parte real y parte imaginaria,

$$\begin{cases} u_{n+1} = -v_n + 1, \\ v_{n+1} = u_n, \end{cases}$$

con condiciones iniciales  $u_0 = 0$ ,  $v_0 = 1$ . Tomando las partes real e imaginaria en la fórmula para  $x_n$  vamos a encontrar la solución del sistema,

$$u_n = \operatorname{Re}(x_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{Re}(i^n) + \frac{1}{2}\operatorname{Re}(i^{n+1}) = \begin{cases} 0, & n \equiv 0, 1 \pmod{4} \\ 1, & n \equiv 2, 3 \pmod{4} \end{cases}$$

$$v_n = \operatorname{Im}(x_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{Im}(i^n) + \frac{1}{2}\operatorname{Im}(i^{n+1}) = \begin{cases} 1, & n \equiv 0, 3 \pmod{4} \\ 0, & n \equiv 1, 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

**Ejercicio.** Resuelve

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n + 1, & u_0 = 1 \\ v_{n+1} = u_n + v_n, & v_0 = 0. \end{cases}$$

### 1.3. Potencias de un número complejo y comportamiento asintótico de las soluciones

En el ejemplo anterior nos aparecían las potencias de  $i$ , que tienen un comportamiento sencillo (4-ciclo). La fórmula de *Moivre* permite entender cómo se comportan las potencias de cualquier número  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Si escribimos este número en la forma

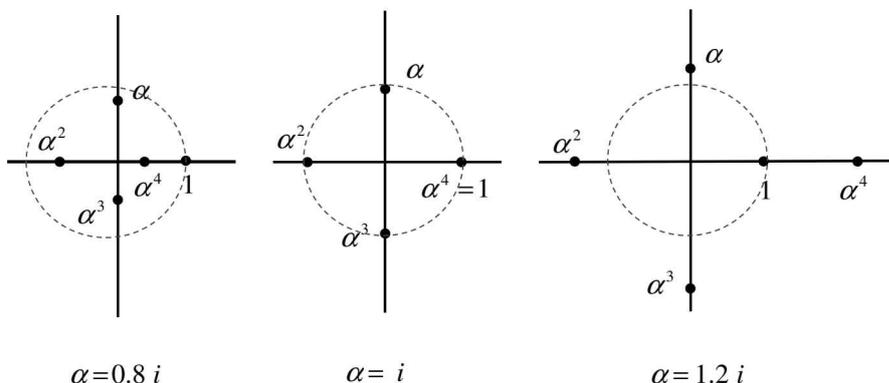
$$\alpha = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta),$$

donde  $r = |\alpha|$  es el módulo y  $\theta \in \mathbb{R}$  es uno de sus argumentos, se cumple

$$\alpha^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta).$$

Describamos algunas propiedades de la sucesión  $\{\alpha^n\}_{n \geq 0}$ ,

- Si  $|\alpha| < 1$  se cumple  $\alpha^n \rightarrow 0$ . Además, si  $\alpha$  no es real, esta sucesión converge al origen siguiendo una espiral
- Si  $|\alpha| > 1$  sus potencias se van a infinito y, si  $\alpha$  no es real, siguen una espiral divergente
- El caso  $|\alpha| = 1$  es el más delicado, las potencias  $\alpha^n$  permanecen en la circunferencia unidad  $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ . En ocasiones la sucesión  $\alpha^n$  es periódica, pero esto no siempre ocurre.



**Ejercicio.** Describe el comportamiento de las sucesiones  $\alpha^n, \beta^n$  y  $\gamma^n$  si  $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \beta = 1 + i, \gamma = \cos 1 + i \operatorname{sen} 1$ .

Ahora es fácil discutir qué hacen las soluciones de la ecuación  $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$  cuando  $n \rightarrow \infty$ ,

- $|\alpha| < 1$ . Las soluciones se expresan como

$$x_n = c\alpha^n + x_*$$

donde  $x_* = \frac{\beta}{1-\alpha}$  y  $c \in \mathbb{C}$  es una constante arbitraria. Como  $\alpha^n \rightarrow 0$ , todas las soluciones convergen al equilibrio,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_*.$$

- $|\alpha| > 1$ . Las soluciones no constantes divergen. Suponemos  $x_n = c\alpha^n + x_*$  con  $c \neq 0$ , entonces

$$|x_n| \geq |c\alpha^n| - |x_*| \rightarrow \infty,$$

pues  $|\alpha^n| = |\alpha|^n \rightarrow \infty$  y  $|c| \neq 0$ ,  $|x_*|$  son constantes. Aquí conviene observar que hemos usado la conocida desigualdad

$$|z_1 - z_2| \geq \left| |z_1| - |z_2| \right|, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

con  $z_1 = c\alpha^n$  y  $z_2 = -x_*$ .

**Nota.** Esta desigualdad suele ser útil cuando se busca una cota por abajo, en cambio la desigualdad triangular se suele usar para buscar cotas superiores.

- $|\alpha| = 1$ . Suponemos primero  $\alpha \neq 1$  y observamos que  $|x_n - x_*| = |c\alpha^n| = |c|$ . De aquí deducimos que la sucesión  $x_n$  se mueve en la circunferencia de centro  $x_*$  y radio  $|c|$ . Además, de la fórmula de Moivre deducimos que no tiene límite. El caso  $\alpha = 1$  es muy especial, ahora tenemos progresiones aritméticas  $x_n = x_0 + n\beta$  que cumplen  $|x_n| \rightarrow \infty$  si  $\beta \neq 0$ .

