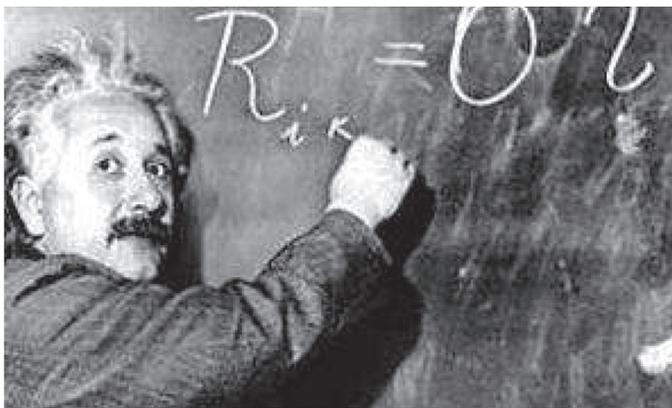


**GRAVITACIÓN Y GEOMETRÍA**  
**UNA INTRODUCCIÓN MODERNA**  
**A LA TEORÍA DE LA RELATIVIDAD GENERAL**



*"I want to know God's thoughts. The rest are details."*

*A. Einstein.*

o Ulm, Alemania, 14 marzo 1879

† Princeton, Estados Unidos, 18 abril 1955

BERT JANSSEN

*Dpto. de Física Teórica y del Cosmos  
Universidad de Granada*

GRAVITACIÓN Y GEOMETRÍA  
UNA INTRODUCCIÓN MODERNA  
A LA TEORÍA DE LA RELATIVIDAD GENERAL

Granada, 2022

COLECCIÓN MANUALES / MAJOR

Ciencias

© BERT JANSSEN

© UNIVERSIDAD DE GRANADA

ISBN: 978-84-338-6913-5

Depósito legal: Gr./165-2022

Edita: Editorial Universidad de Granada

Campus Universitario de Cartuja

Colegio Máximo, s.n., 18071, Granada

Telf.: 958 243930-246220

Web: editorial.ugr.es

Fotocomposición: María José García Sanchis. Granada

Diseño de cubierta: Josemaría Medina Alvea. Granada

Imprime: Gráficas La Madraza. Albolote. Granada

*Printed in Spain*

*Impreso en España*

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra sólo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley.

# Índice general

<b>Prefacio</b>	<b>15</b>
<b>I El Principio de la Relatividad y la Relatividad Especial</b>	<b>17</b>
<b>1. Breve repaso a la teoría de Maxwell</b>	<b>19</b>
1.1. El límite a los sistemas continuos . . . . .	19
1.2. Las leyes de Maxwell . . . . .	23
1.3. Cantidades conservadas . . . . .	27
1.4. Potenciales electromagnéticos e invariancia gauge . . . . .	30
1.5. La Teoría de Maxwell a través del principio variacional . . . . .	33
1.6. Soluciones de las ecuaciones de Maxwell . . . . .	36
<b>2. El Principio de la Relatividad</b>	<b>41</b>
2.1. El Principio de la Relatividad . . . . .	41
2.2. Las simetrías y la forma de las leyes de la física . . . . .	43
2.3. La invariancia de la mecánica newtoniana y las leyes de Maxwell . . . . .	46
2.4. El Principio de la Relatividad y el espacio absoluto . . . . .	50
<b>3. Breve repaso de la relatividad especial</b>	<b>53</b>
3.1. La relatividad del tiempo y el espacio . . . . .	53
3.2. Las transformaciones de Lorentz . . . . .	57
3.3. Dinámica relativista . . . . .	59
3.4. La fuerza de Lorentz y el Principio de la Relatividad . . . . .	63
3.5. La importancia de la covariancia: una parábola . . . . .	66
3.6. El espacio de Minkowski . . . . .	68

<b>4. Álgebra de tensores y transformaciones ortogonales</b>	<b>75</b>
4.1. El convenio de sumación de Einstein . . . . .	75
4.2. Espacios vectoriales y duales . . . . .	76
4.3. La métrica y las transformaciones ortogonales . . . . .	80
4.4. Ejemplo concreto . . . . .	84
4.5. Álgebra de tensores . . . . .	86
4.6. Ejemplo de un tensor físico . . . . .	89
4.7. Operaciones con tensores . . . . .	90
4.8. Apéndice: Covariancia y teoría de representaciones . . . . .	93
<b>5. Relatividad especial en formulación covariante</b>	<b>97</b>
5.1. El espacio de Minkowski (otra vez) . . . . .	97
5.2. El grupo de Lorentz . . . . .	100
5.3. La dinámica relativista covariante . . . . .	103
5.4. La necesidad de la Relatividad General . . . . .	110
<b>II Geometría Diferencial</b>	<b>115</b>
<b>6. Variedades y cambios de coordenadas generales</b>	<b>117</b>
6.1. Breve historia de la geometría no-euclídea . . . . .	117
6.2. Repaso de coordenadas curvilíneas en $\mathbb{R}^N$ . . . . .	120
6.3. Variedades . . . . .	123
6.4. Álgebra tensorial en variedades . . . . .	126
6.5. El símbolo de Levi-Civita y densidades tensoriales . . . . .	128
6.6. Integración y elementos de volumen invariantes . . . . .	130
6.7. Ejemplo concreto: cambios de coordenadas en $\mathbb{S}^2$ . . . . .	132
<b>7. Conexión afín y curvatura</b>	<b>135</b>
7.1. Transporte paralelo y la conexión afín . . . . .	135
7.2. La derivada covariante . . . . .	139
7.3. Curvatura y el tensor de Riemann . . . . .	141
7.4. Ejemplo concreto: distintas conexiones en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	143
7.5. Tensores de curvatura . . . . .	144
7.6. Geodésicas afines y métricas . . . . .	146
7.7. Apéndice: La derivada covariante de densidades tensoriales . . . . .	148

<b>8. Cálculo tensorial con la conexión de Levi-Civita</b>	<b>151</b>
8.1. La conexión de Levi-Civita . . . . .	151
8.2. Levi-Civita y la derivada del elemento de volumen . . . . .	153
8.3. Las simetrías de los tensores de curvatura . . . . .	154
8.4. Ejemplo concreto: tensores de curvatura de la $\mathbb{S}^2$ . . . . .	155
8.5. Operadores diferenciales en variedades arbitrarias . . . . .	157
8.6. Las coordenadas localmente inerciales . . . . .	159
8.7. Geodésicas con Levi-Civita . . . . .	162
8.8. Desviación geodésica . . . . .	163
8.9. Ejemplo concreto: geodésicas en la $\mathbb{S}^2$ . . . . .	165
<b>III Relatividad General</b>	<b>169</b>
<b>9. El Principio de Equivalencia</b>	<b>171</b>
9.1. Masa gravitatoria y masa inercial . . . . .	171
9.2. El Principio de Equivalencia para campos homogéneos . . . . .	173
9.3. Experimentos en un ascensor . . . . .	176
9.4. El Principio de Equivalencia para campos inhomogéneos . . . . .	178
9.5. Implicaciones matemáticas del Principio de Equivalencia . . . . .	180
9.6. Curvatura, sensación de peso y sistemas inerciales . . . . .	182
<b>10. Las ecuaciones de Einstein</b>	<b>187</b>
10.1. El tensor de energía-momento . . . . .	187
10.2. Las ecuaciones de Einstein . . . . .	192
10.3. Física en espacios curvos y la acción de Einstein-Hilbert . . . . .	195
10.4. La estructura local y global del espaciotiempo . . . . .	201
<b>11. Los tests clásicos de la Relatividad General</b>	<b>207</b>
11.1. El límite newtoniano . . . . .	207
11.2. El perihelio de Mercurio . . . . .	210
11.3. La deflexión de la luz . . . . .	214
11.4. El efecto Doppler gravitacional . . . . .	218
11.5. El efecto Shapiro . . . . .	220
11.6. Tests modernos de la Relatividad General . . . . .	222

<b>IV Soluciones de las Ecuaciones de Einstein</b>	<b>227</b>
<b>12. La solución de Schwarzschild</b>	<b>229</b>
12.1. La derivación de la solución de Schwarzschild . . . . .	229
12.2. Estructura causal de la solución de Schwarzschild . . . . .	234
12.3. Las coordenadas de Eddington-Finkelstein . . . . .	237
12.4. Colapso gravitacional y formación de agujeros negros . . . . .	243
<b>13. El agujero negro de Reissner-Nordström</b>	<b>249</b>
13.1. Reissner-Nordström como solución de Einstein-Maxwell . . . . .	249
13.2. Los horizontes en Reissner-Nordström . . . . .	252
13.3. La estructura causal de Reissner-Nordström subextremal . . . . .	254
13.4. El agujero negro de Reissner-Nordström extremal . . . . .	259
<b>14. Agujeros negros con rotación</b>	<b>263</b>
14.1. La solución de Kerr en diversas coordenadas . . . . .	263
14.2. Los horizontes y la ergosfera de la solución de Kerr . . . . .	266
14.3. La solución de Kerr-Newman . . . . .	269
14.4. El arrastre de sistemas inerciales . . . . .	271
14.5. El proceso de Penrose y la extracción de energía . . . . .	274
14.6. El teorema del área . . . . .	278
14.7. Termodinámica de los agujeros negros . . . . .	279
14.8. Agujeros negros cuánticos . . . . .	281
<b>15. Cosmología relativista</b>	<b>287</b>
15.1. Relatividad General y cosmología . . . . .	287
15.2. La métrica de Friedmann-Robertson-Walker . . . . .	289
15.3. Las ecuaciones de Friedmann . . . . .	293
15.4. Distancias y horizontes cosmológicos . . . . .	295
15.5. El contenido de energía y materia del universo . . . . .	301
15.6. Soluciones cosmológicas . . . . .	303
<b>16. Cosmología moderna</b>	<b>315</b>
16.1. Breve historia de la cosmología temprana . . . . .	315
16.2. El Big Bang caliente y sus problemas observacionales . . . . .	318
16.3. Inflación . . . . .	322
16.4. Determinación de los parámetros cosmológicos . . . . .	327

16.5. El Modelo Estándar de la Cosmología: $\Lambda$ CDM . . . . .	332
<b>17. Expansión del campo débil y ondas gravitacionales</b>	<b>337</b>
17.1. Perturbaciones de métricas arbitrarias . . . . .	337
17.2. Ondas en Minkowski y el espín del campo gravitatorio . . . . .	341
17.3. Fuentes de ondas gravitacionales . . . . .	346
17.4. Ondas gravitacionales emitidas por un sistema binario . . . . .	349
17.5. La detección directa de ondas gravitacionales . . . . .	351
<b>18. Grados de libertad gravitatorios</b>	<b>357</b>
18.1. La energía del campo gravitatorio . . . . .	357
18.2. Perturbaciones escalares y vectoriales en métricas FRW . . . . .	360
18.3. Grados de libertad dinámicos y ligaduras . . . . .	363
18.4. Gravitomagnetismo . . . . .	366
18.5. Fuerza de Lorentz gravitomagnética . . . . .	367
18.6. Soluciones gravitomagnéticas . . . . .	369
<b>19. Soluciones exactas de ondas gravitacionales</b>	<b>373</b>
19.1. Coordenadas del cono de luz . . . . .	373
19.2. Las coordenadas de Rosen . . . . .	374
19.3. Ondas pp en coordenadas de Brinkmann . . . . .	376
19.4. Ondas gravitacionales planas . . . . .	379
19.5. El límite de Penrose . . . . .	381
<b>20. Soluciones misceláneas</b>	<b>385</b>
20.1. Condiciones de energía . . . . .	385
20.2. El espacio de Minkowski con direcciones compactas . . . . .	387
20.3. El espacio de Rindler . . . . .	390
20.4. La solución interior de Schwarzschild . . . . .	393
20.5. El espacio de De Sitter . . . . .	396
20.6. El espacio de anti-De Sitter . . . . .	399
20.7. La métrica de Kasner . . . . .	402
20.8. El universo de Gödel . . . . .	404

<b>V</b>	<b>Relatividad General Avanzada</b>	<b>409</b>
<b>21.</b>	<b>Las álgebras de <math>SO(3)</math> y <math>SU(2)</math></b>	<b>411</b>
21.1.	De grupos a álgebras . . . . .	411
21.2.	Las representaciones de $SO(3)$ y $SU(2)$ . . . . .	413
21.3.	Breve repaso de álgebra compleja . . . . .	417
21.4.	Espinores en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	420
<b>22.</b>	<b>Las álgebras de Lorentz y de Poincaré</b>	<b>425</b>
22.1.	El álgebra de Lorentz . . . . .	425
22.2.	Las representaciones del álgebra de Lorentz . . . . .	428
22.3.	Gammátrica y el álgebra de Clifford . . . . .	431
22.4.	Los espinores de Dirac . . . . .	434
22.5.	Los espinores de Weyl . . . . .	438
22.6.	El grupo de Lorentz y $SL(2, \mathbb{C})$ . . . . .	444
22.7.	El álgebra de Poincaré . . . . .	448
<b>23.</b>	<b>Derivadas de Lie y vectores de Killing</b>	<b>453</b>
23.1.	Cambios generales de coordenadas infinitesimales . . . . .	453
23.2.	La derivada de Lie y los corchetes de Lie . . . . .	457
23.3.	Vectores de Killing . . . . .	461
23.4.	Ejemplos concretos: vectores de Killing de la $\mathbb{S}^2$ y del espacio de Minkowski . . . . .	463
23.5.	Espacios máximamente simétricos . . . . .	466
23.6.	Cantidades conservadas . . . . .	468
<b>24.</b>	<b>Transformaciones de Weyl y diagramas de Penrose</b>	<b>473</b>
24.1.	Transformaciones conformes en el espacio plano . . . . .	473
24.2.	Transformaciones de Weyl para métricas arbitrarias . . . . .	477
24.3.	El diagrama de Penrose del espacio de Minkowski . . . . .	482
24.4.	Los diagramas de Penrose de soluciones cosmológicas . . . . .	486
24.5.	Los diagramas de Penrose de agujeros negros . . . . .	492
<b>25.</b>	<b>Geometría diferencial desde el espacio tangente</b>	<b>497</b>
25.1.	Cambios de coordenadas en el espacio tangente . . . . .	497
25.2.	Los postulados del Vielbein . . . . .	501
25.3.	Tensores de curvatura desde el espacio tangente . . . . .	502
25.4.	Ejemplo concreto: Vielbein y conexiones de espín para la $\mathbb{S}^2$ . . . . .	503

