Rafael Gómez Martín

CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

para físicos e ingenieros
Radiación y Propagación

Granada, 2021

Colección Manuales · Major
Ciencias

“Este libro ha sido cofinanciado por el departamento
de Eletromagnetismo y física de la materia"

Campus Universitario de Cartuja
Colegio Máximo, s.n., 18071, Granada
Telf.: 958 243 930 - 246 220
Web: editorial.ugr.es
ISBN: 978-84-338-6917-3
Depósito legal: Gr./1299-2021
Edita: Editorial Universidad de Granada
Campus Universitario de Cartuja. Granada
Diseño de cubierta: Tarma, estudio gráfico. Granada
Imprime: Gráficas La Madraza. Albolote. Granada

Printed in Spain *Impreso en España*

Índice general

Prólogo

Este libro ha surgido de las notas de clase de la asignatura de Electrodinámica que he impartido durante varios cursos a los alumnos de último curso de los grados de Física e Ingeniería en la Universidad de Granada. En consecuencia su contenido es fundamentalmente formativo y el tratamiento de los temas introductorio aunque, dado el nivel de los estudiantes a los que va dirigido, se parte de la base de que el lector está familiarizado con las ecuaciones de Maxwell y el análisis vectorial.

En todo caso debe quedar claro que el objetivo que se persigue no es, ni mucho menos, reemplazar los excelentes libros que existen sobre electromagnetismo (de los que son ejemplos los citados en la bibliografía incluida al final del libro y que está lejos de ser exhaustiva y a la que habría que añadir los muchos y buenos artículos, videos y transparencias, que pueden encontrarse en la web) sino ayudar a los alumnos a seguir mis clases teóricas. Por estas razón el libro está organizado y desarrollado de acuerdo a como me gusta explicar los fundamentos de la radiación y propagación del campo electromagnético y que parece haber tenido cierto éxito entre mis estudiantes. Es precisamente este relativo éxito el que me ha animado a plasmar mis apuntes en este libro con la esperanza de que pueda ser también útil a estudiantes de otras universidades. Por otro lado, sirva también como justificación mi convencimiento de lo beneficioso que puede ser para el estudiante conocer como explican o enfocan los mismos conceptos autores diferentes ya que, aunque a veces solo haya diferencias sutiles en la exposición, contexto y razonamientos utilizados, el realizar esta tarea puede ser muy útil para profundizar en el aprendizaje.

El primer capítulo comienza con una breve revisión de las ecuaciones de Maxwell que son las leyes fundamentales que explican las propiedades del campo electromagnético incluyendo como se relaciona con sus fuentes y, a nivel macroscópico, analizar su interacción con la materia caracterizando a esta mediante los parámetros constitutivos conductividad eléctrica, σ*, permeabilidad magné-*

tica, μ, y permitividad eléctrica, ε. Seguidamente, después de recordar la relación de los parámetros constitutivos con la estructura microscópica de la materia y el comportamiento del campo en la frontera de dos medios con diferentes parámetros constitutivos, se aplican la leyes de conservación de la energía y momento al campo electromagnético y se demuestra que el campo electromagnético transporta energía y momento cuyas magnitudes pueden expresarse en términos del vector de Poynting. Como caso particular se presta una atención específica al caso en que los campos varían armónicamente con el tiempo y a la descripción del comportamiento con la frecuencia de la permitividad eléctrica de los materiales. Finalmente se define y explica el significado del vector complejo de Poynting.