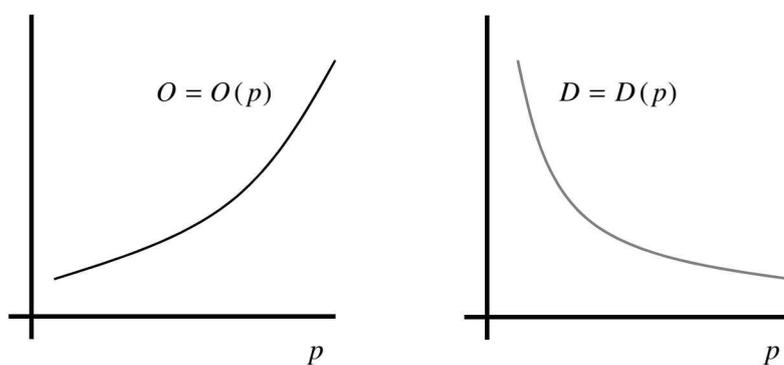
### 1.4. Fluctuaciones en el precio de un producto: modelo de la telaraña

El precio de un producto agrícola varía cada temporada y se forma así una sucesión que pretendemos estudiar

$$p_n = \text{precio en el año } n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Son muchos los factores que influyen en las fluctuaciones del precio: lluvias, situación económica de los países a los que se exporta, productos competidores, etcétera. Ignoraremos todos esos factores exógenos y nos centraremos en las fluctuaciones intrínsecas, generadas por los mecanismos de oferta y demanda del propio producto.

La oferta y la demanda se suponen funciones conocidas del precio,  $D = D(p)$ ,  $O = O(p)$ . Estas funciones definen el producto que estamos considerando: espárrago, habas, maíz, trigo, cebada, girasol,... Además, es claro que  $O$  debe ser una función creciente mientras que  $D$  es decreciente. Para comprender esto basta observar que, a mayor precio, más tendencia tendrán los agricultores a cultivar ese producto y menos interés en comprarlo tendrán los consumidores.

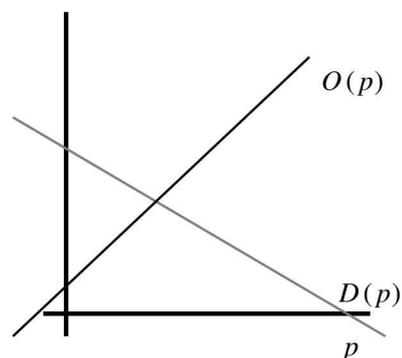


En la gráfica anterior las funciones de oferta y demanda se han dibujado como funciones no lineales pero al diseñar el modelo vamos a hacer la hipótesis más simple posible: las funciones  $O$  y  $D$  son afines,  $O(p) = a + bp$ ,  $D(p) = c - dp$ . Las gráficas son dos rectas, una con pendiente positiva y otra negativa. En economía las cantidades  $b$  y  $d$  son llamadas *marginales*. La marginal de la oferta/demanda mide la sensibilidad de los productores/consumidores a las variaciones de precio.

En la teoría estática se hace la hipótesis del equilibrio: la demanda y la oferta se igualan. Esto se justifica porque se espera que después de algún tiempo el precio se ajuste de manera que toda la producción se consuma.

$$O(p) = a + b p \quad b > 0$$

$$D(p) = c - d p \quad d > 0$$



De la ecuación

$$D(p_*) = O(p_*)$$

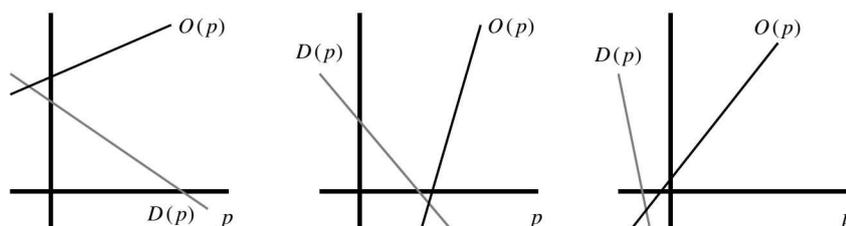
se llega al *precio ideal o de equilibrio*

$$p_* = \frac{c - a}{b + d}$$

A partir de ahora impondremos la condición

$$c > a$$

con objeto de que el precio de equilibrio sea positivo. Esta hipótesis nos asegura que las rectas se cortan en el primer cuadrante y se excluyen situaciones como las del siguiente dibujo.



En el modelo dinámico se tiene en cuenta el desfase que se produce al ajustar la demanda y la oferta. Los agricultores toman la decisión de cultivar el producto con bastantes meses de antelación y el precio que conocen es de la temporada anterior; por el contrario los consumidores conocen el precio de temporada. A partir de estas observaciones se postula la ecuación en diferencias

$$D(p_n) = O(p_{n-1}).$$

Esta ley dinámica lleva a la ecuación lineal de primer orden

$$p_n = \frac{c-a}{d} - \frac{b}{d}p_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

El coeficiente  $\alpha = -\frac{b}{d}$  es distinto de 1 y por tanto sabemos que hay una solución constante. Como era de esperar, esta solución es precisamente el precio de equilibrio  $p_n = p_*$ . Todas las soluciones reales de esta ecuación se expresan en la forma

$$p_n = k(-1)^n \left(\frac{b}{d}\right)^n + p_*, \quad n \geq 0$$

para alguna constante  $k \in \mathbb{R}$ . Conviene observar que esta fórmula deja de tener sentido para el modelo cuando  $p_n$  se hace negativa.

**Ejercicio.** Encuentra una condición sobre  $p_0$  que sea necesaria y suficiente para la positividad de la solución:  $p_n > 0$  para todo  $n = 0, 1, 2, \dots$

Vamos a estudiar el comportamiento de los precios a largo plazo y para ello distinguimos tres casos:

1.  $b < d$

Todas las soluciones cumplen  $p_n \rightarrow p_*$ . Los precios oscilan y tienen a estabilizarse en el precio de equilibrio.

2.  $b > d$

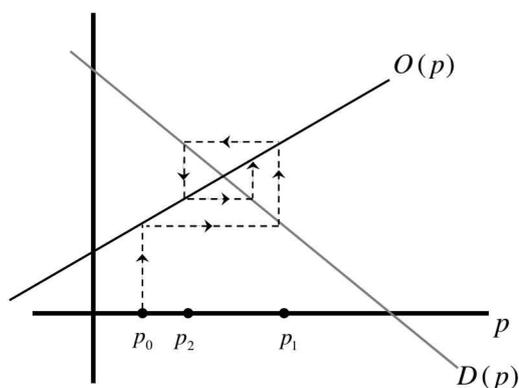
Las soluciones no constantes cumplen  $|p_n| \rightarrow \infty$ . Después de algunas oscilaciones la solución se hace negativa y el modelo deja de ser significativo.