25.5. Las ecuaciones de Einstein desde el espacio tangente . . . . .	504
25.6. Las coordenadas de observadores acelerados . . . . .	506
25.7. Espinores en variedades curvas . . . . .	509
<b>26. El formalismo hamiltoniano en Relatividad General</b>	<b>513</b>
26.1. La geometría de hipersuperficies . . . . .	513
26.2. Curvatura extrínseca . . . . .	515
26.3. Ejemplo concreto: una sección hiperbólica en $\mathbb{R}^{1,3}$ . . . . .	519
26.4. La descomposición $3 + 1$ . . . . .	520
26.5. El formalismo hamiltoniano en Klein-Gordon y Maxwell . . . . .	522
26.6. La formulación ADM de la Relatividad General . . . . .	526
26.7. La masa ADM y el término de Gibbons-Hawking-York . . . . .	528
<b>27. Gravedad como una teoría gauge</b>	<b>533</b>
27.1. Teoría de Maxwell como teoría gauge $U(1)$ . . . . .	533
27.2. Gaugear grupos no-abelianos: Teoría de Yang-Mills . . . . .	536
27.3. Gaugear el álgebra de Poincaré . . . . .	539
27.4. Gaugear el álgebra de (anti-)De Sitter . . . . .	544
<b>28. El formalismo Fierz-Pauli</b>	<b>549</b>
28.1. El teorema de Noether . . . . .	549
28.2. Electromagnetismo como una teoría relativista de espín 1 . . . . .	552
28.3. El procedimiento de Noether en teoría de Maxwell . . . . .	554
28.4. Gravedad como una teoría relativista de espín 2 . . . . .	556
28.5. Acoplo a la materia . . . . .	558
28.6. Consistencia de la teoría y procedimiento de Noether . . . . .	559
28.7. Correcciones de orden más alto y la Relatividad General . . . . .	562
<b>29. Teoría de Maxwell y formas diferenciales</b>	<b>567</b>
29.1. El efecto Aharonov-Bohm . . . . .	567
29.2. Dualidad electromagnética . . . . .	572
29.3. El monopolo de Dirac . . . . .	575
29.4. Formas diferenciales . . . . .	579
29.5. Teoría de Maxwell en el lenguaje de formas . . . . .	582
29.6. Formas cerradas y exactas . . . . .	584
29.7. La cohomología de De Rham . . . . .	587
29.8. Relatividad General en el lenguaje de formas . . . . .	591

<b>30. Teoría de Kaluza-Klein</b>	<b>595</b>
30.1. Dimensiones extras y compactificación dimensional . . . . .	595
30.2. La descomposición de la métrica . . . . .	599
30.3. De gravedad pura a Einstein-Maxwell-escalar . . . . .	601
30.4. Ejemplo concreto: el agujero negro de Kaluza-Klein . . . . .	606
30.5. Fenomenología e importancia . . . . .	608
<b>A. Dimensiones y unidades</b>	<b>611</b>
<b>B. Convenios</b>	<b>613</b>
B.1. Brevísimo repaso de la Mecánica Analítica . . . . .	613
B.2. Relatividad Especial . . . . .	615
B.3. Geometría diferencial . . . . .	616
B.4. Relatividad General . . . . .	617
<b>C. Referencias</b>	<b>619</b>
<b>Índice alfabético</b>	<b>623</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>637</b>

# Prefacio

*Las cosas se deberían explicar de la forma más sencilla posible, pero no más sencilla aún.*  
(A. Einstein)

Se cuenta que alrededor de 1920 en la Royal Society un físico saludó al astrofísico británico Arthur Eddington como *“una de las tres personas en el mundo que entendía la teoría de la relatividad”*. Cuando este respondió *“Pues, no sé...”*, el físico (cuyo nombre Eddington deliberadamente nunca reveló) insistió *“¡No sea modesto, Eddington!”*, a lo que el astrofísico respondió: *“¡Al contrario! Me pregunto quién podría ser el tercero...”*

Aunque es posible que la anécdota sea históricamente correcta, la afirmación de Eddington ciertamente no lo era, ni ahora, ni entonces. Prueba de ello es la gran cantidad de físicos que se han puesto a trabajar en la relatividad general y el número de soluciones que fueron halladas en los años inmediatamente después de la publicación de la teoría en 1915: la acción de Hilbert (1915), los agujeros negros de Schwarzschild (1916) y Reissner-Nordström (1916 y 1918), el espacio de De Sitter (1917), la solución de Lense y Thirring (1918), los modelos cosmológicos de Friedmann (1922) y Lemaître (1927), la onda gravitacional de Brinkmann (1925), las compactificaciones de Kaluza y Klein (1921 y 1926), ...

Aún así, la teoría de la relatividad siempre ha tenido fama de contraintuitiva y tremendamente difícil. Esta fama, en mi opinión, es solamente justificada hasta cierto punto. La teoría de la relatividad especial forma parte del currículum estándar de cualquier estudiante de física en los primeros años de la carrera. La relatividad general es más difícil y la suelen estudiar solo los estudiantes que se especializan en física teórica.

Sin embargo, conviene distinguir dos partes dentro de la relatividad general: una parte física, que describe las ideas básicas de la teoría, y una parte matemática, que nos da el formalismo con el cual describir la física. La dificultad de la relatividad general está en la parte matemática, ya que contiene análisis tensorial y geometría diferencial, temas que el típico estudiante de física no encuentra en su currículum, a no ser que vaya a estudiar relatividad general. Por otro lado, la parte física es relativamente sencilla, no siendo en el fondo nada más que llevar hasta sus últimas consecuencias lógicas unos pocos principios básicos. Según Rutherford *“una buena teoría física se le puede explicar a una camarera en un bar”*. En mi opinión (la parte física de) la relatividad general satisface esta condición (con suficiente tiempo disponible).

En este libro he intentado mantener el equilibrio entre estas dos partes, puesto que creo que las dos son igual de importantes: sin la matemática es imposible alcanzar un nivel que vaya más allá de los numerosos libros de divulgación sobre relatividad. Por otro lado, sin la parte física uno estaría haciendo básicamente geometría diferencial a un nivel que lo podía haber hecho Riemann en el siglo XIX y se perdería unos profundos principios sobre la equivalencia de observadores y la estructura del espaciotiempo.

Como físico teórico formal, estoy muy interesado en la interacción de la física y las matemáticas. Personalmente, me gusta ver por un lado cómo la consistencia matemática obliga a la Naturaleza a ser de cierta manera, y por otro lado cómo la Naturaleza realiza algunos conceptos matemáticos aparentemente abstractos en ciertas configuraciones físicas. Un ejemplo del primero es el hecho de que la Teoría de Maxwell está completamente determinada, exigiendo solamente simetría Lorentz e invariancia gauge. Un ejemplo del segundo es el carácter tensorial de la conductividad de un cristal anisótropo, o el efecto Aharonov-Bohm, que usa la topología no trivial del espacio.

Es inevitable que esta visión quede reflejado en el libro. Aparte de ser riguroso cuando es necesario, se ha intentado apelar a la intuición física e incluso cultivar una nueva intuición relativista (o en su caso cuántica), basada en el formalismo matemático. Es una fuerte convicción

personal que dominar los dos lenguajes es una enorme ventaja. No solo permite oportunamente abordar cada problema como físico o matemático, según mejor convenga,<sup>1</sup> sino que ayuda a darse cuenta de que en realidad las dos partes no son más que dos caras de la misma moneda. Al fin y al cabo, las únicas preguntas con una respuesta objetiva son preguntas matemáticas, pero el significado y la interpretación de esas respuestas, es física.

Empecé a escribir este libro hace 17 años como unos apuntes de clase para la asignatura de Relatividad General de la (entonces) Licenciatura de Física en la Universidad de Granada. Cuando versiones de estos apuntes (que corresponden más o menos con los primeros 12 capítulos del libro actual) empezaron a circular por internet, se me ocurrió añadir algunos capítulos más y convertirlo en un libro de texto. Al final, el temario casi ha triplicado el material original.

El libro empieza a nivel de tercero del grado de Física, con un repaso de la Teoría de Maxwell y de la Mecánica Analítica clásica, y va introduciendo la Relatividad Especial, la Geometría Diferencial y la Relatividad General de manera sistemática. Los capítulos añadidos a los apuntes originales son temas más avanzados, que normalmente se tratan en cursos a nivel de máster y doctorado. Aun así, se ha hecho un esfuerzo de procurar que el libro fuera autocontenido y de mantener la continuidad entre las distintas partes y capítulos.

Hay cientos de libros de texto sobre Relatividad General, cada uno con su propio estilo y ángulos de enfoque, la gran mayoría en inglés. Espero que el hecho de este esté escrito en español y mi enfoque personal del campo, resulte útil a los estudiantes y a otros interesados en el campo.

Bert Janssen,  
Granada, 12 de mayo 2021

<sup>1</sup>En un tipo de invariancia gauge físico-matemático.

## **Parte I**

# **El Principio de la Relatividad y la Relatividad Especial**



# Capítulo 1

## Breve repaso a la teoría de Maxwell

*La teoría de la Relatividad Especial debe su origen a las ecuaciones de Maxwell del campo electromagnético.*

(A. Einstein)

La teoría de Maxwell de las interacciones electromagnéticas siempre ha tenido una relación muy estrecha con la Teoría de la Relatividad. Aunque data de unos 40 años antes de que Einstein presentara su Relatividad Especial, ya llevaba algunas de las características de esta, como el hecho de que la velocidad de la luz sea una cantidad absoluta y la invariancia bajo las transformaciones de Lorentz. La teoría de Maxwell encaja tan extraordinariamente bien en la Relatividad Especial (y con unas ligeras modificaciones en la Relatividad General), que servirá en numerosas ocasiones como ejemplo concreto o prueba de técnicas que encontramos a lo largo de este curso. Por lo tanto merece la pena repasar brevemente los aspectos más importantes de la teoría de Maxwell en lenguaje tridimensional.

### 1.1. El límite a los sistemas continuos

La teoría de Maxwell es una *teoría de campos*, es decir una teoría con infinitos grados de libertad. El concepto de un campo físico fue introducido por Michael Faraday (1791-1869), que había observado que el serrín metálico se agrupaba según filamentos en la proximidad de cargas eléctricas e imanes. Faraday se imaginaba que las cargas y los imanes generaban campos eléctricos y magnéticos que se extendían por el espacio y que estos actuaban a su vez sobre otras cargas e imanes. De esta manera, Faraday consiguió eliminar el problema de la acción a distancia, tan típico de la gravedad newtoniana y la ley de Coulomb, que postula que las interacciones físicas se manifiestan instantáneamente a distancias arbitrariamente grandes, sin preocuparse de la pregunta de cómo se propagan estas influencias. En una teoría de campos, como la teoría de Maxwell, las distintas partículas no interactúan directamente entre ellas, sino que usan los campos como los transportadores de las interacciones físicas: una perturbación de una carga eléctrica genera una perturbación en el campo electromagnético, que a su vez se propaga a velocidad finita (la velocidad de la luz) por todo el espacio. Las demás cargas en el universo solo notan la influencia de la perturbación original cuando la perturbación del campo electromagnético haya llegado hasta ellas. En este sentido un campo físico es realmente un intermediario a través del cual las distintas partículas interactúan a grandes distancias. Hoy en día, las teorías de campos forman la base de la física moderna: toda la física de partículas está basada en la teoría cuántica de campos, mientras en cierto modo la Relatividad General es en el fondo una reformulación de la gravedad newtoniana en el lenguaje de una teoría de campos.

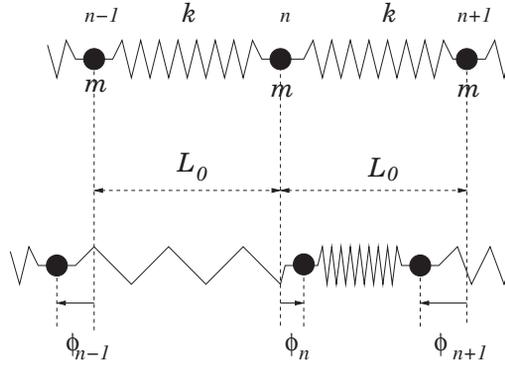


Figura 1.1: Una serie de masas  $m$  están conectadas a través de muelles con constante  $k$  y posición de equilibrio  $L_0$ . En la situación de equilibrio (arriba) las masas están separadas por la distancia  $L_0$ . En la situación general (abajo) el desplazamiento de la masa  $m$  de la posición de equilibrio está caracterizado por la variable  $\phi_n$ .