El segundo capítulo está dedicado al estudio de la que puede considerarse la consecuencia más importante de las ecuaciones de Maxwell, esto es, la radiación electromagnética o, lo que es equivalente, la generación de ondas electromagnéticas, considerándose al mismo nivel el análisis en el dominio del tiempo y en el de la frecuencia. Se explican los fundamentos de la radiación y no se analizan sistemas específicamente diseñados para radiar ondas electromagnéticas como son las antenas ya que este es un tema que, a nivel introductorio, de deja para el último capítulo. El haber elegido explicar la radiación de ondas electromagnéticas antes de estudiar su propagación se debe a que, de acuerdo con mi experiencia, y a este nivel, al estudiante le resulta más confortable estudiar la propagación de ondas electromagnéticas si ya conoce previamente como se generan y como están relacionadas con las fuentes que las producen. Con este objetivo se comienza introduciendo las magnitudes auxiliares potencial escalar eléctrico, Φ, y vectorial magnético, $\vec{A}$, a las que, una vez impuesta la denominada condición de Lorenz, es posible relacionar con sus fuentes mediante un par de ecuaciones de ondas no homogéneas desacopladas cuya soluciones, obtenidas mediante el método de Green, vienen dadas por los valores retardados de Φ y $\vec{A}$. A partir de estos potenciales retardados se procede al cálculo de las expresiones de los campos que crean una distribución acotada de fuentes que varían arbitrariamente con el tiempo. Una vez calculados los campos, de entre sus componentes, se presta especial atención al término de radiación que es el que se propaga, alejándose de sus fuentes, en forma de onda electromagnética y se demuestra que estos campos de radiación pueden ser expresados, mediante un desarrollo multipolar, como la suma de los campos individuales creados por cada uno de los momentos multipolares eléctricos y magnéticos de la distribución de fuentes original. La última parte del capítulo está dedicada a la obtención de las expresiones generales de los campos electromagnéticos creados por partículas cargadas con trayectorias y velocidades arbitrarias para, de nuevo, prestar especial atención a los campos de radiación. A partir de las expresiones generales de los campos de radiación se analizan con cierto detalle los dos casos particulares en los que los vectores *velocidad y aceleración son paralelos o perpendiculares. Estos casos resultan de gran interés en la física de partículas de alta energía, astrofísica, medicina etc.*

El tercer capítulo está enfocado al análisis de la propagación de ondas en un medio ilimitado lineal, isótropo y homogéneo libre de fuentes. Dado que un estudio general de la propagación de ondas está más allá de las intenciones de este libro, se consideran únicamente soluciones del tipo ondas planas las cuales constituyen una buena aproximación a grandes distancias de las fuentes donde en regiones suficientemente pequeñas cualquier frente de ondas puede ser tratado como una onda plana. Dado que todo medio con pérdidas es intrínsecamente dispersivo, al final del capítulo se introduce el concepto de velocidad de grupo como velocidad que, cuando se cumplen las condiciones de su validez, representa la velocidad a la que se propaga la energía de un paquete de ondas.

Una vez estudiada la propagación de ondas planas, en el capítulo cuarto se analiza que es lo que sucede cuando tales ondas inciden normal u oblicuamente sobre la superficie de separación, que se supone plana e indefinida, de dos medios lineales homogéneos e isótropos con parámetros constitutivos diferentes. A pesar de su simplicidad, este estudio resulta fundamental para poder interpretar los resultados obtenidos por cualquier método, ya sea experimental, teórico o numérico, en problemas más complejos. En el caso de la incidencia normal se analizan las estructuras multicapas así como el proceso transitorio que tiene lugar antes de que se alcance el régimen estacionario.

En el capítulo quinto se analiza la propagación de ondas armónicas planas en medios que presentan un comportamiento dieléctrico anisótropo como son los materiales cristalinos y plasmas magnetizados. En los materiales cristalinos la causa de la anisotropía está asociada a la estructura interna del cristal mientras que en el plasma la anisotropía aparece cuando este está inmerso en un campo magnético externo. La propagación de ondas en cristales anisótropos presenta muchas e importantes características cuya aplicación tiene gran importancia en el diseño de dispositivos electromagnéticos tanto ópticos como en otras regiones del espectro. El capítulo está dividido en tres apartados: en el primero se hace una introducción general de las características de las ondas planas que se propagan en medios anisótropos, en el segundo se tratan la propagación en cristales y finalmente en el tercero la propagación en plasmas. Los dos últimos apartados son prácticamente independientes de forma que el lector interesado en solo uno de los dos casos puede omitir el otro. Por lo que respecta a la propagación de ondas electromagnéticas en plasmas, se utiliza el modelo lineal de plasma frio poco denso denominado modelo lineal de dos fluidos en los que la energía cinética de las partículas que lo constituyen es baja y la presión y otros efectos térmicos pueden ser despreciados junto con las colisiones entre iones y electrones. El estudio de *la propagación de ondas en plasmas es fundamental, entre otros campos, en astrofísica y radiocomunicaciones.*

Los capítulos sexto, séptimo y octavo están dedicados a introducir los fundamentos de la propagación de ondas guiadas. Aunque las estructuras de estos sistemas de transmisión pueden ser muy diferentes, en general presentan la característica común de que tanto la geometría de su sección transversal como sus parámetros constitutivos no cambian en le dirección en la que se propaga la onda durante el suficiente número de longitudes de ondas para que pueden analizarse como si fuesen de longitud infinita y despreciarse los efectos de borde. En el capítulo sexto se desarrolla la teoría general de las guías de ondas formadas por un tubo conductor por cuyo interior, constituido por un único dieléctrico, se propagan ondas electromagnéticas del tipo TE y TM, y se analizan los fundamentos de las denominadas líneas de transmisión formadas por un único dieléctrico y dos conductores y por las que se pueden propagar, además, de ondas TE y TM las ondas tipo TEM. En el capítulo séptimo se estudian dos tipos concretos de guías, la rectangular y la cilíndrica, incluyendo una breve introducción al concepto de cavidad resonante, y en el octavo se analiza la propagación de ondasTEM en líneas de trasmisión incluyendo los fundamentos del método gráfico basado en la carta de Smith.

