

Lorenzo J. Blanco Nieto,
Nuria Climent Rodríguez,
María Teresa González Astudillo,
Antonio Moreno Verdejo,
Gloria Sánchez-Matamoros García,
Carlos de Castro Hernández
y Clara Jiménez Gestal
(Eds.)



A p o r t a c i o n e s a l d e s a r r o l l o d e l c u r r í c u l o d e s d e l a i n v e s t i g a c i ó n e n e d u c a c i ó n m a t e m á t i c a

eug EDITORIAL
UNIVERSIDAD
DE GRANADA



SOCIEDAD ESPAÑOLA
DE INVESTIGACIÓN
EN EDUCACIÓN
MATEMÁTICA

Lorenzo J. Blanco Nieto, Nuria Climent Rodríguez,
María Teresa González Astudillo, Antonio Moreno Verdejo,
Gloria Sánchez-Matamoros García, Carlos de Castro Hernández
y Clara Jiménez Gestal (Eds.)

Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática

**Granada
2022**

© Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)
© UNIVERSIDAD DE GRANADA
Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática.
Campus Universitario de Cartuja
Colegio Máximo, s.n., 18071, Granada
Tlfs.: 958 24 39 30 - 958 24 62 20
www: editorial.ugr.es
ISBN(e) 978-84-338-7038-4
Edita: Editorial Universidad de Granada
Campus Universitario de Cartuja. Granada
Descriptores: investigación, educación matemática, desarrollo curricular,
práctica en el aula.
Preimpresión: TADIGRA, S.L. Granada
Diseño de cubierta: José María Medina Alvea. Granada

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra sólo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley.

Índice

La SEIEM ante los retos de la educación matemática en todos los niveles educativos	7
Parte 1. El currículum de matemáticas	14
Introducción.....	15
Reflexiones curriculares desde la historia de la educación matemática en la segunda mitad del siglo XX	17
Consideraciones acerca de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas	37
Sentido matemático Escolar.....	55
La evaluación en Matemáticas	80
Parte 2. Las matemáticas en los niveles escolares	104
Introducción.....	105
Matemáticas en la Educación Infantil.....	107
Matemáticas en la Educación Primaria.....	148
Matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria	172
Matemáticas en el Bachillerato	199
Matemáticas en la Universidad	224
Matemáticas en la Formación Profesional	260
Las Matemáticas en la educación de personas adultas.....	285
Pensemos en unas matemáticas para todo el alumnado.....	322

Parte 3. Cuestiones transversales en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas	348
Introducción.....	349
Tensiones y prácticas inclusivas en la enseñanza de las matemáticas	352
Desarrollar las competencias de resolución de problemas y modelización para aprender matemáticas.....	373
Entornos tecnológicos para el desarrollo del pensamiento computacional y de la competencia en resolución de problemas	399
Recursos didácticos para el aula de Matemáticas.....	425
Matemáticas transversales.....	453
Parte 4. Formación y desarrollo profesional del profesorado de matemáticas	480
Introducción.....	482
Parte A. Formación Inicial.....	485
A.1. Interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes para decidir sobre la enseñanza	485
A.2. Oportunidades de aprendizaje y tareas matemáticas escolares	498
A.3. Criterios de idoneidad didáctica para orientar el rediseño de la planificación e implementación de secuencias didácticas	506
Parte B. Acceso a la Formación docente.	515
Parte C. Desarrollo profesional	516
C.1. Desarrollo profesional en el contexto de investigaciones colaborativas.....	517
C.2. Uso combinado de Lesson Study y los Criterios de Idoneidad Didáctica	522
Parte D. Cuestiones transversales: Dominio Afectivo.....	523

La SEIEM ante los retos de la educación matemática en todos los niveles educativos

The SEIEM facing the challenges of mathematics education at all educational levels

Editores

SEGÚN CONSTA EN EL BOLETÍN N° 0 de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática www.seiem.es la constitución de la Sociedad tuvo lugar el 12 de marzo de 1996, en el salón de actos del Centro de Desarrollo Curricular del Ministerio de Educación y Ciencia, en una reunión en la que participaron 35 profesores de 20 universidades españolas.

El nacimiento de la sociedad no fue casual, siendo un eslabón más dentro de un movimiento renovador en torno a la educación matemática que se había iniciado en los años 70. Era una época con un deseo generalizado de reforma de la educación en España, cuya principal referencia eran los Movimientos de Renovación Pedagógica presentes en la casi totalidad de las regiones. Obviamente, la comunidad de educadores matemáticos no podía ser ajena a tal movimiento y así nacieron grupos especializados y sociedades de profesores que planteaban la organización de jornadas y cursos con el objetivo de divulgar experiencias innovadoras, difundir las corrientes sobre enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y coordinar esfuerzos individuales y colectivos. En esta época surgen algunas publicaciones de divulgación especializadas como las revistas *Números*, en 1981 y *Épsilon*, en 1984, entre otras. Fruto de esta colaboración se plantea, en 1988, la formación de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas www.fespm.es, a partir de algunas de las sociedades ya conformadas. Un número importante de profesores incorporados a las Escuelas de Magisterio, que centrábamos nuestro trabajo en la formación de maestros en el área de las matemáticas, participábamos de esas inquietudes y actividades.

Había una preocupación por mejorar nuestra tarea profesional como profesores de matemáticas y como formadores de profesores y, también, bastante desconcierto y dudas sobre cómo enfocarla. A ello, había que añadirle la escasez de referencias específicas en ambas cuestiones. Ello, nos llevaba a diseñar y desarrollar trabajos de innovación o experimentación espontáneas relacionados con diferentes aspectos de la reforma educativa o sobre actividades concretas de intervención en el aula. Los

problemas estudiados eran situaciones de enseñanza muy específicas, aunque útiles para los profesores que los experimentaban. Evidentemente, la realidad social que había en España con enormes deseos de cambios era, así mismo, una motivación más en nuestra actividad profesional.