Conceptualmente las teorías de campos son un poco diferentes a los sistemas discretos. Por lo tanto, es útil estudiar la conexión con la mecánica analítica discreta antes de tratar a fondo el electromagnetismo. Desde el punto de vista mecánico, una teoría de campos no es nada más que una teoría con un número infinito (continuo) de grados de libertad. Son aplicables por lo tanto las mismas técnicas que ya conocemos de (por ejemplo) el formalismo lagrangiano, solamente teniendo cuidado con las sutilezas que surgen a la hora de tomar el límite continuo. En esta sección revisaremos cómo tomar este límite de manera adecuada.

Consideremos un sistema que consiste en una serie infinita (pero contable) de masas iguales, alineadas a lo largo del eje  $x$  y conectadas por muelles idénticos de tamaño  $L_0$  y constante elástica  $k$ . Este sistema podría ser un modelo para los átomos en un metal, que vibran alrededor de una posición de equilibrio (Véase Figura 1.1). Supondremos además que las masas solo se pueden mover en la dirección  $x$ . Tomamos como coordenadas generalizadas  $q_n(t)$  las posiciones de las masas,

$$q_n(t) = n L_0 + \phi_n(t), \quad (1.1)$$

donde el índice  $n \in \mathbb{Z}$  hace referencia a la  $n$ -ésima masa y  $\phi_n(t)$  mide la desviación de la posición de equilibrio. Las velocidades generalizadas por lo tanto vienen dadas por  $\dot{q}_n = \dot{\phi}_n$ . La energía potencial es proporcional al cuadrado de la desviación de los muelles de la longitud de equilibrio y viene dada por

$$V = \frac{1}{2} \sum_n k (q_{n+1} - q_n - L_0)^2 = \frac{1}{2} \sum_n k (\phi_{n+1} - \phi_n)^2, \quad (1.2)$$

de modo que podemos escribir el lagrangiano  $L = T - V$  como

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \sum_n m \dot{\phi}_n^2 - \frac{1}{2} \sum_n k (\phi_{n+1} - \phi_n)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_n L_0 \left[ \frac{m}{L_0} \dot{\phi}_n^2 - k L_0 \left( \frac{\phi_{n+1} - \phi_n}{L_0} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (1.3)$$

donde en la última igualdad hemos sacado un factor  $L_0$  por razones que se aclararán un poco más adelante. Las ecuaciones de movimiento de este lagrangiano vienen dadas por

$$\frac{m}{L_0} \ddot{\phi}_n = k L_0 \left( \frac{\phi_{n+1} - \phi_n}{L_0^2} \right) - k L_0 \left( \frac{\phi_n - \phi_{n-1}}{L_0^2} \right). \quad (1.4)$$

Aquí no estamos interesados en intentar resolver estas ecuaciones, sino que queremos saber qué ocurre con el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento en el límite donde la posición de equilibrio  $L_0$  tiende a cero. En el modelo para los átomos en un metal este límite se corresponde con estudiar el sistema a escalas tan grandes que ya no se perciben los átomos individuales y el metal parece un material homogéneo.

Una primera observación es que en este caso la distribución de masas se hace continua y el sistema de masas conectadas por muelles tiende a una varilla elástica con cierta densidad de masa  $\rho$ . El índice discreto  $n$  que hace referencia a la  $n$ -ésima masa, se convierte en una variable continua  $x$ , indicando los puntos a lo largo de la varilla. Concretamente, las distintas coordenadas generalizadas  $\phi_n(t)$ , que antes indicaban el desplazamiento de cada una de las masas, se convierten en una sola función continua  $\phi(x, t)$ , que ahora describe el desplazamiento a lo largo de la recta de una cantidad infinitesimal de masa  $dm$  situada en la posición  $x$ .

De este modo hemos pasado de una teoría con un número discreto de grados de libertad a una teoría con un número continuo de grados de libertad, es decir, a una teoría de campos. Nótese que, a pesar de que  $\phi(x, t)$  sea una función de  $x$  y de  $t$ , el origen de cada una de las variables es muy distinto. Merece la pena enfatizar que en el límite de la teoría de campos, la variable dinámica de la teoría (la que describe la física del sistema) es el campo  $\phi(x, t)$  y no las posiciones  $x$ . Las posiciones  $x$  no son en realidad más que una etiqueta continua para distinguir los diferentes grados de libertad de  $\phi$ .

Miremos ahora cómo se transforman el lagrangiano (1.3) y las ecuaciones de movimiento (1.4) en el límite  $L_0 \rightarrow 0$ . Por un lado, está claro que las derivadas  $\dot{\phi}_n(t)$  y  $\ddot{\phi}_n(t)$  se convierten en derivadas parciales con respecto al tiempo,

$$\dot{\phi}_n(t) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\phi(x, t), \quad \ddot{\phi}_n(t) \longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(x, t). \quad (1.5)$$

Por otro lado, el segundo término de (1.3) es prácticamente por definición la derivada parcial con respecto a  $x$  (esta es la razón por la que habíamos sacado el factor  $L_0$  antes),

$$\lim_{L_0 \rightarrow 0} \frac{\phi_{n+1}(t) - \phi_n(t)}{L_0} = \lim_{L_0 \rightarrow 0} \frac{\phi(x + L_0, t) - \phi(x, t)}{L_0} = \frac{\partial}{\partial x}\phi(x, t) \quad (1.6)$$

y consecuentemente los términos del lado derecho de (1.4) se convierten en una derivada segunda de  $x$ :

$$\begin{aligned} \lim_{L_0 \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{\phi_{n+1} - \phi_n}{L_0^2} \right) - \left( \frac{\phi_n - \phi_{n-1}}{L_0^2} \right) \right] &= \\ = \lim_{L_0 \rightarrow 0} \frac{1}{L_0} \left[ \left( \frac{\phi(x + L_0, t) - \phi(x, t)}{L_0} \right) - \left( \frac{\phi(x, t) - \phi(x - L_0, t)}{L_0} \right) \right] &= \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Queda solo identificar el límite de los parámetros que aparecen en el lagrangiano y en la ecuación de movimiento. La cantidad  $m/L_0$  tiene dimensión  $\mathbf{ML}^{-1}$ ,<sup>1</sup> y en el límite continuo se convierte en la densidad  $\rho$  de la varilla. La cantidad  $kL_0$  se identifica de la siguiente manera: la fuerza necesaria para extender uno de los muelles la distancia  $(\phi_{n+1} - \phi_n)$  viene dada por

$$F = k(\phi_{n+1} - \phi_n) = kL_0 \frac{(\phi_{n+1} - \phi_n)}{L_0} = Y\Delta L_0, \quad (1.8)$$

donde  $\Delta L_0 = (\phi_{n+1} - \phi_n)/L_0$  es la extensión por unidad de longitud y  $Y$  es el módulo de Young, la constante de proporcionalidad entre la fuerza aplicada y la extensión por unidad de longitud en los materiales elásticos, una constante que depende del material considerado.

<sup>1</sup>Para el análisis dimensional usado en este libro remitimos al Apéndice A.

Con esta identificación de la densidad y el módulo de Young podemos escribir el lagrangiano (1.3) como

$$L = \int dx \left[ \frac{1}{2} \rho (\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2} Y (\partial_x \phi)^2 \right], \quad (1.9)$$

donde la suma sobre los desplazamientos  $\sum_n L_0$  se ha convertido en una integral  $\int dx$  sobre la variable continua  $x$ . Del mismo modo, la ecuación de movimiento (1.4) se convierte en una ecuación de ondas

$$\rho \partial_t^2 \phi(x, t) - Y \partial_x^2 \phi(x, t) = 0, \quad (1.10)$$

que describe ondas (longitudinales) de densidad en el material de la varilla que se propagan con una velocidad  $v = \sqrt{Y/\rho}$ .

Podemos escribir el lagrangiano como  $L = \int dx \mathcal{L}(\phi, \partial_x \phi, \partial_t \phi)$ , donde el integrando  $\mathcal{L}$  es la *densidad lagrangiana*, que contiene toda la física del sistema. A su vez se define la *acción*  $S$  como

$$S(\phi, \partial_x \phi, \partial_t \phi) = \int dt L(\phi, \partial_x \phi, \partial_t \phi) = \int dt dx \mathcal{L}(\phi, \partial_x \phi, \partial_t \phi). \quad (1.11)$$

Nótese que hemos tenido mucho cuidado en obtener el límite continuo tanto del lagrangiano (1.10) como de las ecuaciones de movimiento (1.9), pero que aún no hemos dicho nada sobre cómo derivar las ecuaciones de movimiento del lagrangiano en el caso continuo. En principio no es muy diferente a la derivación estándar de la mecánica analítica con variables discretas, salvo que ahora hay que variar con respecto a los campos  $\phi(x, t)$ , es decir con respecto a unas variables continuas. La herramienta matemática necesaria para esta operación es la *derivada funcional*, definida como

$$\int dt' dx' \frac{\delta \phi(x', t')}{\delta \phi(x, t)} = \int dt' dx' \delta(x - x') \delta(t - t') = 1, \quad (1.12)$$

donde  $\delta(x - x')$  es la delta de Dirac. En general la derivada funcional de una función  $F(\phi(x, t))$  de los campos viene dada por la regla de la cadena,

$$\int dt' dx' \frac{\delta F(\phi(x', t'))}{\delta \phi(x, t)} = \int dt' dx' \frac{\partial F(\phi(x', t'))}{\partial \phi(x', t')} \frac{\delta \phi(x', t')}{\delta \phi(x, t)} = \frac{\partial F(\phi(x, t))}{\partial \phi(x, t)}. \quad (1.13)$$

La variación de (1.11) con respecto a los campos  $\phi(x, t)$  viene entonces dada por

$$\begin{aligned} 0 \equiv \delta S = \int dt' dx' \left[ \frac{\delta \mathcal{L}(\phi(x', t'), \partial_{x'} \phi(x', t'), \partial_{t'} \phi(x', t'))}{\delta \phi(x, t)} \delta \phi(x, t) \right. \\ \left. + \frac{\delta \mathcal{L}(\phi(x', t'), \partial_{x'} \phi(x', t'), \partial_{t'} \phi(x', t'))}{\delta \partial_x \phi(x, t)} \delta \partial_x \phi(x, t) \right. \\ \left. + \frac{\delta \mathcal{L}(\phi(x', t'), \partial_{x'} \phi(x', t'), \partial_{t'} \phi(x', t'))}{\delta \partial_t \phi(x, t)} \delta \partial_t \phi(x, t) \right]. \quad (1.14) \end{aligned}$$

Igual que en el caso de variables discretas, podemos suponer que la derivada y la variación conmutan,

$$\delta \partial_t \phi(x, t) = \partial_t \delta \phi(x, t), \quad \delta \partial_x \phi(x, t) = \partial_x \delta \phi(x, t), \quad (1.15)$$

de modo que integrando por partes los últimos dos términos e imponiendo las condiciones de contorno

$$\delta \phi(x, t_1) = \delta \phi(x, t_2) = \delta \phi(x_1, t) = \delta \phi(x_2, t) = 0, \quad (1.16)$$

(es decir, tomando la variación igual a cero tanto en los puntos iniciales y finales como en los contornos<sup>2</sup>), tenemos que la variación toma la forma

$$0 \equiv \delta S = \int dt dx \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi(x, t))} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \phi(x, t))} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x, t)} \right] \delta \phi(x, t), \quad (1.17)$$

<sup>2</sup>En el caso de la varilla elástica hemos tomado  $x_1 = -\infty$  y  $x_2 = \infty$ , pero en general la integración se puede hacer tanto en intervalos finitos como infinitos.

lo que por el cálculo variacional solo es cero si se satisface la ecuación de Euler-Lagrange para una teoría de campos,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi)} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (1.18)$$

Aplicando esto al lagrangiano (1.9) encontramos que efectivamente su variación da lugar a la ecuación de movimiento (1.10), tal como hemos derivado antes, calculando el límite explícitamente.