En el noveno capítulo se introducen las ecuaciones simétricas de Maxwell y se explican teoremas fundamentales del electromagnetismo como son el de unicidad, reciprocidad y equivalencia, los cuales tienen gran importancia en el electromagnetismo teórico y aplicado.

En el capítulo décimo se abordan los fundamentos de las antenas como dispositivos específicamente diseñados para radiar o recibir energía electromagnética de la forma más eficiente posible. Concretamente se analizan aspectos básicos relacionados con las antenas de hilo, de abertura y las agrupaciones de antenas. Aunque lo habitual es enfocar el análisis de las antenas bajo el supuesto de que su excitación es mediante una señal armónica, en casos sencillos es posible realizar el análisis en el dominio del tiempo considerando que la excitación es una señal con dependencia temporal arbitraria. En este capítulo se dedica una sección a este tipo de análisis ya que ofrece una perspectiva diferente que ayuda a comprender mejor los mecanismos implicados en la radiación de las antenas.

Obviamente el contenido del libro debe complementarse con una selección de ejercicios y problemas, incluyendo simulaciones numéricas, que sirvan para aclarar ideas y conceptos así como para aplicar lo que se ha aprendido con objeto de motivar al alumno. El hecho de que estos ejercicios no se hayan incluido en el libro se debe a que, como se ha comentado previamente, su objetivo principal es *ayudar a seguir las clases teóricas.*

En los apéndices se han incluido unas tablas con fórmulas y datos útiles que pueden ayudar al lector en algunos de los desarrollos que se realizan a lo largo del libro. También se incorpora una bibliografía que, aunque no es exhaustiva, puede ayudar a extender, profundizar o aclarar conceptos. Esta bibliografía está divida en varios grupos que no son necesariamente disjuntos.

Consideraciones finales:

Este texto no se habría llevado a término sin CCL y el objetivo de ayudar a mis alumnos a seguir las clases online durante el confinamiento que nos hemos visto obligados a soportar durante los cursos 2019-2020 y 2020 -2021 debido a la pandemia COVID 19. Sirva esta circunstancia como fundamento para dedicar el libro a aquellos alumnos, colegas y familiares que hayan sufrido de alguna u otra forma esta pandemia.

Mi agradecimiento a todos los miembros de mi grupo de investigación, Bernardo, Amelia, Salva y Mario por lo que humana y científicamente me han aportado durante los años que hemos trabajado juntos.

Finálmente quiero señalar que cualquier comentario o sugerencia por parte de cualquier posible lector será bien recibida. Con esa intención incluyo más abajo mi email.

"No hay libro, por malo que sea, que no contenga algo bueno" Plinio el Viejo

"Publicamos nuestros libros para librarnos de ellos, para no pasar el resto de nuestras vidas corrigiendo borradores" Jorge Luis Borges

El autor:

Rafael Gómez Martín

Emeritus Professor

Departamento de Electromagnetismo y Física de la Materia

Facultad de Ciencias

Universidad de Granada

Granada (Spain)

rgomez@ugr.es

Capítulo 1

Breve revisión de las ecuaciones macroscópicas de Maxwell

1.1. Ecuaciones macroscópicas de Maxwell

La teoría general del campo electromagnético, incluyendo su interacción con la materia, está basada en las ecuaciones de Maxwell que constituyen un conjunto de cuatro ecuaciones diferenciales acopladas, en derivadas parciales de primer orden, que relacionan las variaciones espaciales y temporales de los campos eléctricos y magnéticos con sus fuentes escalares (a través de la divergencia) y vectoriales (a través del rotacional)[1] [1].

Las ecuaciones de Maxwell se formulan usualmente en forma diferencial, es decir, como relaciones puntuales de los campos con sus fuentes (ecuaciones (1.1)). Sin embargo también pueden formularse en forma integral como relaciones entre los campos y sus fuentes en una región acotada del espacio (ecuaciones (1.2)). La relación entre ambas formulaciones está basada en los teoremas de la divergencia (A.19) y de Stokes (A.24). En medios estacionarios[2], las ecuaciones de Maxwell

[1] De acuerdo con el teorema de Helmholtz (teorema fundamental del cálculo vectorial), [2], un campo vectorial $\vec{K}$ está unívocamente determinado por sus fuentes escalares (su divergencia) y vectoriales (su rotacional) si estas se conocen en todo el espacio y tienden a cero cuando la distancia $r \rightarrow \infty$ al menos como $1/r^n$ con $n > 1$.