Simultáneamente, en 1984 se crea, en la universidad, el Área de Conocimiento de “Didáctica de la Matemática”, lo que nos permite integrarnos en los departamentos universitarios o crear departamentos específicos de nuestra área y, en algunos casos, conjuntamente con el área de Didáctica de las Ciencias Experimentales. Formar parte de los departamentos universitarios supuso, en muchos casos, disponer de medios personales y materiales, ayudas institucionales y otros recursos para iniciarnos en la investigación en este campo. En algunos de los proyectos desarrollados empezaban a participar profesores de primaria y secundaria, lo que nos llevó a adentrarnos en agendas de investigación de enseñanza y aprendizaje en diferentes niveles educativos, además de los específicos sobre formación, inicial y permanente, del profesorado.

La participación en eventos sobre educación matemática provocó una comunicación y colaboración para facilitar nuestro trabajo profesional y motivó la primera reunión de profesores del área de Didáctica de la Matemática que se celebró en Valencia en 1987. Se debatió específicamente acerca de la naturaleza y contenido del área de conocimiento, con referencia al ámbito profesional, docente e investigador, relacionado con la educación matemática y la formación del profesorado. Surgía en el ámbito universitario un profesorado con formación básica de matemáticas, específico y motivado, para abordar la investigación en la educación matemática, mostrando, de esta manera, un salto cualitativo importante en este ámbito de investigación.

El progreso en el trabajo y las nuevas condiciones en las que se desarrollaba nos llevó a constituir la SEIEM, en 1996. Era nuestro objetivo, desarrollar un espacio de comunicación crítica y debates desde diferentes marcos, teóricos y metodológicos de investigación y compartir los resultados de los proyectos desarrollados debate sobre investigación en Educación Matemática. Entendíamos la necesidad de conocer diferentes perspectivas, para abordar cuestiones específicas y generales, propias de la acción investigadora. Aunque la investigación era una prioridad, le dábamos mucha importancia al hecho de favorecer activamente la cooperación e intercambio entre investigación y práctica docente en todos los niveles educativos, lo que constituía otro de nuestros objetivos. Deseábamos contribuir a la mejora de la educación matemática presentando los resultados del trabajo investigador en todos los ámbitos que pudieran ayudarnos a su divulgación, a la toma de decisiones cuando correspondiera e influir en los organismos e instituciones relacionados con la educación, al objeto de lograr una enseñanza de las matemáticas más eficaz. Siempre fue nuestro deseo hacer llegar los resultados de nuestra investigación a los profesores de diferentes niveles para procurar una enseñanza y aprendizaje de las matemáticas más eficaz.

En 2022 conmemoramos el XXV aniversario del primer Simposio de la SEIEM que tuvo lugar en Zamora en 1997 y que ha mantenido una continuidad anual como se refleja en las sucesivas actas¹ que pueden consultarse libremente y bajarse de la página de la sociedad. En estos eventos se programaban dos o tres seminarios anuales, con ponentes invitados, lo que nos permitía debatir sobre la evolución y estado actual de la investigación de temas generales como marcos teóricos y metodología de investigación, sobre otros más específicos relacionados con contenidos matemáticos que formaban parte del currículo como el análisis matemático, la estadística o la geometría, entre otros, y, finalmente, sobre agendas transversales de investigación relacionadas con la resolución de problemas, el uso de herramientas tecnológicas o la influencia del dominio afectivo en la enseñanza y aprendizaje, etc. También, las actas de los simposios contienen numerosas comunicaciones que reflejan la evolución y resultados de las investigaciones desarrolladas en estos años.

Para facilitar nuestra comunicación e interacción, desde el inicio se consideró conveniente formar grupos de estudio que reflejaran la preocupación y líneas de trabajo plasmadas en diferentes proyectos y agendas de investigación en las que participábamos. Los nombres de los diferentes grupos reflejan, en parte, estas preocupaciones: Aprendizaje de la Geometría APRENGEOM <https://www.seiem.es/grp/aprengeom.shtml>; Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor CDPP: <https://www.seiem.es/grp/cdpp.shtml>; Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria DEPC: <https://www.seiem.es/grp/depc.shtml>; Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica DMDC <https://www.seiem.es/grp/dmdc.shtml>; Entornos Tecnológicos en Educación Matemática ETEM <https://www.seiem.es/grp/etem.shtml>; Didáctica del Análisis Matemático GIDAM <https://www.seiem.es/grp/gidam.shtml>; Historia de las Matemáticas y de la Educación Matemática HMEM <https://www.seiem.es/grp/hmem.shtml>; Investigación en Educación Matemática Infantil IEMI <https://www.seiem.es/grp/iemi.shtml>; Pensamiento Numérico y Algebraico PNA <https://www.seiem.es/grp/pna.shtml> y Jóvenes Investigadores JIS <https://www.seiem.es/grp/jis.shtml>. Durante estos años, los diferentes grupos han celebrado reuniones específicas de debate e intercambio de información sobre los problemas de investigación abordados por sus miembros que han quedado plasmada en diferentes publicaciones también visibles en nuestra web.

Muchas de las investigaciones realizadas se relacionan, específicamente, con la formación de profesores de matemática en todos los niveles educativos, probablemente, como consecuencia de que ello es nuestra actividad docente más generalizada. Esta situación nos llevó, así mismo, a plantearnos, en diferentes ocasiones, la organización de jornadas específicas sobre el desarrollo curricular en la formación de profesores de infantil, primaria y secundaria y debatir sobre el contenido de los programas específicos de las asignaturas que impartíamos en la formación de maestro y de profe-

1. <https://www.seiem.es/pub/actas/index.shtml>

sores de secundaria. Los resultados de estos encuentros se plasmaron en diferentes publicaciones y propuestas concretas ante instituciones universitarias posibilitado una cierta evolución en los centros de formación inicial del profesorado. A este respecto, se desarrollaron seis jornadas específicas desde el año 1996 al 2002, cuyas actas están publicadas, así como otros encuentros posteriores y numerosas investigaciones cuyos resultados debieran reconsiderados en cualquier propuesta de reforma para la mejora de la profesión docente.