Por muy complicadas que puedan parecer las derivadas funcionales, las reglas (1.12) y (1.13) están diciendo que en la práctica se aplican como si fueran derivadas ordinarias, olvidándose de que uno en realidad está derivando con respecto a funciones. Omitiendo la dependencia funcional, podemos por lo tanto escribir la variación (1.17) de la acción (1.9) simplemente como

$$0 \equiv \delta S = \int dt dx \left[ \rho \partial_t^2 \phi - Y \partial_x^2 \phi \right] \delta \phi. \quad (1.19)$$

La generalización de todo el formalismo a dos y tres dimensiones debería ser obvia. En lugar de ser funciones de solo  $x$  y  $t$ , los campos  $\phi(x^i, t)$  van a depender en general de  $x^i$  y  $t$  y el lagrangiano será una función de  $\phi(x^i, t)$  y sus derivadas  $\partial_j \phi(x^i, t)$  y  $\partial_t \phi(x^i, t)$ . La ecuación de Euler-Lagrange (1.18) será por lo tanto de la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi)} \right) + \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (1.20)$$

## 1.2. Las leyes de Maxwell

El físico escocés James Clerk Maxwell (1831-1879) publicó sus cuatro leyes de Maxwell en 1865, aunque la mayoría de ellas ya habían sido descubiertas por Charles-Augustin Coulomb (1736-1806), Hans Christian Ørsted (1777-1851), André-Marie Ampère (1775-1836), Jean-Baptiste Biot (1774-1862), Félix Savart (1791-1841) y Faraday a base de investigación experimental. De hecho Maxwell añadió solo un término nuevo a las ecuaciones que ahora llevan su nombre. Pero el gran logro de Maxwell fue unificar el conjunto de leyes empíricas sueltas sobre electrostática, corrientes eléctricas e inducción magnética en una sólida teoría, que describe todos los fenómenos relacionados con el electromagnetismo. Además resultó que su teoría era capaz de dar un fundamento teórico a la óptica, una parte de la física que hasta entonces parecía completamente desconectada de los fenómenos electromagnéticos.

Dada una densidad de cargas eléctricas  $\rho(\vec{x}, t)$  y una densidad de corriente  $\vec{j}(\vec{x}, t)$ , las leyes de Maxwell para los campos eléctricos  $\vec{E}(\vec{x}, t)$  y magnéticos  $\vec{B}(\vec{x}, t)$  vienen dadas, en unidades de Lorentz-Heaviside,<sup>3</sup> en la siguiente forma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{E}, \quad (1.21)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{B}, \quad (1.22)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz.

<sup>3</sup>Las unidades de Lorentz-Heaviside son un convenio donde, a diferencia de las unidades SI, la permitividad eléctrica  $\epsilon_0$  y la permeabilidad magnética  $\mu_0$  del vacío no aparecen explícitamente. Tiene las ventajas de que el único parámetro físico que aparece en las ecuaciones de Maxwell es la velocidad de la luz  $c$  y que el campo eléctrico  $\vec{E}$  y el campo magnético  $\vec{B}$  tienen la misma dimensión,  $[\vec{E}] = [\vec{B}] = \text{M}^{1/2} \text{L}^{-3/2}$ .

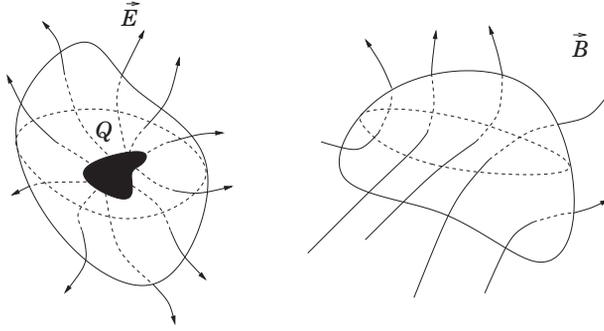


Figura 1.2: La primera y la tercera ley de Maxwell: el flujo del campo eléctrico  $\vec{E}$  a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga total encerrada dentro de la superficie, mientras que el flujo del campo magnético  $\vec{B}$  a través de cualquier superficie cerrada es cero, debido al hecho de que no existen los monopolos magnéticos.

Las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial (1.21)-(1.22) constan de 8 ecuaciones diferenciales lineales acopladas, donde en general se toma como condiciones de contorno que los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  tienden a cero en el infinito (para sistemas infinitos). Aunque la forma diferencial (1.21)-(1.22) es más conveniente para buscar soluciones de las ecuaciones, la física detrás de estas ecuaciones se ve mejor en la formulación integral. Utilizando los teoremas de Stokes sobre las integrales de la divergencia y del rotacional de un campo vectorial  $\vec{A}$ ,

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} d^3x = \oint_{\partial V} \vec{A} \cdot \vec{n} d^2x, \quad \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{n} d^2x = \oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r}, \quad (1.23)$$

podemos reescribir las ecuaciones de Maxwell (1.21)-(1.22) en su forma integral:

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot \vec{n} d^2x = \int_V \rho d^3x, \quad (1.24)$$

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} d^2x, \quad (1.25)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot \vec{n} d^2x = 0, \quad (1.26)$$

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{c} \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} d^2x + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} d^2x. \quad (1.27)$$

La primera ley de Maxwell o la *ley de Gauss* (1.24) nos dice que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a la carga total encerrada dentro de la superficie (véase Figura 1.2, izquierda). No es nada más que una versión del teorema de Gauss sobre flujos de campos vectoriales, aplicada a  $\vec{E}$ , identificando la *carga eléctrica*,

$$Q = \int \rho d^3x, \quad (1.28)$$

como fuente del campo eléctrico. Efectivamente, las cargas positivas y negativas se manifiestan como las fuentes y los pozos de líneas de campo eléctrico. En particular, si tomamos el caso de una carga puntual  $q$  en el origen, podemos calcular el flujo de  $\vec{E}$  a través de una esfera de radio

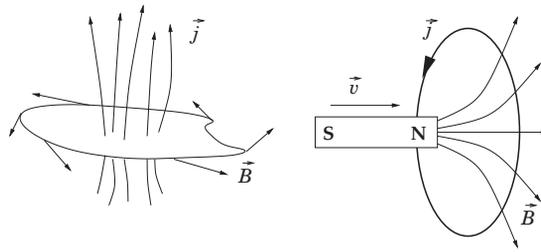


Figura 1.3: La ley de Ampère y la ley de Faraday: Una corriente eléctrica a través de una superficie genera un campo magnético a lo largo de la curva que bordea la superficie, mientras que la variación de flujo magnético a través de una superficie induce una corriente eléctrica a lo largo de la curva.

$r$  alrededor del origen. Aprovechándonos de la simetría esférica del problema es fácil de ver que (ejerc.)

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi r^2} \vec{e}_r, \tag{1.29}$$

con lo que hemos recuperado la ley de Coulomb.

La tercera ley de Maxwell (1.26) nos intenta dar el equivalente magnético de la ley de Gauss. Sin embargo aquí vemos que el lado derecho de la ecuación, que correspondería al término de la fuente del campo magnético, es cero. La ecuación (1.26) dice que el flujo magnético a través de cualquier superficie cerrada siempre es cero y por lo tanto que no existe un equivalente magnético de una carga eléctrica (véase Figura 1.2, derecha). Mientras que las cargas eléctricas positivas y negativas pueden existir separadas e independientes unas de otras, los polos norte y sur de un imán siempre aparecen en parejas. En otras palabras, no existen pozos y fuentes para el campo magnético y las líneas de campo o bien son cerradas, o se extienden hasta el infinito. Aunque en la física moderna existen soluciones de monopolos magnéticos con propiedades muy interesantes, no hay (de momento) ninguna indicación seria de que estas soluciones correspondan a objetos reales en la Naturaleza. Discutiremos el tema de monopolos magnéticos con más detalle en la sección 29.3.

La ley de Ampère, el primer término de la derecha de la ecuación (1.27), nos cuenta cuál es la fuente del campo magnético: la corriente eléctrica  $\vec{j}$ . La integral de  $\vec{B}$  a lo largo de una curva cerrada  $C$  es igual al flujo de corriente eléctrica a través de la superficie cuyo contorno es la curva  $C$  (Véase Figura 1.3, izquierda). En particular podemos distinguir dos casos de interés. El primero es el caso del conductor lineal infinito con una corriente constante  $I = \int \vec{j} \cdot \vec{n} d^2x$  (Figura 1.4, izquierda). A través de la ley de Ampère y la simetría cilíndrica del sistema no es muy difícil ver (ejerc.) que el campo magnético generado por esta corriente  $I$  tiene solo una componente en la dirección  $\varphi$ , el ángulo polar en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{B} = \frac{I}{2\pi c\rho} \vec{e}_\varphi. \tag{1.30}$$

El segundo caso interesante es el del solenoide infinito, donde una corriente  $I$  pasa por una hélice conductora (Figura 1.4, derecha). De manera similar al caso del conductor lineal se puede demostrar (ejerc.) que el campo magnético fuera del solenoide es cero, mientras que dentro hay un campo constante  $\vec{B} = I\vec{e}_z$  a lo largo del eje del solenoide. Los casos aquí comentados son ejemplos sencillos de la ley de Biot-Savart sobre el campo magnético generado por corrientes eléctricas. Vemos por lo tanto que la ley de Biot-Savart, y en general la de Ampère, relacionan claramente los fenómenos eléctricos con los fenómenos magnéticos.

La ley de Faraday o la ley de la inducción magnética (1.25) describe en cierto sentido la situación contraria a la ley de Ampère con el solenoide. Si una corriente circular causa un campo magnético,

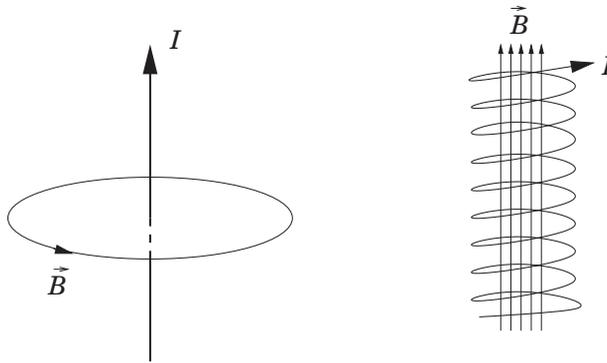


Figura 1.4: Ejemplos típicos de la ley de Ampère: un campo magnético rotacional alrededor de un conductor lineal infinito y un campo magnético constante en el interior de un solenoide.

¿también un imán metido en un anillo conductor causa una corriente eléctrica en el anillo? Esto claramente no puede ser verdad, puesto que violaría de manera brutal la conservación de la energía. Pero Faraday descubrió que sí se genera una corriente en el momento en que el imán se acerca o se aleja del anillo, es decir cuando el flujo magnético a través del anillo cambia. La ley de Faraday dice que un cambio en el flujo magnético a través de una superficie  $S$  induce un campo eléctrico rotacional alrededor de la curva que bordea  $S$  (Véase Figura 1.3, derecha). Este campo eléctrico rotacional genera una corriente  $\vec{j}$ , que a su vez causa a través de la ley de Ampère un campo magnético. El sentido de la corriente  $\vec{j}$  es tal que el campo magnético causado intenta compensar el cambio de flujo del campo original. Las corrientes eléctricas inducidas por cambio de flujos magnéticos a través de una superficie son el principio básico detrás de una dinamo y forman la base del motor eléctrico.

Las cuatro leyes de electricidad y magnetismo que acabamos de comentar arriba ya eran conocidas en los tiempos de Maxwell. En ese momento eran unas leyes empíricas que describían bien los experimentos realizados hasta entonces. Sin embargo Maxwell se dio cuenta de que en particular la ley de Ampère (las ecuaciones (1.21, derecha) y (1.27), sin el segundo término de la derecha) no podía ser válida siempre.

Si aplicamos la ley de Biot-Savart (1.30) al caso donde una corriente  $\vec{j}$  está cargando un condensador, la corriente genera claramente un campo magnético  $\vec{B}$  alrededor del conductor. Sin embargo, el flujo de corriente a través de una superficie es cero, si dejamos que la superficie pase entre las dos placas del condensador (Véase figura 1.5), por lo que la ley de Ampère no es generalmente válida. Maxwell se dio cuenta de que mientras corría la corriente eléctrica, iba aumentando la carga acumulada en el condensador y por lo tanto aumentando el flujo de campo eléctrico entre las dos placas y la superficie. De allí dedujo que era precisamente ese cambio de flujo eléctrico el que inducía el campo magnético  $\vec{B}$  alrededor del conductor, lo que resulta en el segundo término de (1.21, derecha) y (1.27), el *término de Maxwell*. Al conjunto de la ley de Ampère y el término de Maxwell, se le suele llamar la *ley de Ampère-Maxwell*.

Maxwell introdujo su término a base de razones puramente teóricas, ya que en este momento no había ninguna indicación experimental para creer en la existencia de una contribución de este tipo. Sin embargo el término resulta ser indispensable para la conservación de la carga eléctrica y da lugar a la existencia de las soluciones de ondas electromagnéticas, un hecho experimentalmente encontrado por Heinrich Hertz (1847-1894) alrededor de 1890.