[2] En un medio estacionario todas las magnitudes físicas se evalúan en un sistema de referencia

en su forma diferencial e integral son

Forma diferencial de las ecuaciones macroscópicas de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t) \text{ (\textbf{Ley de Gauss})} \tag{1.1a}$$
$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r},t) = 0 \text{ (\textbf{Ley de Gauss del campo magnético})} \tag{1.1b}$$
$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t} \text{ (\textbf{Ley de Faraday})} \times \tag{1.1c}$$
$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r},t) = \vec{J}(\vec{r},t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r},t)}{\partial t} \text{ (\textbf{Ley general de Ampère})} \tag{1.1d}$$

Forma integral de las ecuaciones macroscópicas de Maxwell

$$\oint_S \vec{D}(\vec{r},t) \cdot d\vec{s} = \int_V \rho dv = Q(t) \text{ (\textbf{Ley de Gauss})} \tag{1.2a}$$
$$\oint_S \vec{B}(\vec{r},t) \cdot d\vec{s} = 0 \text{ (\textbf{Ley de Gauss del campo magnético})} \tag{1.2b}$$
$$\oint_\Gamma \vec{E}(\vec{r},t) \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t} \cdot d\vec{s} \text{ (\textbf{Ley de Faraday})} \tag{1.2c}$$
$$\oint_\Gamma \vec{H}(\vec{r},t) \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{J}(\vec{r},t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r},t)}{\partial t}) \cdot d\vec{s} \text{ (\textbf{Ley general de Ampère})} \tag{1.2d}$$

donde, (figura (1.1)), de acuerdo con el teorema de la divergencia el símbolo $\oint_S$ en (1.2a) representa una integral de superficie extendida a la superficie cerrada S que delimita un volumen V . Por otro lado, de acuerdo con el teorema de Stokes, el símbolo $\oint_\Gamma$ representa una integral curvilínea a lo largo de la línea cerrada Γ del contorno que limita la superficie abierta S estando el sentido de recorrido de la curva y el sentido del vector $d\vec{s}$ relacionados mediante la regla de la mano derecha.

En general las magnitudes en las ecuaciones (1.2) y (1.1) son funciones arbitrarias de la posición ($\vec{r}$) y del tiempo[3] (t). La definición y unidades de estas magnitudes son:

---

en el que tanto el observador como todas las superficies y volúmenes permanecen en reposo. Las ecuaciones de Maxwell para medios en movimientos se pueden estudiar en términos de la teoría especial de la relatividad.

[3]Normalmente a lo largo del libro, con objeto de simplificar la notación, no se indicará explícitamente la dependencia espacial y temporal de las magnitudes a menos que se considere necesario enfatizarlo.

$\vec{E}$ = Intensidad del campo eléctrico (Voltios/metro; V m^{-1})

$\vec{B}$ = Densidad de flujo magnético (Teslas (T))[4] o Webers/metro^2 (Wb m^{-2})

$\vec{D}$ = Desplazamiento eléctrico (Culombios/metro cuadrado; C m^{-2})

$\vec{H}$ = Intensidad de campo magnético (Amperios/metro; A m^{-1})

Q = Carga libre neta dentro de una superficie cerrada[5] (Culombios; C)

ρ = Densidad de carga libre (Culombios/ metro cúbico; C m^{-3})

$\vec{J}$ = Densidad de corriente de cargas libres (Amperios/metro cuadrado A m^{-2}).

La denominación de ecuaciones macroscópicas de Maxwell (en lo que sigue simplemente ecuaciones de Maxwell) se debe a que en ellas solo aparecen valores macroscópicos de los campos y, explícitamente, solo densidades macroscópicas de carga libre, $\rho(\vec{r}, t)$, es decir cargas que son libres de moverse dentro de un medio dado dando lugar a densidades de corriente libre, $\vec{J}(\vec{r}, t)$. La contribución de las densidades macroscópicas de cargas y corrientes, ligadas a los átomos y moléculas del medio, está implícitamente incluida en las magnitudes auxiliares $\vec{D}$ y $\vec{H}$ las cuales están relacionadas con los campos eléctricos y magnéticos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ a través de las denominadas ecuaciones constitutivas del medio (apartado (1.2.1)).