La celebración de este XXV aniversario ha coincidido con la propuesta y debate, en el seno de la comunidad educativa, sobre la modificación curricular y sobre la formación del profesorado en los niveles educativos previos a la universidad. Ello ha dado lugar a la publicación de diferentes decretos que establecen la ordenación y enseñanza en Educación Infantil, Primaria, Secundaria y Bachillerato y estamos a la espera de propuestas sobre la formación del profesorado. Por ello, la Junta Directiva de la SEIEM, en noviembre del 2020, propuso participar con un documento propio en este debate partiendo desde la investigación en Educación Matemática y teniendo en cuenta las aportaciones realizadas por los diferentes grupos de trabajo. Así, se propuso la elaboración de un libro que reflejara cuestiones generales sobre la E/A de las matemáticas y, al mismo tiempo, tuviera en cuenta los diferentes organizadores del currículo como los objetivos, contenidos, metodología y evaluación asumiendo la perspectiva adoptada en relación a las competencias generales y específicas. Pero siempre, considerando que los temas tratados debieran ser útiles al profesorado en su actividad profesional, tanto para generar actividades de aula como poder avanzar en su formación personal como profesores de matemáticas.

La buena disposición de los miembros de la SEIEM y la amplitud de perspectivas en las que trabajan nos permitió ser ambiciosos al incluir todos los niveles e itinerarios educativos, reflejando los organizadores del currículo. Paralelamente, hemos abordado cuestiones transversales como el uso de recursos didácticos, manipulativos y entornos virtuales, y la referencia a una multitud de factores que condicionan el proceso de E/A de una materia que se considera útil para la formación, participación e integración de las personas en la sociedad del siglo XXI, y cuya enseñanza puede y debiera ser agradable y motivadora, aunque exija reflexión y esfuerzo. Obviamente, asumimos que la educación matemática debe integrar aspectos cognitivos y afectivos, en íntima relación con los aspectos socio-culturales y valores propios de la sociedad actual.

La historia de la educación matemática y la implementación de diferentes propuestas curriculares muestran la importancia y necesidad de contar específicamente con el profesorado para que las recomendaciones establecidas se puedan trasladar a las aulas. A este respecto, recordamos que son ya muchos años desde que se sugiriera que la resolución de problemas es el contexto para el aprendizaje matemático o de señalar la importancia del entorno inmediato para contextualizar las tareas de aula, pero la investigación sigue mostrando que ambas recomendaciones no tienen repercusión clara en el desarrollo de la actividad de aula. De una manera similar, observamos

la dificultad de introducir los entornos virtuales en la enseñanza señalando algunas investigaciones la falta de seguridad, cuando no de conocimiento y medios, de los profesores de diferentes niveles educativos para desarrollar los contenidos específicos del currículo.

Es decir, en cualquier propuesta de reforma o cambio hay que considerar las dificultades, profesionales e institucionales, que condicionan la implementación de las propuestas curriculares en la práctica docente. Establecer líneas de conexión entre el currículo, la investigación y la práctica docente es uno de nuestros objetivos aún, reconociendo que nuestra aportación es un paso pequeño, que sugiere otros muchos que deben propiciarse desde las instituciones educativas y de las asociaciones de profesores.

Asumimos que el contenido de cada una de las cuatro partes en las que se divide la publicación, e incluso de cada capítulo, podría ser objeto de un documento específico más amplio que este que presentamos. Por ello, esbozamos algunas orientaciones, teóricas y prácticas, con el objetivo de ayudar a los profesores en su trabajo profesional y servir de apoyo al desarrollo del nuevo currículo. El trabajo se ha realizado con la participación de 70 profesionales, docentes e investigadores en educación matemática, pertenecientes a 23 universidades. Se han aportado numerosas referencias que permiten profundizar en cada uno de los temas esbozados y animamos a su consideración ya que su lectura ayudará a comprender mejor la complejidad del mundo de la educación matemática.

Iniciamos el documento con una breve mirada histórica para mostrar reflexiones y aportaciones que nos ayudan a profundizar sobre los problemas de la educación matemática y de la implementación del currículo, que serán objeto de fundamentación y análisis para ayudar a la práctica docente. Es importante reflexionar sobre los descriptores curriculares de la educación matemática y mantener viva las preguntas sobre qué matemáticas enseñar y por qué hay que enseñar matemática en el siglo XXI. Como profesionales reflexivos debemos considerar los objetivos generales de la educación y que nuestro trabajo se dirige a la formación de personas que van a vivir en una sociedad concreta en la que deben integrarse y participar creativamente y luchar para que sea más solidaria, igualitaria y justa. A este respecto, con el objetivo de orientar a los profesores en este nuevo rumbo curricular, reflexionamos sobre la pertinencia y fundamentación de sentidos matemáticos escolares en los documentos curriculares publicados, y sobre las consecuencias que tendrán en futuros procesos de enseñanza y aprendizaje. Se realiza una descripción general de cada uno de los sentidos matemáticos escolares en los que se divide: sentido numérico, espacial, de la medida, estocástico y algebraico, señalándose las principales componentes que lo organizan. Termina la primera parte con un capítulo relativo a la evaluación que es un aspecto fundamental que sigue reflejando prácticas muy tradicionales, por lo que se aportan elementos para su desarrollo.

Somos conscientes de la intensidad y complejidad de la dedicación de los profesores en los diferentes niveles de enseñanza, y del trabajo cada vez más intenso y exigido

que requeriría una reconsideración del papel de los profesores en los centros de enseñanza. El análisis del currículo y su concreción en el aula no es sencillo y debe desarrollarse desde los profesionales de la educación, pero al mismo tiempo requiere un mayor esfuerzo de las instituciones educativas y mostrarse más explícitamente en los documentos curriculares oficiales. Aunque, no era nuestro objetivo concretar todo el currículo de matemática en los diferentes niveles educativos, en la segunda parte hemos querido mostrar algunas orientaciones docentes que se requieren en la sociedad actual, justificando y proponiendo actividades de aulas en todos los niveles educativos: infantil, primaria, secundaria obligatoria, bachillerato, universidad, formación profesional, educación de adultos y aprendizaje matemático de alumnado con necesidades especiales.

Es necesario reconsiderar la enseñanza de las matemáticas en infantil y primaria, reconocer el papel de las matemáticas intuitivas e informales y potenciar actividades que generen aprendizajes de una manera más natural, espontánea y significativa, como paso para acceder a una matemática más formal. Igualmente, hemos pretendido facilitar a los profesores de primaria, secundaria y bachillerato la implementación de las orientaciones más novedosas que se sugieren en los nuevos decretos curriculares.