Las leyes de Maxwell describen cómo las cargas y las corrientes eléctricas generan campos eléctricos y magnéticos, pero no hemos dicho todavía cómo una partícula cargada interacciona

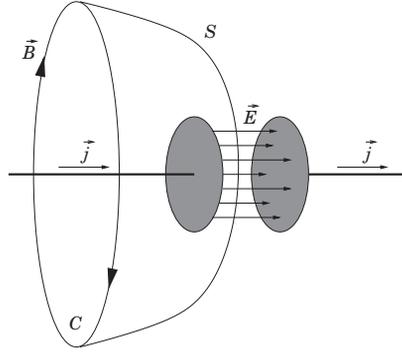


Figura 1.5: El término de Maxwell como corrección a la ley de Ampère: el campo magnético  $\vec{B}$  a lo largo de una curva  $C$  alrededor del conductor con una corriente  $\vec{j}$  no es igual al flujo de la corriente pasando por la superficie  $S$ , si  $S$  pasa entre las dos placas de un condensador. La carga que se acumula en el condensador crea un cambio en el campo eléctrico, que es el responsable del campo magnético  $\vec{B}$ .

con estos campos electromagnéticos. Para esto recurrimos a la fuerza de Lorentz. La fuerza ejercida por un campo  $\vec{E}$  y un campo  $\vec{B}$  sobre una partícula con carga  $q$  viene dada por

$$\vec{F} = q \left( \vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \right), \tag{1.31}$$

donde  $\vec{v}$  es la velocidad de la partícula. Vemos que esta fuerza consiste en dos partes: un término eléctrico que básicamente resume la ley de Coulomb entre dos cargas y un término que dice que la carga notará el campo magnético si se mueve con una velocidad  $\vec{v}$ . En particular en un campo magnético constante, una carga  $q$  con velocidad  $\vec{v}$  perpendicular a  $\vec{B}$  se moverá en círculos de radio  $r = mvc/qB$  (ejerc.). La fuerza de Lorentz es conservativa en el caso de cargas estáticas, pero no en general, ya que se deduce fácilmente de las leyes de Maxwell que  $\vec{\nabla} \times \vec{F} \neq 0$ . Sin embargo, el segundo término no realiza ningún trabajo sobre la partícula. Aunque cambia la dirección de  $\vec{v}$ , no cambia la norma y por lo tanto la energía cinética sigue igual. Efectivamente, el cambio de energía cinética  $E_{\text{cin}}$  de una partícula en un campo electromagnético solo es debido al campo eléctrico:

$$\frac{dE_{\text{cin}}}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F} = q\vec{v} \cdot \vec{E}. \tag{1.32}$$

### 1.3. Cantidades conservadas

Las mismas leyes de Maxwell indican por su propia estructura que existen ciertas cantidades conservadas. Tomando la divergencia de la ley de Ampère-Maxwell (1.21, derecha) tenemos que

$$0 = c\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \vec{\nabla} \cdot \partial_t \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \partial_t \rho, \tag{1.33}$$

donde en la última igualdad hemos utilizado la ley de Gauss (1.21, izquierda). La expresión (1.33) es una ecuación de continuidad y es la manera en que en una teoría de campos se expresa una ley de conservación, en particular aquí la ley de conservación de la carga eléctrica. Su interpretación es más fácil en la formulación integral,

$$\oint_{\partial V} \vec{j} \cdot \vec{n} d^2x = -\frac{d}{dt} \int_V \rho d^3x. \tag{1.34}$$

En esta forma se ve que si cambia la carga  $Q = \int_V \rho d^3x$  en un cierto volumen  $V$ , es porque hay un flujo de corriente no-trivial a través de la superficie  $\partial V$  que bordea ese volumen. La ecuación de continuidad implica una conservación de carga global: la carga global del universo evidentemente está conservada, porque (por definición) no existe un flujo de corriente a través de "la frontera de universo". Pero la ley de conservación en su forma (1.33) ó (1.34) es más fuerte que una tradicional ley de conservación global: su carácter local nos permite en cada elemento de volumen  $dV$  relacionar el cambio de carga con los movimientos de esas cargas a elementos de volumen adyacentes. Nótese que para poder derivar esta ley de conservación de la carga hemos utilizado explícitamente el término de Maxwell en (1.21, derecha).

Por (1.32) sabemos que el campo eléctrico puede cambiar la energía cinética de una partícula cargada. Si creemos en la ley de conservación de la energía, debemos por lo tanto aceptar que el campo electromagnético también tiene energía, que pierde o gana al aumentar o disminuir la energía de la partícula con la que interactúa. Esto tampoco resulta tan raro, puesto que si consideramos el campo electromagnético como una realidad física, no es de extrañar que posea propiedades físicas como energía o momento.

Podemos derivar la expresión para la energía del campo electromagnético de las propias leyes de Maxwell. Si tomamos el producto escalar de (1.21, derecha) con  $\vec{E}$  y de (1.22, derecha) con  $\vec{B}$  tenemos

$$\begin{aligned}\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) &= \frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{E} \cdot \partial_t \vec{E}, \\ \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= -\frac{1}{c} \vec{B} \cdot \partial_t \vec{B}.\end{aligned}\quad (1.35)$$

Restando estas dos expresiones y utilizando que para cualesquiera dos vectores  $\vec{V}$  y  $\vec{W}$  es cierto que (ejerc.)

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \times \vec{W}) = \vec{W} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{V} - \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{W}, \quad (1.36)$$

vemos que

$$c \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = -\frac{1}{2} \partial_t (E^2 + B^2) - \vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (1.37)$$

Esta expresión tiene la forma de una ley de conservación: si identificamos las cantidades

$$U_{\text{em}} = \frac{1}{2} (E^2 + B^2), \quad \vec{S} = c(\vec{E} \times \vec{B}), \quad (1.38)$$

con la densidad de energía del campo electromagnético y con el flujo de densidad de energía respectivamente, podemos escribir la versión integral de (1.37) como

$$\oint_{\partial V} \vec{S} \cdot \vec{n} d^2x + \frac{d}{dt} \int_V U_{\text{em}} d^3x = - \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} d^3x. \quad (1.39)$$

El lado izquierdo es efectivamente una ecuación de continuidad, relacionando el cambio de energía del campo electromagnético en un volumen  $V$  con la cantidad de energía que escapa a través de la frontera por unidad de tiempo. Sin embargo, los dos términos no suman cero, lo que sugiere que la energía del campo electromagnético no está conservada. En realidad esto es de esperar: hemos dicho que el campo eléctrico es capaz de cambiar la energía cinética de las cargas sometidas y el término de la derecha representa precisamente ese cambio de energía de las cargas (compara con (1.32), tomando en cuenta que  $\vec{j} = \rho \vec{v}$ ). La energía conservada, por lo tanto, no es solamente la de los campos electromagnéticos, sino del sistema entero de campos y cargas. El vector  $\vec{S} = c(\vec{E} \times \vec{B})$  se llama el *vector de Poynting*, llamado así por John H. Poynting (1852 - 1914), un estudiante de Maxwell, que derivó en 1884 esta ley de conservación de energía, también conocida como el *Teorema de Poynting*.

Para obtener una expresión para el momento lineal podemos hacer una derivación parecida. Lo más cómodo es hacer la derivación en componentes. Tomando en cuenta que en componentes el producto vectorial de dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  se escribe como

$$(\vec{A} \times \vec{B})_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} A_j B_k, \quad (1.40)$$

donde  $\epsilon_{ijk}$  es el símbolo de Levi-Civita

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{cuando } (ijk) \text{ es una permutación par de } (123), \\ -1 & \text{cuando } (ijk) \text{ es una permutación impar de } (123), \\ 0 & \text{en todos los demás casos,} \end{cases} \quad (1.41)$$

entonces vemos que la derivada parcial de la componente  $i$  del vector de Poynting con respecto al tiempo viene dado por

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \partial_t S_i &= \frac{1}{c} \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} [E_j \partial_t B_k + \partial_t E_j B_k] \\ &= \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \left[ -E_j \sum_{l,m=1}^3 \epsilon_{klm} \partial_l E_m + \left( \sum_{l,m=1}^3 \epsilon_{jlm} \partial_l B_m - \frac{1}{c} j_j \right) B_k \right] \\ &= \sum_{j,k=1}^3 \left[ -E_j \partial_i E_j + E_j \partial_j E_i + B_k \partial_k B_i - B_k \partial_i B_k - \frac{1}{c} \epsilon_{ijk} j_j B_k \right] \\ &= \sum_{j,k=1}^3 \left[ -\frac{1}{2} \partial_i (E^2 + B^2) + \partial_j (E_i E_j + B_i B_j) - E_i \partial_j E_j - B_i \partial_j B_j - \frac{1}{c} \epsilon_{ijk} j_j B_k \right] \\ &= \sum_{j=1}^3 \partial_j \left[ -\frac{1}{2} (E^2 + B^2) \delta_{ij} + E_i E_j + B_i B_j \right] - \rho E_i - \sum_{j,k=1}^3 \frac{1}{c} \epsilon_{ijk} j_j B_k, \quad (1.42) \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos utilizado las ecuaciones de Maxwell para  $\vec{\nabla} \times \vec{E}$  y  $\vec{\nabla} \times \vec{B}$  y en la última las ecuaciones para  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$  y  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$ , aparte de la identidad

$$\sum_{i=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{km} \delta_{jn}. \quad (1.43)$$

En los últimos dos términos de (1.42) reconocemos la expresión para la fuerza de Lorentz (1.31) actuando sobre un conjunto de partículas cargadas, descrito por una densidad de carga  $\rho$  y densidad de corriente  $\vec{j}$ . A través de la segunda ley de Newton podemos por lo tanto escribir esos últimos dos términos como la derivada de la densidad de momento de las partículas,  $d(\rho_m \vec{v})/dt$ , donde  $\rho_m$  es la densidad de masa de las partículas cargadas. Si ahora definimos el *tensor de momento electromagnético*

$$\mathcal{T}_{ij} = (E_i E_j + B_i B_j) - \frac{1}{2} (E^2 + B^2) \delta_{ij}, \quad (1.44)$$

podemos escribir la ecuación (1.42) como

$$\frac{1}{c^2} \partial_t S_i - \sum_{j=1}^3 \partial_j \mathcal{T}_{ij} = -\frac{d}{dt} (\rho_m v_i). \quad (1.45)$$

El lado izquierdo de esta igualdad es otra vez (la  $i$ -ésima componente de) una ecuación de continuidad: interpretando el vector de Poynting como el momento del campo electromagnético, la

ecuación (1.45) nos dice que la pérdida de momento del campo electromagnético  $\partial_t S_i$  está relacionada con el flujo del tensor de momento  $\partial_j T_{ij}$ . El momento total del campo electromagnético, sin embargo, no es conservado, por lo menos no en presencia de cargas. En cambio, la diferencia es igual al cambio en el momento de estas cargas. Igual que para la energía, lo que está conservado es el momento del sistema total de campos y partículas.

Nótese que el vector de Poynting aparece dos veces en estas derivaciones: una vez como el flujo de energía y otra vez como el momento conservado. En la Teoría de la Relatividad Especial veremos que la energía y el momento están relacionados como los componentes del cuadrivector de energía-momento. Veremos en el siguiente capítulo que la Teoría de Maxwell es explícitamente invariante bajo las transformaciones de Lorentz (aunque no sea visible en esta notación), por lo tanto, el hecho de que el vector de Poynting aparezca en estas dos formas es una primera indicación de la covariancia de la teoría.

## 1.4. Potenciales electromagnéticos e invariancia gauge

Las leyes de Maxwell en su forma diferencial (1.21)-(1.22) son más cómodas de resolver que en su forma integral (1.24)-(1.27), pero aún así no son fáciles por la aparición del operador diferencial  $\vec{\nabla}$  en forma de divergencias y rotacionales. Resulta que las dos leyes de Maxwell homogéneas (1.22), la ley de Faraday y la de la divergencia de  $\vec{B}$ , nos permiten escribir el conjunto en una forma más accesible, además de darnos pistas sobre uno de los aspectos más importantes de la física moderna.

El hecho de que la divergencia de  $\vec{B}$  siempre sea cero implica, por las propiedades de divergencias y rotacionales, que podemos escribir  $\vec{B}$  como el rotacional de algún campo  $\vec{A}$ :<sup>4</sup>

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (1.46)$$

Efectivamente, no solo es obvio que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$  para cualquier campo  $\vec{A}$ , además no es difícil demostrar que (1.46) es la solución más general de (1.22, izquierda).

Sustituyendo (1.46) en la ley de Faraday (1.22, derecha), la otra ecuación de Maxwell homogénea, podemos escribir esta como

$$\vec{\nabla} \times \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{A} \right) = 0, \quad (1.47)$$

intercambiando las derivadas parciales  $\partial_t$  y  $\partial_i$ . Por las mismas propiedades de rotacionales y gradientes, se ve que podemos resolver esta identidad en general, escribiendo  $\vec{E} + c^{-1} \partial_t \vec{A}$  como el gradiente de un campo  $-\phi$ , donde el signo menos se introduce por futura conveniencia. En otras palabras, podemos escribir el campo eléctrico como

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \partial_t \vec{A}. \quad (1.48)$$

También aquí debería estar claro que esta manera de escribir el campo eléctrico es la solución más general de (1.22, derecha).

Resumiendo, las dos ecuaciones homogéneas de Maxwell nos están contando la existencia de unos *potenciales electromagnéticos*,  $\phi$  y  $\vec{A}$ . El hecho de que (1.46) y (1.48) sean las soluciones más generales de las ecuaciones homogéneas implica que cuando escribimos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  en términos de estos potenciales, ya hemos resuelto dos de las cuatro leyes de Maxwell.

<sup>4</sup>Aquí suponemos que el espacio es simplemente conexo, que es el caso de  $\mathbb{R}^3$ . Estudiaremos soluciones en espacios que son topológicamente no triviales más adelante.