Las ecuaciones de Maxwell (1.1a), (1.1c), (1.1d)[6], o sus formulaciones en forma integral, (1.2a), (1.2c), (1.2d), se conocen normalmente por el nombre de los científicos que las dedujeron. Por otro lado, por su similitud con (1.1a), la ecuación (1.1b) se denomina frecuentemente ley de Gauss del campo magnético. Lo mismo ocurre para su formulación integral (1.2b)).

En su conjunto las cuatro ecuaciones (1.1), o (1.2), se conocen como ecuaciones de Maxwell debido a que fue él quien las completó añadiendo a la formula-

[4] El Tesla es una magnitud excesivamente grande para los valores habituales del campo magnético encontrados en la práctica. Por ello se suele utilizar en su lugar el gauss, G, que es la unidad del campo magnético en el sistema cegesimal de unidades (CGS), siendo 1T= 10^4G.

[5] Se considera carga libre aquella que puede moverse libremente en el interior de un material. Por el contrario carga ligada es la que solo puede desplazarse distancias microscópicas debido a sus fuertes enlaces atómicos y moleculares.

[6] Realmente la ecuación (1.1d), como se comenta más adelante, fue deducida por Ampère de forma incompleta ya que solo contenía el primer sumando del segundo miembro de la igualdad. La forma completa se debe a Maxwell.

ción original de Ampère, $\nabla \times \vec{H}(r,t) = \vec{J}(\vec{r},t)$, el concepto de corriente de desplazamiento, $\partial\vec{D}/\partial t$, como fuente adicional del campo $\vec{H}$. Aunque la corriente de desplazamiento tiene las mismas dimensiones que la densidad de corriente su naturaleza es completamente diferente ya que no lleva asociada movimiento de carga. Su inclusión en las ecuaciones de Maxwell es de una enorme trascendencia pues resulta fundamental para predecir la existencia de ondas electromagnéticas autosostenidas que pueden propagarse sin necesidad de un soporte físico a través del espacio vacío a una velocidad constante c. Las ondas electromagnéticas fundamentan la interacción remota entre cargas y corrientes y ponen de manifiesto la profunda interrelación entre el campo eléctrico y magnético, estableciendo que ambas magnitudes conforman conjuntamente el campo electromagnético.

El concepto de corriente de desplazamiento es también fundamental para deducir, de (1.1d), la **ecuación de continuidad**

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{1.3}$$

que establece el principio básico de conservación de la carga cuya formulación integral es

$$\oint_S \vec{J}.d\vec{s} = -\frac{dQ}{dt} \tag{1.4}$$

donde Q es la carga libre total contenida dentro de la superficie S.

La conexión entre electromagnetismo y mecánica viene dada por la ley empírica, denominada de **densidad de fuerza de Lorentz**, que expresa que la densidad de fuerza, $\vec{f}$ (N m^{-3}), que ejerce un campo electromagnético sobre una densidad volumétrica de carga ρ moviéndose a una velocidad $\vec{u}$ es

$$\vec{f} = \rho(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) = \rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} \tag{1.5}$$

donde

$$\vec{J} = \rho\vec{u} \tag{1.6}$$

representa la densidad de corriente en términos de la velocidad media de arrastre de las partículas en el elemento diferencial de volumen considerado[7]. La **fuerza de Lorentz total** $\vec{F}$ ejercida sobre la carga contenida en un volumen V se calcula integrando $\vec{f}$ sobre ese volumen. En el caso de una partícula de carga q la fuerza

[7] En general, cuando existen más de un tipo de partículas la densidad de corriente se define como $\vec{J} = \sum_i \rho_i \vec{u}_i$ donde ρ_i y $\vec{u}_i$ representan la densidad de carga por unidad de volumen y la velocidad media de arrastre de las cargas de clase i respectivamente.

total ejercida sobre ella es

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \tag{1.7}$$

Las ecuaciones de Maxwell junto con la fuerza de Lorentz constituyen las leyes de la física clásica, que, a nivel macroscópico, explican y predicen todos los fenómenos electromagnéticos relacionados con la interacción a distancia de cargas y corrientes a través del campo electromagnético que ellas mismas generan.