La transición de la secundaria a la universidad presenta dos referencias importantes que son motivos de reflexión y preocupación, tanto por la realización de las pruebas de acceso similares a lo largo de los años peso a los cambios de modelos, como por la formación matemática con la que los estudiantes acceden a los diferentes grados. Ello, nos lleva a reflexionar acerca del sentido y contenido de las matemáticas en diferentes grados universitarios y se proponen algunas tareas exploratorias que puedan ser consideradas en las aulas universitarias.

Pero también, la enseñanza de las matemáticas está presente en la educación de personas adultas y en la formación profesional y sobre ello es necesario incidir y mostramos, en ambos casos, reflexiones y propuestas concretas. A este respecto, sugerimos contextualizar las situaciones de aprendizaje e integrarlas en la vida cotidiana de las personas adultas y partir de situaciones de aplicación concreta de contenidos matemáticos en diferentes profesiones.

La educación matemática presenta numerosos elementos transversales, algunos de los cuales, son considerados en la tercera parte. Asumimos el aula de matemáticas como un contexto social de comunicación que debe propiciarse a partir de tareas matemáticas específicas, con prácticas centradas en el alumno y sus procesos de aprendizaje y una matemática inclusiva que valore los aportes y características de todos los alumnos. Asumimos la importancia de avanzar hacia una enseñanza de las matemáticas que de sentido a la educación y sea enriquecedora a nivel personal, social y académico. En esta parte se realizan propuestas para trabajar las conexiones con otras disciplinas, se consideran los desafíos de la sociedad actual, como los Objetivos de Desarrollo Sostenible o la perspectiva de género y las experiencias de matemáticas fuera del aula. Para ello, es fundamental el uso de materiales y recursos manipulativos y entornos tecnológicos, que ayuden a los aprendices. Somos cons-

ciente de la dificultad, didáctica y de disponibilidad, del uso de materiales y recursos, así, como de la necesidad de conocer con claridad la secuencia de aprendizaje que se genera en cada caso. Este uso, además, debe realizarse en el aula y fuera de ella ya que es fundamental la complementariedad de las actividades regladas y no regladas desarrolladas en el entorno inmediato. Termina la tercera parte con una referencia a la resolución de problemas y modelización, consideradas desde diferentes perspectivas e incidiendo en su papel como contexto necesario para desarrollar el aprendizaje y para dar sentido matemático de los diferentes saberes que se indican en el currículo.

La última parte presenta una estructura diferenciada y, en ella, abordamos la formación inicial del profesorado de infantil, primaria y secundaria, el acceso a la profesión docente y mostramos situaciones de aprendizaje en relación a su desarrollo profesional. Obviamente, considerando los pasos anteriores como un proceso continuo de aprendizaje y formación, que permita al sujeto ir adaptándose a las necesidades que la sociedad va originando. Se pretende dar respuesta a la demanda de la formación de profesores a través del modelo de competencias profesionales docentes, a partir de la identificación del conocimiento específico de los profesores de matemáticas orientado a la práctica profesional, y de las prácticas profesionales específicas que configuran la actividad de enseñar matemática y que se especifican en el texto. Las propuestas de desarrollo profesional inciden en la idea de la reflexión sobre la propia práctica y en el necesario uso de referencias teóricas procedentes de la Didáctica de la Matemática para organizar la reflexión.

Parte 1

El Currículum de Matemáticas

The Mathematics Curriculum

INTRODUCCIÓN

SE DICE EN NUMEROSAS OCASIONES que quien no conoce su historia está condenado a repetirla. No sé si es necesariamente así, pero el estudio de la historia de la educación matemática nos muestra algunas constantes en su desarrollo, tanto en relación con las preguntas básicas que subyacen en la actividad profesional del profesor de matemáticas, como a las dificultades que estos encuentran en su práctica docente cotidiana, algunas de las cuales se mantiene demasiado tiempo.

De esta manera, hay preguntas que siempre estarán en la base de cualquier propuesta curricular en referencia a qué matemáticas enseñar y cómo enseñarlas, que, también, son objeto de reflexión al hablar de la evaluación al preguntarnos qué y cómo evaluar. Obviamente, estas y otras preguntas han encontrado diferentes respuestas en cada época condicionadas por cuestiones sociales, económicas y culturales. Pero, también, vienen sugeridas por los objetivos marcados para la educación en general y por la concepción asumida sobre la naturaleza de la propia matemática. Consecuentemente, tampoco ha sido fácil dar una respuesta clara sobre qué significa lograr una enseñanza eficaz o mejorar la educación matemática.

El desarrollo de la sociedad provoca que la educación, también la educación matemática, tenga que ir adaptándose a las necesidades, personales y sociales, en cada época, con repuestas diferenciadas en cada momento y realidad social, pero con un objetivo permanente de luchar por una sociedad más justa que permita el desarrollo de todas las personas.

De ahí el contenido de esta primera parte que se inicia con una mirada a las reflexiones y aportaciones sobre la enseñanza de las matemáticas desde la mitad del siglo pasado tratando de sintetizar aquellas ideas que han permitido la evolución de la educación y que subyacen en diferentes propuestas curriculares realizadas. Ello nos ha permitido señalar algunas pautas necesarias para la enseñanza y aprendizaje que fundamentaría algunas de las propuestas actuales y que se reflejan en los dos primeros capítulos.

También, el segundo capítulo se marca como objetivo fundamentar una nueva propuesta curricular en la enseñanza obligatoria reflexionando, además, sobre algunas dificultades que obstaculizarían su puesta en marcha. Así, se refiere al papel, real y pretendido, de la matemática en la escuela y a una nueva visión sobre ella. Trata de responder a una pregunta recurrente de ¿para qué enseñamos matemáticas?, teniendo en cuenta la importancia de los docentes, los materiales curriculares y los recursos en el desarrollo del currículo, en cualquier situación escolar.

El tercer capítulo considera la nueva propuesta curricular centrándose en la fundamentación y significado de los sentidos matemáticos y sobre la pertinencia de su inclusión en el currículo. En la idea de orientar la actividad en el aula de los profesores de todos los niveles educativos (infantil, primaria, secundaria, bachillerato, universidad, formación profesional y educación de adultos) se describen cada uno de los sentidos considerado en los decretos: sentido numérico, espacial, de la

medida, estocástico y algebraico. Por ello, es importante la lectura de este capítulo para entender los capítulos que aparecen en la parte segunda.