Sin embargo, (1.46) y (1.48) no nos dicen nada más sobre los potenciales  $\phi$  y  $\vec{A}$  que su mera existencia. Para saber cuál es su forma, su dinámica o la física descrita por ellos, es preciso recurrir a las ecuaciones inhomogéneas. Sustituyendo (1.46) y (1.48) en la ley de Gauss (1.21, izquierda) y la ley de Ampère-Maxwell (1.21, derecha) y utilizando de nuevo las propiedades de divergencias y rotacionales, no es difícil ver que se pueden escribir las ecuaciones inhomogéneas como

$$\begin{aligned} -\nabla^2\phi - \frac{1}{c}\partial_t(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) &= \rho, \\ \frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{A} - \nabla^2\vec{A} + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{c}\partial_t\phi + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) &= \frac{1}{c}\vec{j}, \end{aligned} \quad (1.49)$$

donde el operador diferencial  $\nabla^2 = \sum_{k=1}^3 \partial_k \partial_k$  es el *laplaciano* habitual en  $\mathbb{R}^3$ . Las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell son por lo tanto un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas y de segundo orden para los potenciales  $\phi$  y  $\vec{A}$ . Una vez resuelto este sistema de ecuaciones, podemos sacar las expresiones para  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  a través de (1.46) y (1.48).

Sin embargo, a primera vista las ecuaciones (1.49) no parecen mucho más simples que las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell de donde las hemos derivado, sobre todo debido a los últimos términos en el lado izquierdo. No parece muy claro, por lo tanto, la razón por la que hemos introducido los potenciales electromagnéticos en primer lugar. Sin embargo, en este punto es donde entra en juego una de las características que más define a la Teoría de Maxwell: la *invariancia gauge*.

Hemos visto que las ecuaciones homogéneas definen los campos electromagnéticos en términos de los potenciales: dados los potenciales  $\phi$  y  $\vec{A}$ , los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  están completamente determinados a través de las expresiones (1.46) y (1.48). Sin embargo, lo contrario no es verdad: dados  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ , ni  $\phi$ , ni  $\vec{A}$  están determinados unívocamente. Hay muchos potenciales vectoriales  $\vec{A}$  cuyo rotacional da el mismo  $\vec{B}$ , y hay muchos campos escalares cuyo gradiente es igual a  $\vec{E} + c^{-1}\partial_t\vec{A}$ . Concretamente, si cambiamos los potenciales  $\phi$  y  $\vec{A}$  por otros potenciales  $\phi'$  y  $\vec{A}'$ , relacionados con los originales como

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi + \partial_t\Lambda, \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} - c\vec{\nabla}\Lambda, \quad (1.50)$$

con  $\Lambda = \Lambda(\vec{x}, t)$  una función arbitraria, entonces los campos electromagnéticos  $\vec{E}'$  y  $\vec{B}'$  generados por estos potenciales  $\phi'$  y  $\vec{A}'$  son idénticos a los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  generados por  $\phi$  y  $\vec{A}$ . Efectivamente, esta claro que

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= -\vec{\nabla}\phi' - \frac{1}{c}\partial_t\vec{A}' = -\vec{\nabla}\left(\phi + \partial_t\Lambda\right) - \frac{1}{c}\partial_t\left(\vec{A} - c\vec{\nabla}\Lambda\right) = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\partial_t\vec{A} = \vec{E}, \\ \vec{B}' &= \vec{\nabla}\times\vec{A}' = \vec{\nabla}\times\left(\vec{A} - c\vec{\nabla}\Lambda\right) = \vec{\nabla}\times\vec{A} - c\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\Lambda = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B}. \end{aligned} \quad (1.51)$$

En otras palabras, dados unos campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ , es imposible saber si vienen de los potenciales  $\phi$  y  $\vec{A}$  o de  $\phi'$  y  $\vec{A}'$ . Es más, dado que  $\Lambda(\vec{x}, t)$  es una función arbitraria, hay infinitos potenciales que dan todos los mismos campos electromagnéticos.

¿Cómo sabemos ahora con cuál de los  $\phi$  y  $\vec{A}$  tenemos que trabajar? ¿Cuál de estos infinitos potenciales describe correctamente la física de nuestro sistema? En realidad, la respuesta ya viene dada en (1.51): todos los potenciales  $\phi$  y  $\vec{A}$  relacionados a través de (1.50) describen la misma física, ya que todos generan los mismos campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ . En un experimento se puede medir la intensidad y la dirección del campo electromagnético (es decir de  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ ), pero no existe ningún experimento que sea capaz de medir directamente  $\phi$  y  $\vec{A}$  y por lo tanto capaz de distinguir entre unos potenciales u otros relacionados a través de (1.50). En realidad, los potenciales  $\phi$  y  $\vec{A}$  son solamente unos campos auxiliares, que hemos introducido por mayor facilidad matemática, pero

que no corresponden a ninguna realidad física.<sup>5</sup> La realidad física está descrita únicamente por los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ , ya que son estos los que medimos en los experimentos.

Un ejemplo concreto ilustrará esta idea profunda: ya hemos dicho que en electrostática el campo eléctrico de una carga puntual viene dado por la ley de Coulomb (1.29),

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi r^2} \vec{e}_r, \quad \vec{B} = 0. \quad (1.52)$$

Muchas veces se presentan los potenciales electromagnéticos de este campo eléctrico en el llamado *gauge de Coulomb*, que impone sobre el potencial vectorial  $\vec{A}$  la condición  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ . En este caso el campo eléctrico está completamente determinado por el potencial escalar  $\phi$ , ya que  $\vec{A}$  se anula en todo el espacio:

$$\phi = \frac{q}{4\pi r}, \quad \vec{A} = 0. \quad (1.53)$$

Sin embargo, podemos elegir otros potenciales que nos generen el mismo campo electrostático (1.52). En particular podemos elegir el llamado *gauge temporal*, donde el potencial escalar es cero en todo el espacio y el campo eléctrico está soportado exclusivamente por el potencial vectorial. Efectivamente los potenciales

$$\phi' = 0, \quad \vec{A}' = -\frac{cqt}{4\pi r^2} \vec{e}_r, \quad (1.54)$$

generan a través de (1.48) exactamente la misma expresión (1.52) para el campo de una carga puntual estática. A primera vista podría parecer extraño que una configuración estática como (1.52) esté descrita por un potencial que dependa explícitamente del tiempo, pero esto solo es un prejuicio inspirado por el gauge de Coulomb, puesto que los potenciales mismos no tienen significado físico y pueden tener una dependencia temporal (lineal) sin que lo tenga  $\vec{E}$ . La dependencia temporal de  $\vec{A}$  en (1.54) solamente es un artefacto de la elección de los potenciales, no un efecto físico. Obsérvese que efectivamente los potenciales (1.53) y (1.54) están relacionados a través de una transformación del tipo (1.50) con  $\Lambda = -qt/4\pi r$ .

Vemos por lo tanto que la teoría de Maxwell tiene una inesperada simetría: dado que los potenciales no corresponden a ninguna realidad física, la elección de  $\phi$  y  $\vec{A}$  no puede afectar la física del sistema y por lo tanto un cambio en la elección de potencial de la forma (1.50) deja el sistema invariante. Esta nueva simetría impone restricciones muy fuertes sobre la forma de las expresiones: las cantidades físicamente relevantes, como la intensidad del campo electromagnético, su energía o su momento, solo pueden depender de las combinaciones de los potenciales  $\phi$  y  $\vec{A}$  que son invariantes gauge. En otras palabras, los potenciales solo pueden aparecer en las cantidades físicas en las combinaciones  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - c^{-1}\partial_t\vec{A}$  y  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ . Es fácil de comprobar que las expresiones que hemos derivado en la sección anterior efectivamente satisfacen este criterio. Las teorías de este tipo se llaman *teorías gauge*, la transformación (1.50) se llama una *transformación gauge* y los potenciales  $\phi$  y  $\vec{A}$  *campos gauge*.<sup>6</sup>

Es difícil sobreestimar la importancia de la invariancia gauge en la física moderna: la transformación (1.50) en la teoría de Maxwell solo es el caso más sencillo de invariancia gauge: en 1954 los físicos chino-americanos Chen Ning Yang (1922 - ) y Robert Mills (1927 - 1999) generalizaron la transformación (1.50) a grupos no-Abelianos y hoy en día entendemos la interacción electrodébil y la interacción fuerte (e incluso hasta cierto punto la gravedad) como teorías gauge, aunque de un tipo más complicado que en la teoría de Maxwell.

<sup>5</sup>En cierto sentido, los potenciales electromagnéticos  $\phi$  y  $\vec{A}$  son una generalización de la energía potencial  $V(x)$  en la mecánica newtoniana, que solo está determinada módulo una constante. El hecho de que tengamos la libertad de añadir una constante arbitraria a  $V(x)$ , implica que el potencial en sí no tiene significado físico. Solo las diferencias de potencial entre dos puntos  $\Delta V = V(x_2) - V(x_1)$  lo tienen.

<sup>6</sup>To *gauge* (pronunciado /gerdʒ/ ("gueich")) en inglés significa "calibrar". La razón por la que se relaciona las transformaciones (1.50) con las calibraciones es un error histórico (pero fructífero) del matemático alemán Hermann Weyl (1885 - 1955) en 1918, cuando intentó, sin éxito, unificar la Relatividad General y el electromagnetismo usando invariancia bajo transformaciones de escala. Discutiremos brevemente la idea de Weyl en el Capítulo 24.

Volviendo a las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell (1.49), podemos usar la invariancia gauge para simplificar la forma de estas ecuaciones, ya que la invariancia gauge nos proporciona la libertad de poder cambiar los potenciales  $\phi$  y  $\vec{A}$  a través de una transformación gauge (1.50). Concretamente, siempre podremos elegir los potenciales de forma que satisfagan la condición

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \partial_t \phi = 0, \quad (1.55)$$

de modo que las ecuaciones (1.49) se reducen a unas ecuaciones de ondas inhomogénea tridimensional para los potenciales  $\phi$  y  $\vec{A}$ ,

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \phi - \nabla^2 \phi = \rho, \quad \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \frac{1}{c} \vec{j}. \quad (1.56)$$

Una ecuación de onda es una de las ecuaciones diferenciales parciales más conocidas y más recurrente en la física y sus soluciones se pueden sacar fácilmente con la teoría de las funciones de Green. La forma (1.56) de las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell es por lo tanto mucho más manejable que (1.49), o incluso (1.21)-(1.22).

Aquí hemos visto otro ejemplo más de cómo la ambigüedad de los potenciales electromagnéticos, más que ser un problema, se convierte en una gran ventaja: una buena elección de  $\phi$  y  $\vec{A}$  puede simplificar mucho un problema dado. Concretamente la condición (1.55) se llama el *gauge de Lorenz*. Elegir unos potenciales u otros para un problema concreto se llama *fixar el gauge* y muchas elecciones de gauge son típicas para ciertas situaciones físicas. Por ejemplo, el gauge de Coulomb,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ , es habitual para problemas de electrostática, pero veremos en breve que el gauge de Lorenz es más útil en Relatividad Especial. Otras elecciones de gauge comunes son el *gauge temporal*  $\phi = 0$  y el *gauge axial*  $\vec{A} \cdot \vec{n} = 0$ , donde  $\vec{n}$  es un vector unitario en una dirección específica.

En resumen, podemos escribir las ecuaciones de Maxwell como

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \phi - \nabla^2 \phi = \rho, \quad \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \frac{1}{c} \vec{j}, \quad (1.57)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \partial_t \vec{A}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (1.58)$$

siempre y cuando asumamos que  $\phi$  y  $\vec{A}$  estén relacionados a través de (1.55). Las ecuaciones (1.57) describen la dinámica de los potenciales y su interacción con las cargas y las corrientes, mientras que (1.58) nos da la relación entre los potenciales y los campos físicos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ .

## 1.5. La Teoría de Maxwell a través del principio variacional

De la mecánica analítica conocemos las ventajas del formalismo lagrangiano para estudiar las leyes de la física: un lagrangiano es básicamente la integral de las ecuaciones de movimiento y permite estudiar con más facilidad las propiedades y simetrías de la teoría. En particular, el principio variacional aplicado a la teoría de Maxwell nos enseña unas cuantas lecciones que no son obvias mirando solo las leyes de Maxwell (1.21)-(1.22).

La acción de la teoría de Maxwell viene dada por

$$S_{\text{Maxwell}} = \int dt d^3x \left[ \frac{1}{2} E^2 - \frac{1}{2} B^2 - \rho \phi + \frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{A} \right]. \quad (1.59)$$

A primera vista esto puede parecer una acción extraña, ya que no es cuadrática en las primeras derivadas de  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ , como uno esperaría de la mecánica analítica. Es más, variando ingenuamente

esta acción con respecto a los campos electromagnéticos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ , las ecuaciones de movimiento darían lugar a la condición claramente errónea  $\vec{E} = \vec{B} = 0$ .