De la ecuación (1.7) se deduce que el trabajo W realizado por un campo electromagnético sobre una densidad de carga volumétrica ρ en un volumen dv y en un intervalo temporal dt es

$$dW = \vec{f} \cdot \vec{u} dt dv = \rho(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \cdot \vec{u} dt dv = \rho\vec{E} \cdot \vec{u} dt dv = \vec{E} \cdot \vec{J} dt dv \tag{1.8}$$

trabajo que se transforma íntegramente en energía calorífica cedida al medio. Como consecuencia, la potencia P_v (Wm^{-3}) que, por unidad de volumen, el campo electromagnético suministra a la distribución de carga es

$$P_v = \frac{dP}{dv} = \frac{dW}{dt dv} = \vec{E} \cdot \vec{J} \tag{1.9}$$

Relación que constituye la denominada **ley de Joule**.

1.2. Significado de las ecuaciones de Maxwell

En lo que sigue se comenta brevemente el significado de cada una de las ecuaciones de Maxwell ([2]-[10]; [13]; [17]).

La ley de Gauss para el campo eléctrico, en su forma diferencial (1.1a) o integral (1.2a), es consecuencia directa de la ley de Coulomb que establece que la fuerza de interacción entre cargas depende de r^{-2} siendo r la distancia entre ellas. En su forma diferencial, la divergencia del vector desplazamiento $\vec{D}$ es la densidad volumétrica de carga eléctrica ρ la cual constituye, por tanto, la fuente escalar o sumidero del campo $\vec{D}$. Esto es, las líneas de campo $\vec{D}$ comienzan en las cargas positivas ($\rho > 0$) y terminan en las negativas ($\rho < 0$). Por otro lado, en su forma integral, la ley de Gauss iguala el flujo neto del vector campo $\vec{D}$ a través de una superficie cerrada S, que puede ser real o matemática (ver figura (1.1)), con la carga libre neta Q dentro de esa superficie.

La ley de Gauss para el campo magnético, (1.1b) o (1.2b), establece que este campo es solenoidal, es decir, que su divergencia es nula y que por tanto no existen en la naturaleza fuentes escalares (cargas magnéticas o monopolos) del

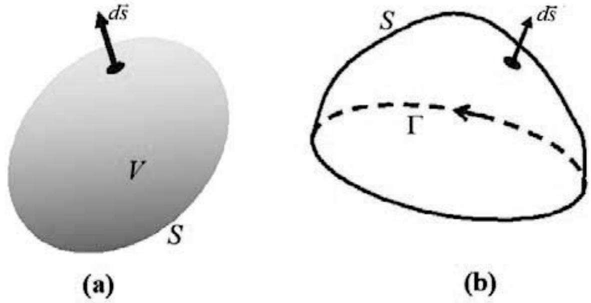

Figura 1.1: a) Superficie cerrada S que limita al volumen V. b) Línea cerrada Γ que limita la superficie abierta S. La dirección del elemento de superficie $d\vec{s}$ está asociada a la regla de la mano derecha: el pulgar de la mano derecha apunta en la dirección $d\vec{s}$ y el resto de los dedos indica el sentido de la integral de línea en el contorno Γ.

campo magnético $\vec{B}$ (ver apartado (9.1)). En otras palabras, no existen fuentes o sumideros donde nazcan o terminen las líneas de campo magnético $\vec{B}$, lo que implica que las líneas de $\vec{B}$ son cerradas. Este hecho se traduce, en su formulación integral, en que el flujo neto de $\vec{B}$ través de una superficie cerrada será nulo.

La ley de Faraday, (1.1c) o (1.2c), establece que un campo magnético variable con el tiempo es fuente vectorial de $\vec{E}$ y por tanto genera un campo eléctrico no conservativo ($\nabla \times \vec{E} \neq 0$) cuyas líneas de campo son cerradas. En su forma integral la ley de Faraday indica que la variación temporal de flujo magnético a través de una superficie abierta S limitada por la línea cerrada Γ, (figura 1.1), genera una fuerza electromotriz cuyo valor es la integral de la componente tangencial del campo eléctrico inducido a lo largo de la línea Γ. La integral de línea en el contorno Γ debe ser consistente con la dirección del vector elemento de superficie $d\vec{s}$ de acuerdo con la regla de la mano derecha. Por otro lado, el signo menos en (1.1c) y (1.2c) se debe a que el campo eléctrico inducido, si actuase sobre cargas, produciría una corriente que a su vez generaría otro campo $\vec{B}$ que se opondría al original, y por lo tanto daría lugar a una disminución del cambio de flujo magnético (**ley de Lenz**).