Finalizamos esta parte con un capítulo dedicado a la evaluación que es uno de los organizadores del currículo que menos ha evolucionado en la práctica real del aula, según los resultados de diferentes investigaciones. Asumiendo la idea general de ser una aportación útil al profesorado se muestran nueve situaciones reales, en diferentes niveles educativos, que serían punto de partida para reflexionar sobre el sentido de la evaluación, aportando algunos instrumentos y tareas concretas y una guía de evaluación. Todo ello, entendiendo que la evaluación es una parte más del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Blanco Nieto, Lorenzo J. (Coord.).
Universidad de Extremadura

Reflexiones curriculares desde la historia de la educación matemática, en la segunda mitad del siglo XX

Curricular reflections from the history of mathematics education, in the second half of the 20th century

Blanco Nieto, L. J.
Universidad de Extremadura

Resumen

Mejorar los resultados en la enseñanza de las Matemáticas ha sido una de las preocupaciones de la comunidad educativa desde hace muchos años. Una breve mirada al pasado reciente nos muestra reflexiones y aportaciones interesantes que nos ayudan a profundizar sobre los problemas de la educación matemática, a comprender mejor dónde estamos y qué es lo que debería considerarse en el futuro.

Palabras Clave: Currículo, Historia de la educación matemática.

Abstract

Improving the results in the teaching of Mathematics has been one of the concerns of the educational community for many years. A brief look at the recent past shows us interesting reflections and contributions that help us delve into the problems of mathematics education, to better understand where we are and what should be considered in the future.

Keywords: Curriculum, History of mathematics education.

INTRODUCCIÓN

A comienzos de los años cincuenta, e incluso antes, todo el mundo estaba de acuerdo en que la enseñanza de las matemáticas era insatisfactoria. El nivel de los estudiantes en matemáticas era más bajo que en las otras asignaturas. La aversión e incluso el terror estudiantil a las matemáticas estaba muy extendido. Los adultos no recordaban casi nada de las matemáticas que habían aprendido y no sabían efectuar operaciones sencillas con fracciones. De hecho, no vacilaban en decir que no habían sacado nada limpio de sus cursos de matemáticas.

(Kline, 1978, p. 21)

LA CITA INICIAL MUESTRA QUE LOS PROBLEMAS de la enseñanza y aprendizaje (E/A) de las Matemáticas no son nuevos, ni consecuencia de leyes modernas de educación. De manera similar, en la década de los 80', el prólogo a la edición española del Informe Cockroft indicaba: "El alto número de suspensos en Matemáticas y la conciencia de que los alumnos no aprenden en la medida esperada, está extendiendo entre los profesores, los alumnos y los padres la idea de que "algo va mal", manifestada unas veces como sensación de fracaso, otras como desconcierto, a menudo como frustración" (Cockroft, 1985, p. XII).

Estudios recientes inciden en los pobres resultados escolares y en el desarraigo de la población estudiantil y adulta respecto de los contenidos matemáticos. Son múltiples los aspectos a estudiar en relación con su E/A, muchos de ellos contenidos en diferentes capítulos de este libro, que pueden abordarse desde diferentes perspectivas que, lejos de contraponerse, se complementan, estableciéndose una panorámica más precisa que nos ayuda a comprender mejor el complejo mundo de la educación matemática.

Revisar la historia de la educación matemática nos permite profundizar sobre algunos de sus problemas. Estas referencias no son reliquias históricas sino fuentes depositarias de ideas y debates interesantes, que nos ayudan a reflexionar sobre la actividad docente, dando sentido a la educación matemática en el siglo XXI y al trabajo profesional del profesor de matemáticas. El periodo considerado fue testigo de cambios profundos en la enseñanza de las matemáticas para encontrar modelos adecuados para su aprendizaje.

LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA A PARTIR DE LOS CINCUENTA

En los 50 se desarrollaron, en EE.UU., diferentes proyectos con objeto de elaborar un nuevo plan de matemáticas, en un movimiento que llamaron "*revolution in mathematics*" (National Council of Teacher of Mathematics, 1980). Algunos autores (Kline, 1978; Putnam et al., 1990; Castelnovo, 1999) señalaron el lanzamiento por los rusos del Sputnik, en 1957, como el acontecimiento decisivo que generalizó

reacciones de cambio en aspectos importantes en la investigación y desarrollo de la enseñanza de las Matemáticas.

Este acontecimiento convenció al gobierno y al país de que los EE.UU. estaban detrás de los rusos desde el punto de vista de las matemáticas y la ciencia, y tuvo el efecto de aflojar la bolsa de los organismos gubernamentales y de las fundaciones. Puede que fuese una coincidencia, pero en ese momento otros muchos grupos decidieron participar en la consideración de un nuevo plan.

(Kline, 1978, p. 23)

Al margen del contexto concreto y anecdótico, las décadas de los 50 y 60, fueron un período de reflexión y cambio importante en las concepciones y métodos desarrollados en la educación matemática. Se consideraba que la enseñanza de las matemáticas tenía que ir más allá de la enseñanza del cálculo aritmético y la aplicación de fórmulas y desarrollo de procedimientos algorítmicos. Se justificaba el fracaso de las matemáticas porque el plan de enseñanza era anticuado y no acorde a las necesidades del momento.

Muchas de estas ideas se plasmaron en publicaciones específicas y en las recomendaciones de la Conferencia Internacional de Instrucción Pública, convocada en Ginebra, en 1956, por la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura y por la Oficina Internacional de Educación, y de las que se hacen eco Puig Adam (1960) y Hernández (1978) en su recopilación de 24 artículos y documentos de la época.

La preocupación por la educación matemática se consideraba desde una doble dimensión. En primer lugar, en relación con los contenidos de la propia matemática en los diferentes niveles educativos: *¿qué matemáticas enseñar?* En segundo lugar, se consideraban las aportaciones de psicólogos, pedagogos y docentes: *¿cómo enseñarlas?* Las aportaciones de Jean Piaget (Piaget, 1965) y otros, recogidos en Hernández (1978), eran adecuadas e importantes, y debieran haber provocado la colaboración entre especialistas en educación matemática y especialistas en educación, lo que no se produjo en la intensidad adecuada (Malaty, 1988). Aún hoy, algunos sectores influyentes en la educación matemática, recelan de las aportaciones de la psicología, pedagogía y otras áreas, incluso de las más específicas consideradas en el área de conocimiento de Didáctica de la Matemática, presente en todas las universidades españolas.