3.  $b = d$

Es un caso de transición entre los dos anteriores. Las soluciones no constantes son 2-ciclos.

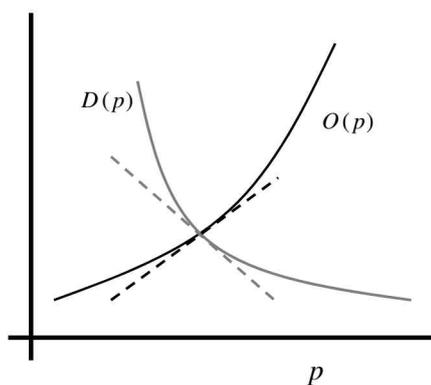
La condición  $b < d$  se puede interpretar como una condición de estabilidad para el modelo. Si recordamos la interpretación de las marginales, nos dice que los productores son menos sensibles a los cambios de precios que los consumidores.

La representación gráfica que se suele hacer de este modelo explica la asociación con una telaraña. Dibujamos las rectas de oferta y demanda sobre el mismo plano y señalamos  $p_0$  sobre el eje horizontal. Calculamos  $O(p_0)$  trazando una vertical y lo igualamos a  $D(p_1)$  mediante una línea horizontal. Entonces repetimos el proceso partiendo de  $p_1$ .



Acabamos con dos críticas al modelo:

- En situaciones reales las funciones de demanda y oferta no son rectas. Al escoger para la demanda una función afín, nos encontramos con demandas negativas para  $p$  grande. Esto no tiene sentido y hace que aparezcan precios negativos. Sin embargo el modelo con rectas no es tan malo cerca del equilibrio, pues se pueden reemplazar las curvas de oferta y demanda por sus tangentes en  $(p_*, D(p_*))$ . El modelo que hemos presentado es significativo para fluctuaciones pequeñas alrededor de  $p_*$ .



- La validez en el tiempo de este modelo ha de ser bastante limitada. Los productores detectarán el patrón y diseñarán estrategias más inteligentes; por ejemplo elaborando un precio esperado a partir del precio de varios años anteriores. De esta forma se llega a variantes del modelo de la telaraña que conducen a ecuaciones de segundo o tercer orden.

### 1.5. El efecto multiplicador: un modelo macro-económico

En la teoría macro-económica de Keynes (sin sector exterior) aparecen tres magnitudes:

$$Y = \text{renta nacional}, \quad I = \text{inversión}, \quad C = \text{consumo}.$$

Se hacen los siguientes supuestos:

1.  $Y = C + I$

Toda la riqueza producida por el país se dedica a consumo o inversión

2.  $C = a + bY, \quad a \geq 0, 0 < b < 1$

El consumo es función de la renta. La marginal  $b$  indica la tendencia al gasto, mayor cuanto más cerca de 1 esté el número  $b$ .

Si unimos 1 y 2,

$$Y = a + bY + I \rightarrow Y = \frac{a}{1-b} + \frac{1}{1-b}I$$

y esta fórmula revela el efecto multiplicador de la inversión. La inversión  $I$  eleva la renta en la cantidad  $\frac{1}{1-b}I$ , que es mayor a  $I$ .

**Nota.**  $0 < b < 1 \Rightarrow \frac{1}{1-b} > 1$

La discusión anterior es estática y hay que tener en cuenta que el efecto multiplicador solo será patente después de un cierto número de años; sería infantil pretender que el efecto de una inversión sea casi inmediato. Vamos a introducir dinámica suponiendo que se produce un desfase, el consumo de un año depende de la renta del año anterior,

2'.  $C_n = a + bY_{n-1}, \quad n \geq 1.$

Hacemos una hipótesis adicional: la inversión  $I$  es constante. Esto no es muy realista pero nos permitirá permanecer en el marco de las ecuaciones que sabemos resolver. Si unimos 1 y 2',

$$Y_n = C_n + I = a + bY_{n-1} + I.$$

Hemos llegado a la ecuación lineal en diferencias

$$Y_n = bY_{n-1} + a + I, \quad n \geq 1.$$

Como el coeficiente  $\alpha = b \neq 1$ , existe una solución constante y esta resulta ser la renta de equilibrio que encontramos en la teoría estática,

$$Y_* = \frac{a + I}{1 - b}.$$

Las restantes soluciones reales son

$$Y_n = cb^n + Y_*$$

con  $c$  una constante real no nula. Como  $b \in ]0, 1[$ ,  $Y_n$  converge a  $Y_*$  de manera monótona. A largo plazo el modelo dinámico se aproxima al estático.

## 1.6. La ecuación de orden superior

Estudiaremos

$$(*) \quad x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \dots + a_1x_{n+1} + a_0x_n = 0$$

donde  $k \geq 1$  es el orden de la ecuación. Los coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$  son fijos y pueden ser reales o complejos. Usaremos la notación  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{K}$  donde  $\mathbb{K}$  puede ser  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ . Supondremos también  $a_0 \neq 0$ , pues en otro caso es posible rebajar el orden de la ecuación.

**Ejemplo.**  $x_{n+2} + 3x_{n+1} = 0 \rightarrow x_{n+1} + 3x_n = 0$ .

La ecuación de Fibonacci es del tipo  $(*)$  con  $k = 2$ ,  $a_0 = a_1 = -1$ . La ecuación homogénea de primer orden también es del tipo  $(*)$ , con  $k = 1$ ,  $x_{n+1} + a_0x_n = 0$ .

Una *solución* de  $(*)$  es una sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  con coeficientes en  $\mathbb{K}$  y que cumple la relación de recurrencia para cada  $n \geq 0$ . Esta definición sugiere trabajar con el espacio vectorial  $S$  de las sucesiones. Los vectores de  $S$  se denotarán por

$$X = \{x_n\}_{n \geq 0} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}, \quad x_n \in \mathbb{K}.$$

La suma y el producto por escalar se efectúan coordenada a coordenada,

$$X + Y = \{x_0 + y_0, x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n, \dots\}, \quad \lambda X = \{\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n, \dots\},$$

si  $X, Y \in S$  y  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

**Ejercicio.** Prueba que  $S$  es un espacio vectorial. Demuestra que los vectores

$$X_0 = \{1, 0, \dots, 0, \dots\}, X_1 = \{0, 1, \dots, 0, \dots\}, \dots, X_n = \{0, 0, \dots, 1, \dots\}, \dots$$

son linealmente independientes en  $S$ . ¿Es  $X = \{1, 1, 1, \dots, 1, \dots\}$  combinación lineal de los vectores anteriores?