La razón por la que la acción (1.59) sí es la acción correcta es la primera lección importante del formalismo lagrangiano de la Teoría de Maxwell: en realidad las variables dinámicas de la teoría de Maxwell no son los campos electromagnéticos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ , sino los potenciales  $\phi$  y  $\vec{A}$ . A través de (1.46) y (1.48) podemos reescribir la acción (1.59) como (ejerc.)

$$S_{\text{Maxwell}} = \int dt d^3x \left[ \frac{1}{2} \sum_i \partial_i \phi \partial_i \phi + \frac{1}{c} \sum_i \partial_i \phi \partial_t A_i + \frac{1}{2c^2} \sum_i \partial_t A_i \partial_t A_i - \frac{1}{2} \sum_{ij} \partial_i A_j \partial_i A_j + \frac{1}{2} \sum_{ij} \partial_i A_j \partial_j A_i - \rho \phi + \frac{1}{c} \sum_i j_i A_i \right], \quad (1.60)$$

que sí es cuadrática en las primeras derivadas de los potenciales. Aún así, el lagrangiano (1.60) escrito en términos de los potenciales sigue teniendo unas propiedades que no estamos acostumbrados a ver en sistemas de variables discretas. Primero, que aparte del término cinético  $(\partial_t A_i)^2$  para  $\vec{A}$ , tenemos todo tipo de términos proporcionales al gradiente,  $\partial_i A_j$ . Además, el potencial escalar  $\phi$  solo tiene términos proporcionales a su gradiente  $\partial_i \phi$ , pero no tiene un término cinético  $(\partial_t \phi)^2$ , lo que hace que en realidad  $\phi$  no sea un campo dinámico.

En realidad la razón por la que aparece un tipo de términos y no el otro es la misma: la invariancia gauge. La acción debe ser invariante bajo las transformaciones (1.50), ya que la elección de los potenciales no puede influenciar la física. Al escribir un término cinético  $(\partial_t A_i)^2$ , la invariancia gauge nos obliga a incluir también los términos proporcionales a  $\partial_i \phi$  y  $\partial_i A_j$ . Sin embargo la misma invariancia gauge prohíbe un término del tipo  $(\partial_t \phi)^2$ , ya que una variación daría lugar a un término,  $\partial_t^2 \Lambda \partial_t \phi$ , que es imposible cancelar con la variación de otro término. Dicho de otra manera, solo los términos que aparecen en (1.60) combinan a la acción manifiestamente invariante gauge  $E^2 - B^2$  de (1.59).<sup>7</sup>

La idea es que las ecuaciones de movimiento de la acción (1.60) nos proporcionan las ecuaciones de Maxwell. Efectivamente, las ecuaciones de Euler-Lagrange para  $\phi$  y  $\vec{A}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_t \phi)} \right) + \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_i \phi)} \right) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_t A_j)} \right) + \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_i A_j)} \right) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_j} &= 0, \end{aligned} \quad (1.61)$$

nos proporcionan precisamente las ecuaciones (1.49) (ejerc.), que sabemos que son las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell en términos de los potenciales. En otras palabras, la ley de Gauss y la ley de Ampère-Maxwell (1.21) son las ecuaciones de movimiento respectivamente de  $\phi$  y  $\vec{A}$  en la acción (1.60). Nótese que estrictamente hablando la ecuación para  $\phi$  no es una ecuación de evolución, puesto que no contiene segundas derivadas en  $t$ . Eso es debido al hecho de que la invariancia gauge impide que  $\phi$  sea un campo dinámico (es decir, que tenga un término cinético). Por lo tanto su variación, más que una ecuación de movimiento, impone una ligadura sobre  $\phi$  y  $\vec{A}$ .

Por otro lado, no se obtienen las ecuaciones homogéneas (1.22) de esta acción a través de un principio variacional. La segunda lección que nos enseña el principio variacional en la Teoría de Maxwell es que en realidad el carácter de las ecuaciones homogéneas es completamente distinto

<sup>7</sup>Estrictamente hablando, el producto escalar  $\vec{E} \cdot \vec{B}$  también es una cantidad obviamente invariante gauge. Sin embargo, se puede demostrar que  $\vec{E} \cdot \vec{B}$  es una derivada total y por lo tanto no contribuye a las ecuaciones de movimiento. Además, veremos en el Capítulo 4 que  $\vec{E} \cdot \vec{B}$  en realidad no es un escalar, sino un pseudo-escalar, que bajo reflexiones adquiere un signo adicional y no sirve para construir una acción invariante bajo rotaciones.

a las ecuaciones inhomogéneas. Como hemos explicado en la sección 1.4, las ecuaciones homogéneas nos informan sobre la existencia de los potenciales  $\phi$  y  $\vec{A}$ : recuérdese que (1.46) y (1.48) son las soluciones generales de estas. En otras palabras, más que unas ecuaciones dinámicas, las ecuaciones homogéneas actúan como ligaduras para  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ , permitiéndonos escribir estos campos en términos de los potenciales  $\phi$  y  $\vec{A}$ . Por lo tanto, al considerar equivalentes las acciones (1.59) y (1.60) y al reconocer  $\phi$  y  $\vec{A}$  como las verdaderas variables dinámicas de la teoría, ya hemos asumido implícitamente las ecuaciones homogéneas de Maxwell en el principio variacional. Lo curioso es que esta diferencia entre las ecuaciones homogéneas e inhomogéneas apenas es apreciable a nivel de las ecuaciones mismas, mientras que está clarísima desde el punto de vista del formalismo lagrangiano.

También es interesante mirar la acción de una partícula con masa  $m_0$  y carga eléctrica  $q$ , interaccionando con el campo electromagnético. En particular esta acción viene dada por

$$S_{\text{partícula}} = \int dt \left[ \frac{1}{2} m_0 \sum_i \dot{x}^i(t) \dot{x}^i(t) - q\phi(x(t)) + \frac{q}{c} \sum_i \dot{x}^i(t) A^i(x(t)) \right], \quad (1.62)$$

y es fácil ver (ejerc.) que la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{x}^i} \right) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x^i} = 0 \quad (1.63)$$

da lugar a la ecuación de movimiento

$$m_0 \ddot{x}^i + q \left[ \partial_i \phi + \frac{1}{c} \partial_t A_i \right] - \frac{q}{c} \sum_j \dot{x}^j \left[ \partial_i A_j - \partial_j A_i \right] = 0. \quad (1.64)$$

Dándonos cuenta de que las expresiones entre corchetes son precisamente las combinaciones (1.48) y (1.46) (no debería sorprendernos, ¡si no la ecuación no sería invariante gauge!), podemos interpretar esta ecuación como la segunda ley de Newton para una partícula sometida a la fuerza de Lorentz (1.31),

$$m_0 \ddot{\vec{x}} = q \left[ \vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \right]. \quad (1.65)$$

Nótese que debido al acoplo de  $\dot{\vec{x}}$  y  $\vec{A}$  en la acción (1.62), el momento canónico conjugado de  $x^i$  no es  $p^i = m_0 \dot{x}^i$ , sino

$$p^i = m_0 \dot{x}^i + \frac{q}{c} A^i, \quad (1.66)$$

y por lo tanto el hamiltoniano viene dado por

$$H_{\text{partícula}} = \int dt \left[ \frac{1}{2m_0} \left( \vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}(x) \right)^2 + q\phi(x) \right]. \quad (1.67)$$

Este hamiltoniano, con *acoplo mínimo* al campo electromagnético, se utiliza mucho en la mecánica cuántica.

Finalmente, aunque hemos discutido la invariancia gauge de los términos cinéticos de (1.60), no hemos dicho nada sobre la invariancia de los términos de acoplo, ni en (1.60), ni en (1.62). Puede parecer extraño que los últimos dos términos de (1.62) contengan a  $\phi$  y  $\vec{A}$  tal cual, ya que parecen romper la invariancia gauge. Sin embargo, una transformación gauge (1.50) induce la siguiente transformación en la acción,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{partícula}} \rightarrow \mathcal{L}'_{\text{partícula}} &= \mathcal{L}_{\text{partícula}} - q \left[ \partial_t \Lambda + \frac{1}{c} \sum_i \dot{x}^i c \partial_i \Lambda \right] \\ &= \mathcal{L}_{\text{partícula}} - q \frac{d}{dt} \Lambda(t, x) \\ &\sim \mathcal{L}_{\text{partícula}}, \end{aligned} \quad (1.68)$$

donde en la segunda igualdad hemos usado la regla de la cadena para escribir los dos últimos términos como una derivada total, y en la tercera el hecho de que dos lagrangianos que difieren por una derivada total son físicamente equivalentes. Por lo tanto, a pesar de que los potenciales aparezcan desnudos, una transformación gauge no tiene efecto físico en (1.62), ya que solo da lugar a una derivada total.

Una cosa parecida, aunque no igual, ocurre con los términos de acoplo de (1.59): una transformación gauge (1.50) cambiaría la acción como

$$\begin{aligned}
 S_{\text{Maxwell}} \rightarrow S'_{\text{Maxwell}} &= S_{\text{Maxwell}} - \int dt d^3x \left[ \rho \partial_t \Lambda + \sum_i j_i \partial_i \Lambda \right] \\
 &= S_{\text{Maxwell}} + \int dt d^3x \left[ \partial_t \rho + \sum_i \partial_i j_i \right] \Lambda \\
 &= S_{\text{Maxwell}},
 \end{aligned} \tag{1.69}$$

donde en la segunda igualdad hemos integrado por partes y en la tercera hemos quitado la segunda integral, gracias a la ley de continuidad (1.33). En otras palabras, la acción (1.59) es invariante gauge gracias a la conservación de carga. Pero también podemos dar la vuelta al argumento: por el teorema de Noether sabemos que a cada simetría continua le corresponde una cantidad conservada (y viceversa). La tercera lección del principio variacional por lo tanto es que la cantidad conservada asociada a la simetría de la acción (1.59) bajo transformaciones gauge (1.50) es precisamente la carga eléctrica.

## 1.6. Soluciones de las ecuaciones de Maxwell

Una gran ventaja de la estructura de las ecuaciones de Maxwell es que estas son lineales, así que cualquier combinación lineal de dos soluciones también es una solución.

En la sección 1.2 ya hemos mencionado algunas soluciones, como la de la carga puntual, el conductor lineal y el solenoide infinito. En esta sección repasaremos algunas soluciones más, que son interesantes por su relevancia física.

### Ondas electromagnéticas

Una de las propiedades sorprendentes de las ecuaciones de Maxwell es que existen soluciones no triviales en ausencia de cargas y corrientes. Las llamadas *ecuaciones del vacío* son

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\
 \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \partial_t \vec{B}, & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{1}{c} \partial_t \vec{E}.
 \end{aligned} \tag{1.70}$$

Una primera observación es la remarcable simetría entre campos eléctricos y magnéticos en la ausencia de cargas: las ecuaciones de Maxwell del vacío son invariantes bajo la transformación  $(\vec{E}, \vec{B}) \rightarrow (\vec{B}, -\vec{E})$ . Sin embargo, en presencia de cargas esta simetría está rota, debido al hecho de que existen cargas eléctricas, pero no hay monopolos magnéticos.

Una segunda observación es que la estructura de las ecuaciones del vacío (1.70) permite la existencia de paquetes de campo viajando por el espacio: un cambio en  $\vec{B}$  por la ley de Faraday induce un campo eléctrico, previamente inexistente, y a su vez un cambio en  $\vec{E}$  induce por el término de Maxwell un campo magnético. Vemos por lo tanto que los cambios en el campo electromagnético se autosostienen, resultando en paquetes de campo propagándose por el espacio independientemente de cargas y corrientes. Estos paquetes de campo se llaman *ondas electromagnéticas*.

En lugar de buscar la solución más general de las ecuaciones del vacío, es instructivo mirar un caso más sencillo, puesto que todos los elementos clave de la dinámica ya aparecen aquí. Suponiendo que  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  dependen solamente de una coordenada (digamos  $x$ ) y del tiempo, las ecuaciones (1.70) se reducen a

$$\partial_x E_x = \partial_x B_x = \partial_t E_x = \partial_t B_x = 0, \quad (1.71)$$

$$\partial_x E_z = \frac{1}{c} \partial_t B_y, \quad \partial_x B_y = \frac{1}{c} \partial_t E_z, \quad (1.72)$$

$$\partial_x E_y = -\frac{1}{c} \partial_t B_z, \quad \partial_x B_z = -\frac{1}{c} \partial_t E_y. \quad (1.73)$$

Nótese que, bajo nuestra suposición, las ecuaciones (1.70) se han separado en tres sistemas de ecuaciones diferenciales desacoplados: las ecuaciones (1.71) para las componentes  $E_x$  y  $B_x$ , el sistema (1.72) para las componentes  $E_z$  y  $B_y$  y el sistema (1.73) para las componentes  $E_y$  y  $B_z$ .

El primer sistema es trivial: la solución general de (1.71) es  $E_x = C_1$  y  $B_x = C_2$ , donde  $C_{1,2}$  son constantes de integración. Podemos interpretar entonces  $E_x$  y  $B_x$  como unos campos de fondo, ajenos a la verdadera dinámica que queremos describir, por lo que tomaremos  $E_x = B_x = 0$ .

Las componentes dinámicas de los campos electromagnéticos son por lo tanto en las ortogonales al eje  $x$ . Dado que los sistemas (1.72) y (1.73) son muy parecidos, resolveremos el primero y comentaremos la solución general de la segunda por analogía.

En lugar de resolver (1.72) directamente, es más fácil derivar las ecuaciones con respecto a  $x$  y a  $t$  y sustituirlas la una en la otra. De esta manera, las ecuaciones (1.72) se transforman en unas ecuaciones de onda unidimensionales para las componentes  $E_z$  y  $B_y$ ,

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 E_z - \partial_x^2 E_z = 0, \quad \frac{1}{c^2} \partial_t^2 B_y - \partial_x^2 B_y = 0, \quad (1.74)$$

cuya solución más general es bien conocida:  $E_z$  y  $B_y$  son funciones arbitrarias del tipo  $f(x \pm ct)$ , representando una onda con perfil  $f(x)$  que se propaga a lo largo del eje  $x$  a la velocidad de la luz.