Cambios en los contenidos matemáticos y en las matemáticas escolares

“Si todo el programa que propongo se tuviera que condensar en un sólo eslogan yo diría: ¡abajo euclides! ¡abajo el triángulo!”.

Con estas palabras J. Dieudonné terminó su intervención en el seminario de matemáticas celebrado en Royaumont (Francia), en 1959. Formaba parte del grupo de matemáticos franceses agrupados con el nombre de Nicolas Bourbaki

(Bourbaki, 1972), que influyeron notablemente en el desarrollo de la matemática desde la primera mitad del siglo XX hasta los años 70. Su objetivo era revisar los fundamentos y resultados básicos de la matemática, sistematizar y ordenar los contenidos matemáticos que se habían desarrollado enormemente en décadas anteriores, y “suministrar a los lectores herramientas matemáticas tan robustas y tan universales como sea posible” (Bombal, 2011, p. 80). Su influencia en la enseñanza de las matemáticas en los niveles universitarios fue clara e inmediata, influyendo en la introducción de nociones de la teoría de las estructuras y de los conjuntos en la enseñanza escolar (Castelnuovo, 1999).

Aparecieron importantes publicaciones mostrando la diversidad y utilidad de las matemáticas, a partir de estudios sobre su naturaleza, uso, historia, fundamentos y filosofía, en relación con el arte, música y aplicaciones a los problemas sociales y económicos, y otros muchos campos del conocimiento. Parte de estas contribuciones fueron recogidas en la antología de 132 textos realizada por Newman (1963). Incluso Poincaré (1963) invoca la sensibilidad con motivo de demostraciones matemáticas haciendo alusión “al sentimiento de la belleza matemática, de la armonía de los números, de las formas, de la elegancia geométrica. Un sentimiento estético que todos los verdaderos matemáticos conocen” (p. 48).

Importante fue el trabajo *La matemática: su contenido, método y significado* (Aleksandrov et al., 1973) que fue considerada una obra maestra para la enseñanza de la matemática, en el nivel elemental y en el nivel avanzado. Los autores examinaban el desarrollo histórico de la disciplina desde sus orígenes, logrando una muy buena organización de la matemática y marcando algunas ideas sobre el probable desarrollo futuro. Asumían una matemática “en continuo desarrollo; los principios de la matemática no se han congelado de una vez para siempre, sino que tienen su propia vida y pueden incluso ser objeto de discusiones científicas” (Aleksandrov et al., 1973, p. 20). Era evidente que se considera la actividad matemática y su enseñanza como una actividad compleja, dinámica y cambiante.

R. Thom (1978) realiza un “balance sucinto de las transformaciones hechas en los programas” (p. 116), señalando dos objetivos fundamentales: la renovación pedagógica y la modernización de los programas. En 1961, Stone (1978) había señalado la necesidad de modificar el núcleo de contenido matemático a enseñar y aspectos de su enseñanza, como consecuencia de la importancia que la matemática iba tomando en la sociedad. Ello debería provocar una nueva organización de la enseñanza en un programa bien concebido, que tuviera en cuenta las aportaciones de la psicología moderna al estudio del desarrollo intelectual, la formación de conceptos y la teoría del aprendizaje. Hoy día asumiríamos esta idea para señalar la importancia de las aportaciones de la didáctica de la matemática que consideran, además de los contenidos específicos, aspectos emocionales y socioculturales, la neurociencia en relación al desarrollo del pensamiento matemático, la aparición de las tecnologías y la consideración del pensamiento computacional, y otras aportaciones que marcan el desarrollo personal e intelectual en este siglo.

El problema, como en la actualidad, era delimitar un marco curricular que considerara las necesidades de la nueva sociedad, y el aprovechamiento e integración en la enseñanza de las Matemáticas de las aportaciones de otras ciencias. Para ello, habría que resolver "el problema principal que domina todos los demás sobre el contenido de los estudios: saber cuáles son las Matemáticas que deben enseñarse hoy día" (Markusievitch, 1978, p. 196).

En España, Puig Adam (1960) realizaba cuatro preguntas: i. sobre los objetivos, ¿qué nos proponemos con la enseñanza de la Matemática?; ii. sobre el método, ¿por dónde vamos?; iii. sobre el modo, ¿cómo vamos? y iv. sobre el contenido ¿qué cogeremos en el camino? Señalaba que la manera de jerarquizar y contestar estas preguntas marcaría la propuesta sobre la enseñanza de las matemáticas. Estas referencias funcionaron como organizadores del currículo, trasladables a cualquier época ya que la sociedad está en constante evolución con nuevas necesidades e incorporando constantemente herramientas intelectuales y materiales.

El cambio fundamental en el currículum fue la introducción de las llamadas matemáticas modernas o los conjuntos, en palabras de la época. Se pensaba que servirían de conexión entre las diferentes partes de las matemáticas, al asumir que el uso de los conjuntos, del lenguaje matemático y los conceptos del álgebra abstracta podían dar más coherencia y unidad al plan de enseñanza secundaria.

En palabras de Guzmán (1992) el movimiento hacia la 'matemática moderna' provocó una honda transformación de la enseñanza. Recuerda que se subrayaron las estructuras abstractas, lo que condujo al énfasis en la fundamentación a través de la teoría de conjuntos y al cultivo del álgebra, profundizándose en el rigor lógico, en la comprensión y contraponiendo ésta a aspectos operativos y manipulativos. Según Bombal (2011) esta nueva estructura del conocimiento matemático fue introduciéndose en los programas educativos de diferentes países, desde mediados de los 50. En España aparece la Colección de Textos Piloto de Bachillerato, editado por la Comisión Nacional para el Mejoramiento de Enseñanza de la Matemática en 1964, que inicia la introducción a las operaciones básicas con subconjuntos y la geometría intuitiva a partir de las transformaciones geométricas. Se produjo un cambio acerca de lo que se debía enseñar en matemáticas desde los primeros niveles educativos, que no produjo el resultado esperado. Se quiso imponer un nuevo currículo sin contar con el profesorado.