Pretendemos hacer uso del álgebra lineal abstracta, y para ello vamos a introducir una aplicación lineal que jugará un papel importante en la resolución de la ecuación (\*). Definimos

$$L : S \rightarrow S, L(X) = X^*, x_n^* = x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \dots + a_0x_n$$

y escribimos la ecuación (\*) en la forma más abstracta

$$L(X) = 0.$$

En esta fórmula hay un pequeño abuso de lenguaje, pues el 0 que aparece es el 0 vector; es decir, la sucesión nula  $\{0, 0, \dots, 0, \dots\}$ .

**Ejemplo (Operador de Fibonnaci).**  $x_n^* = x_{n+2} - x_{n+1} - x_n$

- $L(\{1, 1, \dots, 1, \dots\}) = \{-1, -1, \dots, -1, \dots\}$
- $L(\{3^n\}_{n \geq 0}) = \{3^{n+2} - 3^{n+1} - 3^n\}_{n \geq 0} = 5\{3^n\}_{n \geq 0}$
- $L(\{f_n\}_{n \geq 0}) = 0$  donde  $\{f_n\}$  es la sucesión de Fibonacci.

Designaremos por  $\Sigma$  al conjunto de soluciones de la ecuación (\*). Recordando la definición de núcleo de una aplicación lineal observamos que se cumple

$$\Sigma = \{X \in S : L(X) = 0\} = \text{Ker } L.$$

A partir de aquí obtenemos una consecuencia importante: el conjunto de soluciones  $\Sigma$  es un sub-espacio vectorial de  $S$ .<sup>3</sup> Esta propiedad nos permitirá fabricar muchas soluciones de la ecuación; por ejemplo, si conocemos dos soluciones no triviales podemos hacer sus combinaciones lineales y obtenemos un plano de soluciones. El espacio  $S$  tiene dimensión infinita pero el sub-espacio  $\Sigma$  va a tener dimensión finita,

$$\dim \Sigma = k = \text{orden de } (*).$$

Para demostrarlo recordamos que dos espacios vectoriales isomorfos tienen la misma dimensión.<sup>4</sup> Vamos a construir un isomorfismo entre  $\Sigma$  y  $\mathbb{K}^k$  que consiste en quedarse con los primeros  $k$  términos de la sucesión,

$$\Phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{K}^k, X = \{x_n\}_{n \geq 0} \mapsto (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}).$$

Para que  $\Phi$  sea isomorfismo se debe cumplir

- $\Phi$  es lineal,  $\Phi(X + Y) = \Phi(X) + \Phi(Y)$ ,  $\Phi(\lambda X) = \lambda X$ . Esto es fácil de comprobar, pues en los dos espacios las operaciones se definen coordenada a coordenada

<sup>3</sup>Dados  $V$  y  $W$  espacios vectoriales y una aplicación lineal  $\psi : V \rightarrow W$ , el núcleo,  $\text{Ker}\psi$ , es un sub-espacio de  $V$

<sup>4</sup>Dos espacios vectoriales  $V$  y  $W$  son isomorfos,  $V \cong W$ , si existe una aplicación lineal y biyectiva entre ellos

- $\Phi$  tiene inversa. Dado un vector  $(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$  en  $\mathbb{K}^k$ , lo interpretamos como un conjunto de condiciones iniciales para la ecuación (\*). A partir de  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$  vamos construyendo por recurrencia  $x_k, x_{k+1} \dots$ . De esta forma obtenemos una sucesión  $X = \{x_n\}$ . Es fácil comprobar que la inversa se define como  $\Phi^{-1}(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) = X$ .

**Ejemplo.**  $x_{n+1} = \lambda x_n$ . Introducimos la notación

$$\pi_\lambda = \{1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^n, \dots\}$$

para designar la progresión geométrica de razón  $\lambda$  y término inicial  $x_0 = 1$ . En este caso  $\Sigma$  tiene dimensión uno y sus vectores son todas las progresiones geométricas de razón  $\lambda$ ,

$$\Sigma = \{c\pi_\lambda : c \in \mathbb{K}\}.$$

Se cumple  $\Phi(c\pi_\lambda) = c$  y  $\Phi^{-1}(c) = c\pi_\lambda = \{c, c\lambda, c\lambda^2, \dots, c\lambda^n, \dots\}$ .

¿Puede ocurrir que la progresión  $\pi_\lambda$  sea también solución de una ecuación de orden superior? Para dar respuesta a esta pregunta calculamos  $L(\pi_\lambda)$  usando la definición de la aplicación lineal  $L$ ,

$$\begin{aligned} L(\pi_\lambda) &= L(\{\lambda^n\}_{n \geq 0}) = \{\lambda^{n+k} + a_{k-1}\lambda^{n+k-1} + \dots + a_1\lambda^{n+1} + a_0\lambda^n\}_{n \geq 0} = \\ &= (\lambda^k + a_{k-1} + \dots + a_1\lambda + a_0)\{\lambda^n\}_{n \geq 0}. \end{aligned}$$

Si asociamos a  $L$  el polinomio

$$p(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1} + \dots + a_1\lambda + a_0,$$

llegamos a la fórmula

$$\boxed{L(\pi_\lambda) = p(\lambda)\pi_\lambda}$$

y deducimos que  $\pi_\lambda$  será una solución de (\*) cuando  $\lambda$  sea una raíz del polinomio  $p$ .