La ley general de Ampère, (1.1d) o (1.2d), constituye otra conexión entre el campo eléctrico y el magnético distinta a la de Faraday que completa el acoplamiento entre ambos campos. Establece que la fuente vectorial de $\vec{H}$ no solo es la densidad de corriente libre $\vec{J}$ sino también la densidad de corriente de desplazamiento $\partial\vec{D}/\partial t$ que, como fuente de $\vec{H}$, juega un papel similar al de

$\partial\vec{B}/\partial t$ como fuente de $\vec{E}$. En su forma integral, ecuación (1.2d), el miembro de la izquierda de la ley general de Ampère representa la circulación de la intensidad de campo magnético a lo largo de un línea cerrada arbitraria Γ, mientras que el miembro de la derecha es la suma del flujo de las densidades de corriente $\vec{J}$ y $\partial\vec{D}/\partial t$ a través de cualquier superficie abierta limitada por Γ (figura 1.1).

1.2.1. Ecuaciones constitutivas

Las ecuaciones de Maxwell (1.1) en su formulación denominada microscópica pueden escribirse sin necesidad de usar las magnitudes auxiliares $\vec{D}$ y $\vec{H}$, como

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\rho_{mic}(\vec{r},t)}{\varepsilon_0} \tag{1.10a}$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r},t) = 0 \tag{1.10b}$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t} \tag{1.10c}$$

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r},t) = \mu_0\vec{J}_{mic}(\vec{r},t) + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t} \tag{1.10d}$$

donde $\varepsilon_0 = 10^{-9}/(36\pi)$ (Faradio/metro; F m^{-1}) y $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ (Henrio/metro; H m^{-1}) son las constantes denominadas permitividad y permeabilidad de espacio libre respectivamente. El subíndice *mic* indica que en el valor de ρ y $\vec{J}$ está incluida de forma individual todas las contribuciones microscópicas tales como electrones, iones etc., tanto libres como ligados[8] ([19]-[21]). Ahora bien, aunque estas ecuaciones son generales resultan obviamente inmanejables a la hora de abordar problemas tales como la interacción de un campo electromagnético con un medio material. Por ello, para eludir esta situación, se hace absolutamente necesario desarrollar modelos macroscópicos que, basándose en métodos estadísticos, permitan definir funciones continuas que soslayen el problema de la naturaleza discreta de la materia. Estos modelos macroscópicos permiten sustituir las ecuaciones microscópicas (1.10) por las macroscópicas (1.1) en las que solo aparecen explícitamente como fuentes de campo las funciones densidades de carga y de corriente libre, haciendo asequible el estudio de la interacción del campo electromagnético con objetos materiales.

Para pasar de la descripción microscópica a la macroscópica lo que se hace

[8] A nivel microscópico, la fuentes puntuales se expresan como funciones densidad mediante la función delta de Dirac. Por ejemplo una carga puntual q situada en la posición $\vec{r}'$, se expresa como una densidad de la forma $\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}')$.

es promediar el comportamiento de las propiedades atómicas y moleculares, que a distancias atómicas fluctúan enormemente, en volúmenes Δv suficientemente grandes a nivel microscópico como para que contengan un gran número de átomos y moléculas pero que, al mismo tiempo, sean macroscópicamente lo suficientemente pequeños como para poder definir con precisión una función espacial continua de densidad de fuentes. Como resultado de este promedio, las propiedades electromagnéticas de la materia pueden describirse mediante tres parámetros macroscópicos, **permitividad eléctrica** ε, **permeabilidad magnética** μ, y **conductividad eléctrica** σ, que permiten la enorme simplificación de poder tratar la materia como un continuo y prescindir de su naturaleza discreta. Los parámetros ε, μ, y σ se denominan **parámetros constitutivos** del medio y sus valores y características dependen de la estructura atómica y molecular de ese medio.

La derivación de los parámetros constitutivos de un medio a partir de sus propiedades microscópicas es, en general, un proceso complejo que puede requerir modelos moleculares cuánticos y el uso de la física estadística para describir su comportamiento colectivo. Sin embargo en la mayoría de las situaciones prácticas es posible obtener muy buenos resultados usando modelos moleculares simplificados basados en el hecho de que, en primera aproximación, la interacción de una molécula con un campo eléctrico o magnético puede describirse por su momento dipolar eléctrico o magnético respectivamente[9].

Vector polarización

De acuerdo a lo que se acaba de comentar, se describe el comportamiento de la materia en presencia de un campo eléctrico mediante la magnitud vectorial macroscópica $\vec{P}$ (Cm^{-2}), denominada vector polarización y definida como el valor medio del momento dipolar molecular por unidad de volumen

$$\vec{P} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\sum_{n=1}^{N\Delta v} \vec{p}_n}{\Delta v} \tag{1.11}$$

donde Δv es un volumen macroscópicamente infinitesimal que contiene N átomos o moléculas por unidad de volumen cuyos momentos dipolares individuales son

[9] Si una distribución localizada de carga $\rho(r')$ confinada en una región finita del espacio V', tiene una carga total nula, como es el caso de átomos y moléculas, entonces, en primera aproximación, su interacción con un campo eléctrico externo puede describirse en términos de su propiedad intrínseca denominada momento dipolar, $\vec{p} = \int_{V'} \vec{r}' \rho(r') dv'$. De igual forma, la interacción de un campo magnético con una distribución acotada de densidad de corriente, $\vec{J}(r')$, puede describirse en primera aproximación en términos de su momento dipolar magnético $\vec{m} = 1/2 \int \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') dv'$.