Los cambios constituyeron una revolución en la enseñanza de las Matemáticas provocando una gran polémica sobre la oportunidad de su consideración en la enseñanza primaria y secundaria, y un enorme fracaso asumido por los implicados en el sistema educativo. Su implantación en el nivel de primaria provocó una corriente contraria (*back to basics movement*) en el que se trató de definir lo fundamental de las Matemáticas con objeto de recuperar aspectos más tradicionales como los referentes, por ejemplo, al cálculo aritmético. De cualquier manera, no fue la opinión de los especialistas lo que potenció el movimiento de volver a lo básico y tradicional, más bien fueron la opinión pública y los medios de comunicación. Los padres no

aceptaron que el nuevo currículo no les fuera familiar puesto que ponía el énfasis en otra matemática desconocida, lo que les imposibilitaba ayudar a sus hijos puesto que era un currículo diferente del que habían estudiado y que, obviamente, desconocían (Thom, 1978, Malaty, 1988).

El sugerente título del libro de Kline (1978) *¿Por qué Juanito no sabe sumar?* expresaba el sentimiento de fracaso de la enseñanza de las matemáticas modernas. En su crítica señalaba el “uso de un vocabulario pedantesco e innecesariamente abundante, empleo injustificado y más frecuente de lo necesario de ciertos símbolos, pobreza de ejercicios ...” (p. 38). El error fue admitido por todos y las llamadas matemáticas modernas fueron desapareciendo de los primeros niveles de escolaridad, volviéndose a un currículo más tradicional.

Pasado un tiempo, Malaty (1988) analizó lo que significó este movimiento señalando algunas cuestiones, que recojo por su interés. Señalaba que los especialistas trabajaron con entusiasmo y muy deprisa, se evidenció poca cooperación entre expertos en educación matemáticas y en educación y se dedicó poco tiempo e intensidad a la evaluación de los programas. El uso de los libros de textos se extendió antes de haber sido adecuadamente examinados, y las conexiones entre los diferentes capítulos mostraba que el currículo no había sido suficientemente estructurado. También, hacía referencia a la importancia de la formación permanente del profesorado, en todos los niveles.

Crítica a la enseñanza tradicional de las matemáticas

No llegaban a comprender la significación real de los conceptos matemáticos
(Dienes, 1970, p. 5).

En general, “se tenía la impresión que los alumnos aprendían en clase a manejar las operaciones aritméticas básicas y los algoritmos más frecuentes y poco más” (Schoenfeld, 1985, p. 26), lo que provocaba que profesores e investigadores consideraran la necesidad de un cambio en los programas de las matemáticas escolares. Entendían, además, que algunos de los contenidos, principalmente algorítmicos, habían perdido importancia en el desarrollo matemático. Esta reflexión sigue siendo muy pertinente actualmente ya que las necesidades de la sociedad del siglo XXI y el desarrollo de tecnologías educativas, entre otras variables, tienen que llevar aparejado una renovación en los programas, provocando la pérdida de importancia o desaparición de algunos de contenidos y la revalorización de otros.

Cambiar aspectos metodológicos en las aulas se consideraba esencial para poder llevar a cabo una renovación en la enseñanza. Es decir, la renovación de contenidos, aunque necesaria, no es suficiente si no va acompañada de una nueva práctica pedagógica. “Demasiados ensayos educativos incurren en la triste paradoja de pretender enseñar las matemáticas modernas con métodos arcaicos, es decir, esencialmente

verbales y basados solamente en la transmisión más que en la reinención o redescubrimiento" (Piaget, 1978, p. 185). Esta paradoja fue recordada 25 años después por Romberg (1991) al señalar que el movimiento de las matemáticas modernas realizó algunos cambios en los contenidos pero muy pocos en las tradicionales prácticas metodológicas en las aulas. Algo similar sucede con la consideración de la resolución de problemas como contexto para el aprendizaje matemático, que aparecía en los currículos de los 90', y que no se refleja en la práctica docente. Creo que, en la actualidad, esta consideración es especialmente importante. De alguna manera, la paradoja señalada por Piaget se observa en algunas prácticas actuales, incluso con el uso de las nuevas tecnologías, donde el estudiante observa y repite lo que el profesor muestra en la pantalla.

Los autores se manifestaban contundentes en su crítica al plan de enseñanza tradicional y a la práctica en el aula con argumentos que podrían ser motivo de investigaciones educativas actuales y que nos sirven para reconsiderar aspectos importantes en cualquier propuesta curricular. Recojo algunas aportaciones al respecto.

En primer lugar, recordaremos el interesante debate sobre el uso de *métodos inductivos y deductivos en el aula, donde había un predominio de las llamadas clases magistrales*. Se criticaba el excesivo énfasis en la demostración deductiva de los teoremas que provocaba que los estudiantes se aprendieran de memoria las demostraciones. Se desarrolla una interesante polémica, aún vigente, sobre la conveniencia de utilizar métodos expositivos y deductivos en la enseñanza de las Matemáticas en los niveles escolares y la ventaja de introducir una enseñanza más motivadora que permita la construcción del conocimiento, dándole significado a aprender y a aprehender. Decidir cuándo y cómo ir introduciendo métodos deductivos en la enseñanza sigue siendo un aspecto de reflexión importante, relacionado con el proceso de abstracción y los niveles de maduración de los aprendices. Recordemos la frase típica de los estudiantes "profe, con números que con letras no me entero". Actualmente, son muchos los profesores que en la práctica se acercan más al conductismo que al constructivismo o al aprendizaje significativo, probablemente, porque el proceso de construcción del conocimiento matemático es algo poco comprendido por el profesorado novel. Son más los que asumen, consciente o inconscientemente, los métodos que experimentaron como aprendices eludiendo otros métodos que consideran, en teoría, más adecuados pero que su implementación en el aula les causa dudas e inseguridad. Este aspecto muestra la importancia de la formación, inicial y permanente, del profesorado.