**Ejemplo.** (Ecuación de Fibonacci)  $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$ . Se cumple  $L(\pi_\lambda) = \{\lambda^{n+2} - \lambda^{n+1} - \lambda^n\}_{n \geq 0} = (\lambda^2 - \lambda - 1)\{\lambda^n\}_{n \geq 0} = p(\lambda)\pi_\lambda$  con  $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$ . Las raíces de este polinomio son

$$\lambda_+ = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_- = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

La raíz positiva  $\lambda_+$  es el famoso *número de oro*. Sabemos que las progresiones geométricas  $\pi_{\lambda_+}$  y  $\pi_{\lambda_-}$  son soluciones y, como  $\Sigma$  es un espacio vectorial, también serán soluciones sus combinaciones lineales

$$c_1\pi_{\lambda_+} + c_2\pi_{\lambda_-}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{K}.$$

Conviene observar que cuando  $c_1$  y  $c_2$  son diferentes de cero la solución que obtenemos ya no es una progresión geométrica. En este ejemplo  $\Sigma$  tiene dimensión 2 y parece razonable pensar que la fórmula anterior describe todas las soluciones; para estar seguros debemos probar que las sucesiones  $\pi_{\lambda_+}$  y  $\pi_{\lambda_-}$  son linealmente independientes en  $\Sigma$  o, lo que es lo mismo, en  $S$ .

**Lema 1.6.1.** Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$  números distintos ( $\lambda_i \neq \lambda_j$  si  $i \neq j$ ). Entonces  $\pi_{\lambda_1}, \dots, \pi_{\lambda_p}$  son linealmente independientes en  $S$ .

*Demostración.* Comenzamos recordando un resultado de álgebra lineal abstracta. Si las imágenes por una aplicación lineal de un conjunto de vectores son linealmente independientes, entonces también lo son los originales.<sup>5</sup> Es decir, si  $V$  y  $W$  son espacios vectoriales y  $\psi : V \rightarrow W$  es una aplicación lineal; dados  $v_1, \dots, v_p \in V$ ,

$$\begin{aligned} \psi(v_1), \dots, \psi(v_p) \text{ linealmente independientes en } W &\Rightarrow \\ v_1, \dots, v_p \text{ linealmente independientes en } V. \end{aligned}$$

Consideramos la aplicación lineal que consiste en quedarse con los primeros  $p$  términos de la sucesión,

$$\Psi : S \rightarrow \mathbb{K}^p, \quad \Psi(\{x_n\}_{n \geq 0}) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \dots \\ x_{p-1} \end{pmatrix}.$$

Calculamos las imágenes de  $\pi_{\lambda_1}, \dots, \pi_{\lambda_p}$ ,

$$\Psi(\pi_{\lambda_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1^2 \\ \dots \\ \lambda_1^{p-1} \end{pmatrix}, \dots, \Psi(\pi_{\lambda_p}) = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_p \\ \lambda_p^2 \\ \dots \\ \lambda_p^{p-1} \end{pmatrix}.$$

Estos vectores son linealmente independientes en  $\mathbb{K}^p$ , pues si los disponemos como columnas de una matriz y calculamos el determinante, llegamos al conocido *determinante de Vandermonde*, que es no nulo,<sup>6</sup>  $\det(\Psi(\pi_{\lambda_1}) | \Psi(\pi_{\lambda_2}) | \dots | \Psi(\pi_{\lambda_p})) =$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_p \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_p^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{p-1} & \lambda_2^{p-1} & \dots & \lambda_p^{p-1} \end{pmatrix} = \prod_{i,j=1, i>j}^p (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0.$$

Entonces, la independencia lineal de  $\Psi(\pi_{\lambda_1}), \dots, \Psi(\pi_{\lambda_p})$  en  $\mathbb{K}^p$  implica la independencia lineal de  $\pi_{\lambda_1}, \dots, \pi_{\lambda_p}$  en  $S$ .  $\square$

**Nota.** Vandermonde da nombre al determinante anterior por un error de interpretación. En una de sus memorias usó sub-índices y super-índices para designar los coeficientes de una matriz general (fila y columna). A partir de ahí no hay más que confundir los super-índices con exponentes. “Y quizás es esta equivocación lo que ha salvado el nombre de Vandermonde del más completo olvido” H. Lebesgue.

<sup>5</sup>Conviene observar que el recíproco no es cierto, las aplicaciones lineales no conservan la independencia lineal a menos que sean monomorfismos

<sup>6</sup> $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{K}^p$  son linealmente independientes si y solo si  $\det(v_1 | \dots | v_p) \neq 0$

**Ejemplo.** *La sucesión de Fibonacci.* A partir del lema anterior sabemos que el espacio de soluciones  $\Sigma$  de la ecuación  $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$  está generado por  $\pi_{\lambda_{\pm}}$  con  $\lambda_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . Por tanto,

$$\{f_n\}_{n \geq 0} = c_1 \pi_{\lambda_+} + c_2 \pi_{\lambda_-}$$

y ajustamos las constantes  $c_1, c_2$  a partir de las condiciones iniciales  $f_0 = f_1 = 1$ ,

$$f_0 = 1 \rightarrow 1 = c_1 + c_2, \quad f_1 = 1 \rightarrow 1 = c_1 \lambda_+ + c_2 \lambda_-.$$

Hemos encontrado un sistema lineal compatible determinado en las incógnitas  $c_1$  y  $c_2$ , con solución

$$c_1 = \frac{\lambda_+}{\sqrt{5}}, \quad c_2 = -\frac{\lambda_-}{\sqrt{5}}.$$

Llegamos a la fórmula del término general

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}.$$

A partir de esta fórmula observamos que

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\lambda_+^{n+2} - \lambda_-^{n+2}}{\lambda_+^{n+1} - \lambda_-^{n+1}} = \frac{\lambda_+ - \lambda_- \left( \frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^{n+1}}{1 - \left( \frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^{n+1}}.$$

Puesto que  $|\lambda_-| < \lambda_+$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

De manera imprecisa decimos que la sucesión de Fibonacci se parece (para  $n$  grande) a una progresión geométrica cuya razón es el número de oro.