Sin embargo, las ecuaciones (1.74) son más generales que las ecuaciones originales (1.72): el sistema (1.74) consiste de dos ecuaciones independientes, pero (1.72) nos dice que en realidad tenemos que  $E'_z = \pm B'_y$ , donde la prima se refiere a la derivación con respecto a la variable  $x \pm ct$ . La solución general de (1.72) viene por lo tanto dada por

$$E_z = f_1(x + ct) + f_2(x - ct) + \tilde{C}_1, \quad B_y = f_1(x + ct) - f_2(x - ct) + \tilde{C}_2, \quad (1.75)$$

y un análisis análogo para (1.73) enseña que las componentes  $E_y$  y  $B_z$  son de la forma

$$E_y = g_1(x + ct) + g_2(x - ct) + \tilde{C}_1, \quad B_z = -g_1(x + ct) + g_2(x - ct) + \tilde{C}_2, \quad (1.76)$$

donde  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $g_1$  y  $g_2$  son funciones arbitrarias de su argumento. Las constantes de integración  $\tilde{C}_{1,2}$  y  $\tilde{C}_{1,2}$  se interpretan otra vez como campos de fondo, que no tienen que ver con la dinámica del sistema (1.71)-(1.73). La física interesante está en las propiedades de las funciones  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $g_1$  y  $g_2$  que describen las ondas electromagnéticas.

El hecho de que se interprete (1.75) y (1.76) como ondas electromagnéticas es debido a que representan paquetes de campo electromagnético que se propagan a la velocidad de la luz a lo largo del eje  $x$ :  $f_1(x + ct)$  y  $g_1(x + ct)$  en la dirección de  $x$  negativo y  $f_2(x - ct)$  y  $g_2(x - ct)$  en la dirección de  $x$  positivo. Las soluciones (1.75) y (1.76) que surgen del caso especial (1.71)-(1.73) se llaman *ondas planas*, ya que, al depender solamente de la coordenadas  $x$ , el campo electromagnético es constante en los planos  $yz$ . Por esa razón, puede parecer una solución poco física por su extensión infinita, pero en realidad una onda plana es una muy buena aproximación de una onda esférica en una región pequeña, lejos de su punto de origen. Las dos soluciones independientes y mutuamente perpendiculares (1.75) y (1.76) representan las dos polarizaciones (lineales) de una onda electromagnética.

Las dos soluciones (1.75) y (1.76) muestran claramente dos propiedades importantes de las distintas polarizaciones. La primera propiedad es que cada polarización consisten en campos eléctricos y magnéticos que son ortogonales y tienen la misma amplitud:

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = 0, \quad E^2 - B^2 = 0. \quad (1.77)$$

La segunda propiedad importante es que son ondas transversales, puesto que la amplitud de la onda es perpendicular a la dirección de propagación. Una clase importante de ondas planas es las llamadas *ondas monocromáticas*, donde las funciones  $f$  y  $g$  son senos y cosenos,

$$E_i = A_i \cos(kx \pm \omega t + \varphi_i), \quad B_i = A_i \cos(kx \pm \omega t + \varphi_i). \quad (1.78)$$

Aquí,  $A_i$  es la amplitud,  $k$  el número de onda,  $\omega$  la frecuencia angular y  $\varphi_i$  la fase. Para que las ondas monocromáticas sean de la forma (1.75) y (1.76), el número de onda y la frecuencia tienen que satisfacer la *relación de dispersión* en el vacío

$$\omega = ck. \quad (1.79)$$

Desde el punto de vista físico, las ondas monocromáticas no corresponden a una realidad física, puesto que se extienden por el espacio entero y tendrían una energía infinita. Sin embargo desde el punto de vista matemático es un concepto muy útil, ya que son fáciles de manejar. Además sabemos por el análisis de Fourier que cualquier solución (1.75) y (1.76) se puede escribir como una superposición de ondas monocromáticas de distintas frecuencias.

La longitud de onda  $\lambda$  viene dada por el número de onda y la frecuencia  $\nu$  está relacionada con la frecuencia angular  $\omega$  mediante

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (1.80)$$

Nótese que la conocida fórmula para la velocidad de propagación de ondas nos da efectivamente la velocidad de la luz:

$$v = \lambda\nu = \frac{\omega}{k} = c. \quad (1.81)$$

Al darse cuenta de que existen soluciones de paquetes de campo electromagnético que se propagan con la velocidad de la luz, Maxwell identificó la luz como ondas electromagnéticas. La conexión entre el electromagnetismo y la óptica fue uno de los grandes éxitos de la teoría de Maxwell. No solo era la primera vez que alguien venía con una teoría fundamental para explicar la naturaleza de la luz, sino que esa teoría también daba una base sólida a la óptica y permitía derivar las leyes empíricas de la óptica y calcular índices de reflexión y refracción de materiales. Pero además, la teoría de Maxwell es capaz de dar una explicación de cómo surgen estas ondas electromagnéticas, como veremos en el siguiente apartado.

### Potenciales retardados

Resolvemos ahora las ecuaciones de Maxwell en toda generalidad. Ya hemos visto que, eligiendo el gauge de Lorenz (1.55), se pueden escribir las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas en función de los potenciales electromagnéticos como

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \phi - \nabla^2 \phi = \rho, \quad \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \frac{1}{c} \vec{j}. \quad (1.82)$$

Por la teoría de ecuaciones diferenciales sabemos que la solución general de una ecuación lineal inhomogénea consiste en la suma de las soluciones de la ecuación homogénea y una solución particular. En el caso de las ecuaciones de Maxwell, las soluciones de las ecuaciones homogéneas son las ondas electromagnéticas que hemos visto en la subsección anterior. En este apartado, buscaremos una expresión para la solución particular, que involucra las cargas y corrientes.

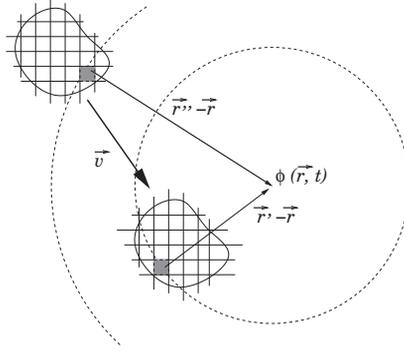


Figura 1.6: Los potenciales retardados: los potenciales electromagnéticos en el punto  $\vec{x}$  en el momento  $t$  vienen dados por la suma de todas las contribuciones de cargas y corrientes en los puntos  $\vec{y}$  en el momento  $t - |\vec{x} - \vec{y}|/c$ .

La gran ventaja de elegir el gauge de Lorenz es que la ecuación de onda inhomogénea (1.82) es fácil de resolver. La teoría de funciones de Green dice que, dada una distribución de cargas  $\rho(\vec{x}, t)$  y de corrientes  $\vec{j}(\vec{x}, t)$ , la expresión general para los potenciales electromagnéticos  $\phi(\vec{x}, t)$  y  $\vec{A}(\vec{x}, t)$  en un punto  $\vec{x}$  y un instante  $t$  viene dada por los llamados *potenciales retardados*,

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho(\vec{y}, t')}{|\vec{x} - \vec{y}|} d\vec{y}, \quad \vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi c} \int \frac{\vec{j}(\vec{y}, t')}{|\vec{x} - \vec{y}|} d\vec{y}, \quad (1.83)$$

donde  $t'$  es el tiempo retardado,

$$t' = t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c}. \quad (1.84)$$

La interpretación de esta solución particular es bastante parecida al caso de la electrostática o las corrientes constantes, solo con una diferencia importante. Igual que en electrostática, para calcular el valor de los potenciales en un punto  $\vec{x}$  en el momento  $t$ , tenemos que sumar (integrar) todas las contribuciones de cargas y corrientes en todos los elementos de volumen  $d^3x$  del espacio. La diferencia con el caso estático es que para obtener la contribución de un elemento de volumen en posición  $\vec{y}$  no hay que tomar la densidad de  $\rho$  y  $\vec{j}$  en el mismo momento  $t$ , sino en el momento anterior  $t' = t - |\vec{x} - \vec{y}|/c$ . Obsérvese que  $|\vec{x} - \vec{y}|/c$  es exactamente el tiempo que necesita una onda electromagnética (y por lo tanto también la información de la situación física) para viajar de  $\vec{y}$  a  $\vec{x}$  a la velocidad de la luz (véase Figura 1.6).

En otras palabras, al campo electromagnético en un punto  $\vec{x}$  en un momento  $t$  contribuyen todas las señales que llegan en ese momento  $t$  del espacio entero a ese punto. Eso es porque la interacción electromagnética no es instantánea, sino que se propaga a velocidad finita: la velocidad de la luz. Un cambio en la configuración de cargas cerca de la Estrella Polar no afecta al campo electromagnético en la Tierra de inmediato, sino que la Tierra tardaría 431 años en recibir la información de la situación cambiada, ya que ese es el tiempo necesario para viajar a la velocidad de la luz los 431 años-luz que separan la Tierra y la Estrella Polar.

En este aspecto, la teoría de Maxwell difiere mucho de la acción a distancia instantánea de la gravedad newtoniana. A pesar de las críticas iniciales,<sup>8</sup> el viejo modelo newtoniano de interacciones a distancia ganó rápidamente aceptación al quedar evidente el éxito fenomenológico de

<sup>8</sup>A los contemporáneos de Newton, una fuerza universal atractiva sonaba demasiado esotérica, invocando otra vez las fuerzas de simpatía y antipatía entre cuerpos de los alquimistas y filósofos medievales. Newton mismo nunca pretendió dar una explicación física para la interacción gravitatoria, solo quiso dar la expresión correcta de la fuerza. De ahí su respuesta: "Hypotheses non fingo" (No invento hipótesis).

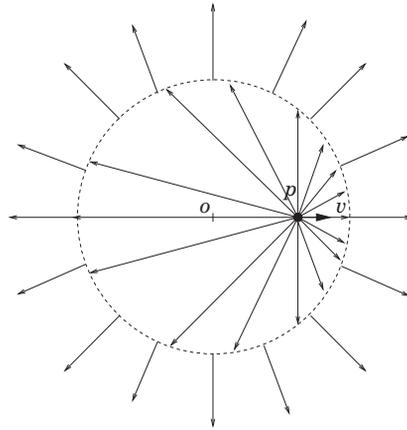


Figura 1.7: Ondas electromagnéticas debidas a cargas aceleradas: una carga originalmente en reposo en el punto  $O$  acelera y se mueve al punto  $P$ . Lejos de la carga, las líneas de campo todavía están como si la carga estuviera en  $O$ , mientras cerca de la carga las líneas ya se han adaptado. Entremedias hay una discontinuidad que se expande con la velocidad de la luz.

la teoría. Ahora vemos que en la teoría de Maxwell, al ser esta una teoría de campos dinámicos, surge de manera natural un modelo distinto para las interacciones: en una teoría de campos, las partículas no interactúan directamente entre ellas, sino con los campos, que juegan el papel de intermediarios y que transmiten la interacción entre partículas a velocidad finita.

En este sentido las ondas electromagnéticas en la teoría de Maxwell son precisamente esto: las distorsiones del campo electromagnético debido a la aceleración de cargas, que se propagan con la velocidad de la luz. Consideremos una carga, inicialmente en reposo en el origen  $o$ , y un campo coulombiano, centrado en la carga y que se extiende hasta el infinito. En el momento  $t = t_0$ , durante un intervalo  $\Delta t$ , la carga se desplaza a un punto  $p$  cercano, donde queda otra vez en reposo. La configuración de las líneas de campo en un momento  $t \gg t_0 + \Delta t$  consta de dos partes (véase Figura 1.7): a distancias  $r \gg c(t - t_0)$ , las líneas de campo todavía siguen manteniendo la forma de un campo coulombiano centrado en el origen, igual que como estaban antes de que la carga se moviese, dado que no ha habido tiempo para que ninguna señal llegara hasta allí. La contribución a los potenciales retardados en los puntos con  $r \gg c(t - t_0)$  es como si la carga todavía estuviera en el sitio original. Sin embargo, por la ley de Coulomb está claro que a distancias  $r \ll c(t - t_0)$ , las líneas de campo forman un campo coulombiano centrado en  $p$ . Entre las dos zonas hay una discontinuidad esférica en los campos electromagnéticos de grosor  $c\Delta t$  que, debido a la dinámica de las ecuaciones del vacío (1.70), se expande con la velocidad de la luz, formando una onda electromagnética esférica.

La propiedad de que las interacciones se propaguen a la velocidad de la luz es una propiedad típica de las teorías de campos relativistas. En el siguiente capítulo veremos no solo que desde el primer momento la teoría de Maxwell ya tenía incorporada todas las propiedades de una teoría relativista, sino que fue justo esa diferencia con la mecánica newtoniana la que hizo que Einstein desarrollara la Relatividad Especial. Además, unos años más tarde, precisamente la discrepancia entre los potenciales retardados de electromagnetismo y la acción a distancia de la gravedad newtoniana le empujó a abandonar esa última y desarrollar la Relatividad General.