Eran frecuentes las referencias para modificar la enseñanza a base de lecciones magistrales, donde el papel del estudiante era fundamentalmente escuchar y copiar, para luego estudiar, en muchas ocasiones de memoria. La manera tradicional de impartir clases de matemáticas inducía a una actitud pasiva de los estudiantes y daba pleno sentido la expresión: 'dar matemáticas'. La dinámica del profesor impartiendo su docencia y el alumno estático en su asiento, se ha mantenido, aunque haya cambiado el aspecto formal de la comunicación, que ha evolucionado del discurso hablado, al

uso de la tiza y la pizarra, las transparencias, el PowerPoint o la pizarra digital. En todos los casos, se evidencia un tipo de educación conductista cuya superación por otros modelos se pide desde hace muchos años.

Al mismo tiempo, criticaban la *enseñanza mecanicista y memorística con procedimientos desconectados entre sí*: “se les pide que imiten lo que el maestro y el libro hacen. Los alumnos se enfrentan a una variedad desconcertante de procedimientos que aprenden de memoria. Casi siempre el aprendizaje es completamente memorístico” (Kline, 1978, pp. 9-10). A este respecto, se señalaba el “contraste injustificado entre el aprendizaje mecánico y calculista del álgebra y el axiomático de la geometría” (Hernández, 1978, p. 38). También, en España se criticaba el aprendizaje memorístico, señalando que “interesa enseñar a discurrir, mejor que a adquirir gran maestría y rapidez en el desarrollo de un proceso, que puede memorizarse. Debemos evitar que el aprendizaje de “recetas de cocinas” para hacer problemas o aprender de memoria teoremas más o menos importantes” (Roanes, 1969, p. 14). R. Godement fue más radical en sus comentarios al señalar que

el primer deber de los matemáticos sería proporcionar cosas que no les piden: hombres capaces de reflexionar por sí mismos, de despreciar argumentos falsos y frases ambiguas, a los ojos de los cuales la difusión de la verdad importe muchísimo más que, por ejemplo, la televisión planetaria en colores y en relieve: hombres libres y no tecnócratas-robot

(Godement, 1974, p.21).

Puig Adam (1960) expresaba magníficamente su idea sobre los procesos deductivos y el uso de la memoria al señalar que

las exposiciones lógicas impecables no satisfacen las apetencias analizadoras del niño, ni siquiera sirven para cultivar en él hábitos de síntesis, ya que tampoco se desarrolla precisamente esta capacidad dando la síntesis hecha. ¡Qué engañosa complacencia la de nuestros viejos profesores al oírnos repetir demostraciones estereotipadas! ¡Qué cándido espejismo al imaginar que así aprendíamos a discurrir! El resultado conseguido es la mayor parte de los casos eran tan sólo el cultivo obsesionante de la memoria para lograr una pura y simple imitación, bajo la falsa apariencia de un raciocinio de prestado (p. 103).

Conviene recordar que investigaciones de este siglo, señalan el uso de la memoria en el aprendizaje de las matemáticas en diferentes niveles educativos. Así, por ejemplo, Barrantes y Blanco (2006) señalan que los estudiantes consideran difícil la enseñanza de la geometría porque tienen que aprender fórmulas y demostraciones de memoria. Hidalgo et al., (2013) señalan que hasta los problemas típicos de los libros de texto se los aprenden de memoria. Es decir, sigue vigente el recurso de los estudiantes a memorizar las definiciones, demostraciones y las formas de resolver los problemas tipos, como la mejor manera para aprobar los exámenes y pasar de nivel.

Una de las consecuencias de este modelo y que se indicaba como defecto muy grave era la *falta de motivación*. Los aprendices estudiaban porque se les obligaba a ello y argumentaban que defender los contenidos matemáticos “diciendo que se utilizarán después en la vida. ... Esta motivación es como ofrecer la luna” (Kline, 1978, p. 13). Ya reconocían que gran parte del fracaso en la enseñanza de las matemáticas se debía a la falta de motivación, junto a factores afectivos, por ello la motivación del estudiante debe buscarse desde un punto de vista más amplio, más allá del posible interés intrínseco de la matemática y sus aplicaciones (Guzmán, 1992). Es evidente que la motivación es un elemento que promueve o inhibe la conducta de los aprendices y que en su consideración se reflejan aspectos individuales y sociales.

Los enunciados de los problemas “son desesperadamente artificiales y no convencerán a nadie de que el álgebra es útil” (Kline, 1978, P. 16), destacando la repetición más que la variación (Romberg, 1991). Los enunciados de los problemas (vocabulario, contexto, formato, etc.) es importante porque “la forma en que se presenta el enunciado es uno de los factores del éxito o del fracaso del resolutor” (Mialaret, 1986, p. 67). Los enunciados, contextos y tipos de problemas siguen siendo en los materiales actuales muy tradicionales y alejados de las inquietudes y necesidades de la población escolar, la mayoría inciden en la repetición de situaciones explicadas para memorizar algoritmos y pocos donde se les planteen situaciones nuevas que tengan que investigar (Álvarez y Blanco, 2015).

La falta de adaptación de los textos y materiales escolares a las reformas curriculares, fue puesta de manifiesto en Dorfler y McInone (1986), incidiendo en su importancia por cuanto determinan las matemáticas escolares por el uso y la dependencia que los profesores tienen de ellos para su actividad docente, y la falta de adaptación. Los libros de texto son mediadores entre el currículo y el aula y, en muchos casos, son el único nexo de unión entre estos (Álvarez y Blanco, 2015). Anteriormente, Kline (1978) reprochó su falta de calidad y de originalidad y la repetición de los mismos y la influencia del mercado y su distribución comercial en su contenido, estructura y difusión. Consecuentemente, la elaboración y revisión de los materiales escolares (en papel o digitales) y su adaptación a la nueva propuesta curricular debiera considerarse con rigor por las administraciones educativas. Sin esta revisión será difícil que el nuevo currículo se lleve a cabo con éxito.

Objetivos de la educación matemática

No queremos ser solo matemáticos, queremos ser hombres
(Markusievitch, 1978, p. 206).

En el periodo que nos ocupa hubo numerosos argumentos para justificar las Matemáticas como asignatura fundamental en el currículum escolar y "el convencimiento general de que todos los niños deben estudiar Matemáticas" (Cockroft, 1985, p. 1).