## 1.7. Raíces complejas

Supongamos que los coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$  son reales pero el polinomio característico

$$p(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

admite una raíz compleja  $\lambda_* \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Entonces también será raíz de  $p(\lambda)$  el número conjugado  $\bar{\lambda}_*$  y encontramos las soluciones complejas

$$\pi_{\lambda_*} = \{1, \lambda_*, \lambda_*^2, \dots\}, \quad \pi_{\bar{\lambda}_*} = \{1, \bar{\lambda}_*, \bar{\lambda}_*^2, \dots\}.$$

Como  $\lambda_* \neq \bar{\lambda}_*$ , estas soluciones son linealmente independientes en  $\Sigma_{\mathbb{C}}$ . Consideramos las combinaciones lineales

$$R = \frac{1}{2} \pi_{\lambda_*} + \frac{1}{2} \pi_{\bar{\lambda}_*}, \quad I = \frac{1}{2i} \pi_{\lambda_*} - \frac{1}{2i} \pi_{\bar{\lambda}_*},$$

que también son linealmente independientes en  $\Sigma_{\mathbb{C}}$ .

**Ejercicio.** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$  y  $v_1, v_2 \in V$  vectores linealmente independientes. Prueba que también lo son los vectores  $w_1 = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$ ,  $w_2 = \frac{1}{2i}v_1 - \frac{1}{2i}v_2$ .

Las sucesiones  $R$  e  $I$  se pueden ver como la parte real e imaginaria de  $\pi_{\lambda_*}$ , pues si  $z = x + iy$  es un número complejo,

$$x = \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

A partir de la fórmula de Moivre podemos expresar  $R$  e  $I$  en términos reales,

$$\lambda_* = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \Rightarrow \lambda_*^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta),$$

$$R = \{r^n \cos n\theta\}_{n \geq 0}, \quad I = \{r^n \operatorname{sen} n\theta\}_{n \geq 0}.$$

Partimos de las soluciones complejas  $\pi_{\lambda_*}$ ,  $\pi_{\bar{\lambda}_*}$  y hemos llegado a las soluciones reales  $R, I$ , pero hay todavía una cuestión delicada. Sabemos que  $R$  e  $I$  son linealmente independientes en  $\Sigma_{\mathbb{C}}$  pero, como son soluciones reales, nos preguntamos ahora si también serán linealmente independientes en  $\Sigma_{\mathbb{R}}$ . La respuesta es sí y la justificación la encontramos en una observación general sobre los espacios vectoriales.

**Nota.** Todo espacio vectorial  $V$  sobre los complejos se puede ver también como un espacio vectorial sobre los reales. Si  $v_1, \dots, v_p \in V$  son vectores  $\mathbb{C}$ -linealmente independientes entonces también son  $\mathbb{R}$ -linealmente independientes. La razón es simple, si se cumple

$$\sum_{j=1}^p c_j v_j = 0, \quad c_j \in \mathbb{C} \Rightarrow c_j = 0, \quad j = 1, \dots, p$$

también se ha de cumplir la implicación más débil

$$\sum_{j=1}^p c_j v_j = 0, \quad c_j \in \mathbb{R} \Rightarrow c_j = 0, \quad j = 1, \dots, p.$$

El recíproco es falso, los vectores  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  y  $v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 2i \end{pmatrix}$  de  $\mathbb{C}^2$  cumplen  $iv_1 - v_2 = 0$  y son  $\mathbb{R}$ -linealmente independientes.

**Ejercicio.** ¿Qué habría pasado en las discusiones anteriores si hubiéramos cambiado los papeles de  $\lambda_*$  y  $\bar{\lambda}_*$

**Ejemplo.** Para resolver  $x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0$  buscamos las raíces del polinomio  $\lambda^2 + \lambda + 1$ . Estas son

$$\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \bar{\omega} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Las sucesiones

$$\pi_\omega = \{1, \omega, \omega^2, \dots\}, \quad \pi_{\bar{\omega}} = \{1, \bar{\omega}, \bar{\omega}^2, \dots\}$$

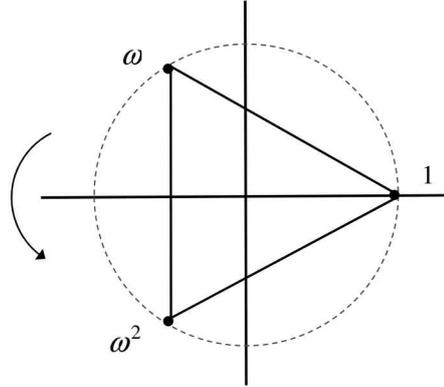
pertenecen a  $\Sigma_{\mathbb{C}}$  y son linealmente independientes en  $S$ . Como el sub-espacio  $\Sigma_{\mathbb{C}}$  tiene dimensión dos, forman una base. Para hacernos una idea del comportamiento de  $\pi_\omega$  y  $\pi_{\bar{\omega}}$  observamos que  $\omega$  y  $\bar{\omega}$  son raíces cúbicas de la unidad,

$$\omega^3 = 1, \quad \bar{\omega}^3 = 1.$$

En el plano complejo los números  $1, \omega$  y  $\bar{\omega}$  son vértices de un triángulo equilátero y las potencias sucesivas se obtienen efectuando rotaciones de los vértices

$$1, \omega, \omega^2 = \bar{\omega}, \omega^3 = 1, \omega^4 = \omega, \omega^5 = \bar{\omega}, \dots$$

Esto muestra que las sucesiones  $\pi_\omega$  y  $\pi_{\bar{\omega}}$  son 3-ciclos (se repiten cada tres términos).