$\vec{p}_n$ $(n = 1, ..., N)$.

Como se sabe de la electrostática, a efectos del cálculo del campo eléctrico en un punto interior de una distribución volumétrica de momentos dipolares, dicha distribución es equivalente a un conjunto de **c**argas, denominadas **cargas de polarización** de densidad volumétrica[10] ρ_p

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} \tag{1.12}$$

Por tanto, en general la densidad de carga total ρ_{tot} en un punto será la suma de la libre ρ más la ligada ρ_p, y (1.10a) se transforma en

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{tot}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho + \rho_p}{\varepsilon_0} \tag{1.13}$$

o, haciendo uso de (1.12)

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho \tag{1.14}$$

Definiendo la magnitud auxiliar vector desplazamiento $\vec{D}$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \tag{1.15}$$

se obtiene la ecuación (1.1a).

La relación entre $\vec{P}$ y $\vec{E}$ es en general complicada pero para muchos materiales, denominados medios lineales e isótropos, $\vec{P}$ puede considerarse colineal a $\vec{E}$ y, si el campo eléctrico no es muy intenso, proporcional al mismo. Esto se expresa mediante la igualdad

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} \tag{1.16}$$

donde χ_e es un parámetro macroscópico adimensional, llamado **susceptibilidad eléctrica** del medio, que determina la capacidad del medio dieléctrico a ser polarizado. Es de observar que esta relación supone considerar que la polarización $\vec{P}$ del medio al aplicar el campo $\vec{E}$ es instantánea.

En estas condiciones sustituyendo (1.16) en (1.15), se tiene

$$\vec{D} = (1 + \chi_e)\varepsilon_0 \vec{E} \tag{1.17}$$

que puede escribirse en forma más compacta, como

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E} \tag{1.18}$$

[10] En las superficies que separan distintos materiales habría que tener también en cuenta una densidad superficial de carga de polarización.

donde

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e \tag{1.19}$$

y

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \tag{1.20}$$

son la **permitividad relativa** (adimensional) y **permitividad del medio** (F m^{-1}) respectivamente.

Procesos de polarización

La polarización de un material dieléctrico puede tener lugar básicamente mediante cuatro procesos diferentes que pueden presentarse simultáneamente: electrónico, iónico, molecular e interfacial. La figura (1.2) muestra de forma esquemática cada uno de estos tipos de polarización que describimos brevemente a continuación.

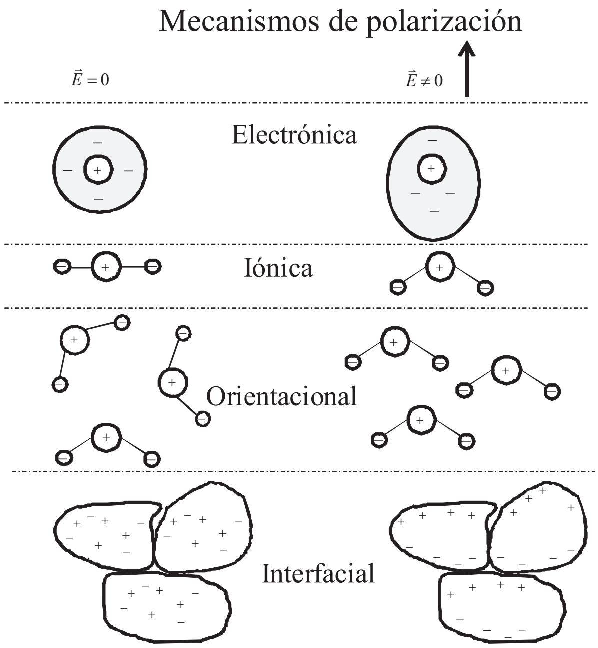

Figura 1.2: Esquema de los diferentes mecanismos de polarización. Es de observar que el sentido del campo eléctrico aplicado se ha supuesto dirigido hacia arriba. En la práctica pueden estar presentes al mismo tiempo diferentes tipos de polarización.