Las soluciones **complejas** están descritas en la fórmula

$$x_n = c_1 \omega^n + c_2 \bar{\omega}^n; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Ahora vamos a describir  $\Sigma_{\mathbb{R}}$ . Podemos calcular  $R$  e  $I$  usando la fórmula de Moivre y teniendo en cuenta que  $\omega = \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}$ ,

$$R = \left\{ \cos \frac{2\pi n}{3} \right\}_{n \geq 0}, \quad I = \left\{ \operatorname{sen} \frac{2\pi n}{3} \right\}_{n \geq 0}.$$

También podemos calcular estas sucesiones mirando el dibujo del triángulo equilátero y buscando las proyecciones sobre los ejes coordenados,

$$R = \left\{ 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots \right\}, \quad I = \left\{ 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \dots \right\}.$$

Describamos las soluciones **reales** por

$$x_n = \begin{cases} c_1, & \text{si } n \equiv 0 \pmod{3} \\ -\frac{1}{2}c_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_2, & \text{si } n \equiv 1 \pmod{3} \\ -\frac{1}{2}c_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}c_2, & \text{si } n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

con  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

## 1.8. Raíces múltiples

Comenzamos con un ejemplo:

$$x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 0.$$

El polinomio característico  $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$  tiene la raíz doble  $\lambda_* = -1$ . Sabemos que

$$\pi_{-1} = \{(-1)^n\}_{n \geq 0} = \{1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots\}$$

es solución pero no podemos fabricar una segunda solución  $\pi_\lambda$  con  $\lambda \neq -1$ . Habrá que buscar soluciones de un nuevo tipo para describir  $\Sigma$ . Antes conviene repasar la noción de *multiplicidad* de una raíz. Dado un polinomio

$$p(\lambda) = a_k \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

con raíces distintas  $\lambda_1, \dots, \lambda_\sigma$ , lo factorizamos como

$$p(\lambda) = a_k \prod_{h=1}^{\sigma} (\lambda - \lambda_h)^{m_h}.$$

El número  $m_h$  es la multiplicidad de  $\lambda_h$ . El número de raíces no puede superar al grado,  $\sigma \leq k$ , y la suma de multiplicidades ha de coincidir con el grado,

$$m_1 + \dots + m_\sigma = k.$$

Usando las derivadas sucesivas del polinomio es posible calcular la multiplicidad de una raíz sin necesidad de factorizar el polinomio. Una raíz  $\lambda_* \in \mathbb{C}$  tiene multiplicidad  $m \geq 2$  si se cumple

$$p(\lambda_*) = p'(\lambda_*) = \dots = p^{(m-1)}(\lambda_*) = 0, \quad p^{(m)}(\lambda_*) \neq 0.$$

**Ejercicio.** Calcula la multiplicidad de  $\lambda_* = 1$  para el polinomio  $p(\lambda) = \lambda^{100} - 49\lambda^2 - 2\lambda + 50$ .

Probaremos que si  $\lambda_*$  es una raíz con multiplicidad  $m$  del polinomio característico de la ecuación (\*), entonces las sucesiones

$$\{\lambda_*^n\}, \{n\lambda_*^n\}, \dots, \{n^{m-1}\lambda_*^n\}$$

están en  $\Sigma$ . Más en general, dado cualquier polinomio  $q(n) = c_{m-1}n^{m-1} + \dots + c_1n + c_0$  de grado a lo sumo  $m - 1$ , la sucesión  $\{q(n)\lambda_*^n\}$  está en  $\Sigma$ . Para justificarlo es bastante observar que esta sucesión se expresa como combinación lineal de las anteriores,

$$\{q(n)\lambda_*^n\} = c_{m-1}\{n^{m-1}\lambda_*^n\} + \dots + c_1\{n\lambda_*^n\} + c_0\{\lambda_*^n\}.$$

En el ejemplo inicial teníamos  $\lambda_* = -1$  y  $m = 2$ , así que encontramos las soluciones reales

$$\{(c_1n + c_0)(-1)^n\}_{n \geq 0}; \quad c_0, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Veamos ahora un ejemplo más complicado. La ecuación

$$x_{n+5} - 2x_{n+4} + 2x_{n+3} - 4x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n = 0$$

tiene un polinomio característico que factoriza en la forma  $p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 1)^2$  y admite las raíces

$$\lambda_1 = 2, \quad m_1 = 1; \quad \lambda_2 = i, \quad m_2 = 2; \quad \lambda_3 = -i, \quad m_2 = 2.$$

Encontramos las soluciones  $\{2^n\}$ ,  $\{i^n\}$ ,  $\{ni^n\}$ ,  $\{(-i)^n\}$ ,  $\{n(-i)^n\}$ . Para encontrar soluciones reales podemos emplear el siguiente

**Ejercicio.** Sea  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  una solución compleja de la ecuación (\*). Se supone que los coeficientes  $a_0, \dots, a_{k-1}$  son reales. Demuestra que las sucesiones  $\{\operatorname{Re}(x_n)\}_{n \geq 0}$  y  $\{\operatorname{Im}(x_n)\}_{n \geq 0}$  también son soluciones. Construye un ejemplo que muestre que el resultado es falso si los coeficientes no son reales.

En el ejemplo anterior obtenemos las soluciones reales

$$\{\operatorname{Re}(i^n)\}_{n \geq 0} = \{1, 0, -1, 0, 1, \dots\}, \quad \{\operatorname{Im}(i^n)\}_{n \geq 0} = \{0, 1, 0, -1, 0, \dots\}$$

$$\{\operatorname{Re}(ni^n)\}_{n \geq 0} = \{0, 0, -2, 0, 4, \dots\}, \quad \{\operatorname{Im}(ni^n)\}_{n \geq 0} = \{0, 1, 0, -3, 0, \dots\}.$$

Dedicaremos el resto de la sección a probar el siguiente resultado.

**Proposición 1.8.1.** Sea  $\lambda_* \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  una raíz de  $p(\lambda)$  con multiplicidad  $m \geq 2$ . Entonces  $\{q(n)\lambda_*^n\}_{n \geq 0}$  es una solución de (\*) para cada polinomio  $q(n)$  de grado a lo sumo  $m - 1$ .

**Nota.**  $\lambda_* = 0$  no puede ser raíz del polinomio característico pues se supone  $a_0 \neq 0$ .

Antes de la demostración necesitamos algunos preliminares y un par de lemas.

Partimos de un parámetro  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  y de la sucesión

$$\pi_\lambda = \{1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^n, \dots\}$$

y definimos nuevas sucesiones

$$D\pi_\lambda = \{0, 1, 2\lambda, 3\lambda^2, \dots, n\lambda^{n-1}, \dots\},$$

$$D^2\pi_\lambda = \{0, 0, 2, 6\lambda, 12\lambda^2, \dots, n(n-1)\lambda^{n-2}, \dots\}.$$

En general, para cada  $r \geq 1$ ,

$$D^r\pi_\lambda = \{q_r(n)\lambda^{n-r}\}_{n \geq 0} \text{ donde } q_r(n) = n(n-1)\dots(n-r+1).$$

Observamos que estas sucesiones se obtienen por derivación sucesiva con respecto a  $\lambda$  de la sucesión  $\pi_\lambda$ , lo que justifica la notación. La fórmula  $L[\pi_\lambda] = p(\lambda)\pi_\lambda$  nos ha sido de gran ayuda para producir todas las soluciones en el caso de raíces simples, ahora presentamos otra fórmula que va a ser clave para raíces múltiples, en ella aparecen números combinatorios.

**Lema 1.8.2.**

$$L[D^r\pi_\lambda] = \sum_{h=0}^r \binom{r}{h} p^{(h)}(\lambda) D^{r-h}\pi_\lambda$$

para cada  $r \geq 1$ .

**Nota.** Con las convenciones  $D^0\pi_\lambda = \pi_\lambda$ ,  $\binom{0}{0} = 1$ ,  $p^{(0)} = p$ , recuperamos la fórmula del caso simple para  $r = 0$ .

*Demostración.* Se podría intentar una demostración directa por inducción sobre  $r$ , pero sería un poco pesada y no nos explicaría cómo se ha generado la fórmula. Vamos a proceder con más astucia. Partimos de la fórmula conocida  $L[\pi_\lambda] = p(\lambda)\pi_\lambda$  y derivamos con respecto a  $\lambda$ ,

$$L[D\pi_\lambda] = DL[\pi_\lambda] = D[p(\lambda)\pi_\lambda] = p'(\lambda)\pi_\lambda + p(\lambda)D\pi_\lambda,$$

así hemos llegado a la fórmula para  $r = 1$ . Para  $r \geq 2$  podemos usar la *regla de Leibniz*<sup>7</sup> que extiende la fórmula para la derivada del producto a derivadas de orden superior. Ahora derivamos  $r$  veces en lugar de una vez,

$$L[D^r\pi_\lambda] = D^r L[\pi_\lambda] = D^r [p(\lambda)\pi_\lambda] = \sum_{h=0}^r \binom{r}{h} p^{(h)}(\lambda) D^{r-h}\pi_\lambda.$$

---

<sup>7</sup>Si  $f$  y  $g$  son funciones derivables hasta el orden  $r$  se cumple  $(f \cdot g)^{(r)} = \sum_{h=0}^r \binom{r}{h} f^{(h)} \cdot g^{(r-h)}$

En los cálculos anteriores hay varias cosas que aclarar:

- La derivación se efectúa en cada término de la sucesión; es decir, en la identidad

$$\lambda^{n+k} + a_{k-1}\lambda^{n+k-1} + \dots + a_1\lambda^{n+1} + a_0\lambda^n = p(\lambda)\lambda^n$$

- Al derivar en la fórmula anterior se observa que la conmutación  $L[D\pi_\lambda] = D[L\pi_\lambda]$  está justificada
- Obtenemos la fórmula para  $\lambda$  complejo pero ¿cómo se deriva una función de variable compleja? Por ahora podemos entender que la demostración está completa para  $\lambda$  real. Para el caso complejo podemos pensar que se trata de un cálculo formal; en un curso más avanzado de la carrera el estudiante le dará rigor a ese caso.

□

**Ejercicio.** Demuestra la fórmula

$$1 + 2\lambda + 3\lambda^2 + 4\lambda^3 + \dots + 1000\lambda^{999} = \frac{1000\lambda^{1001} - 1001\lambda^{1000} + 1}{(\lambda - 1)^2},$$

para cada  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**Lema 1.8.3.** Las sucesiones  $\pi_{\lambda_*}, D\pi_{\lambda_*}, \dots, D^{m-1}\pi_{\lambda_*}$  son soluciones de (\*).

*Demostración.* Comenzamos suponiendo que  $\lambda_*$  es una raíz que cumple  $p(\lambda_*) = p'(\lambda_*) = 0$  y aplicamos la fórmula del lema anterior con  $r = 1$ ,

$$L[D\pi_\lambda] = p'(\lambda)\pi_\lambda + p(\lambda)D\pi_\lambda.$$

Al evaluar en  $\lambda = \lambda_*$  observamos que  $D\pi_{\lambda_*}$  es solución. Supongamos ahora que  $\lambda_*$  cumple  $p(\lambda_*) = p'(\lambda_*) = p''(\lambda_*) = 0$  y hagamos  $r = 2$  en la fórmula,

$$L[D^2\pi_\lambda] = p''(\lambda)\pi_\lambda + 2p'(\lambda)D\pi_\lambda + p(\lambda)D^2\pi_\lambda.$$

Haciendo  $\lambda = \lambda_*$  deducimos que  $D^2\pi_{\lambda_*}$  es solución. En general, si  $\lambda_*$  tiene multiplicidad  $m$  encontramos las soluciones  $\pi_{\lambda_*}, D\pi_{\lambda_*}, \dots, D^{m-1}\pi_{\lambda_*}$ . □

*Demostración. Proposición 1.8.1.* Vamos a probar que toda sucesión del tipo  $\{q(n)\lambda_*^n\}$  se expresa como combinación lineal de  $\pi_{\lambda_*}, D\pi_{\lambda_*}, \dots, D^{m-1}\pi_{\lambda_*}$ , con ello llegaremos a la conclusión por ser  $\Sigma$  un espacio vectorial. En primer lugar observamos que los polinomios

$$q_0(n) = 1, \quad q_1(n) = n, \quad q_2(n) = n(n-1), \dots, \quad q_{m-1}(n) = n(n-1) \cdots (n-m+2)$$

forman una base del espacio vectorial de los polinomios de grado a lo sumo  $m-1$ ,  $\mathbb{P}_{m-1} = \mathbb{P}_{m-1}[n]$ . Dado  $q \in \mathbb{P}_{m-1}$ ,  $q = \sum_{j=0}^{m-1} c_j q_j$  para ciertos números  $c_j$ . Como  $\lambda^r D^r \pi_\lambda = \{q_r(n)\lambda^n\}_{n \geq 0}$ , deducimos que

$$\{q(n)\lambda_*^n\} = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \lambda_*^j D^j \pi_{\lambda_*}.$$

□